Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Věstník literární

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 19 (1890), No. 6, 317--328

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122019

Josef Kozelka ze VI. tř. tamže.
Ladislav Havelka ze VI. tř. české real. v Karlíně.

Výbor Jednoty Českých Mathematikův usnesl se na tom, aby těmto řešitelům přiřklo se po jedné z kněh za cenu vypsaných, což pokládáno budiž za *cenu druhou.*

Ostatní řešitelé podali řešení buď neúplné, nepřesné nebo chybné.

Věstník literární.

A. Hlídka programů.

Program c. k. středních škol v Přerově (1889). *Mechanika.* Náčrtek dle instrukcí pro vyšší gymnasia. Napsal prov. učitel Jar. *Simonides.*

Školní knihy a učební osnovy zůstávají za rozvojem vědy vždy o několik decennií — někdy i déle — pozadu. Dávno již není u soudných badatelů sporu o tom, že výklad úkazů mechanických má se díti na základě kinematiky, a to již z té příčiny, že lze základní pojmy prostého pohybu jasně a přesvědčivě vyložiti žákům nehledě na to, jakými to „silami“ „hmoty“ v pohyb byly uvedeny neb v klidu udržovány — či domnívá se někdo, že uvedené právě pojmy specificky mechanické (dynamické a statické) jsou jasnější a žáku přístupnější, nežli na př. pojmy postupného neb otáčecího pohybu, pojem rychlosti a t. p.? Kdo by takto ve škole cestou obrácenou z mechanických pojmů síly a hmoty odvodil na př. kinematický pojem rychlosti, co by ten mohl říci žáku dozvěděvšímu se, že rychlost světla obnáší 300000 *km*, když by se týž tázal, jaký „ráz“ tu které „hmotě“ sděluje uvedenou rychlost? Ano snad by byl již tím uveden v rozpaky, když by chtěl žák seznati „ráz“ způsobivší stálou otáčecí rychlost naší země, pohyb to zajisté ze všech pro nás nejdůležitější.

Prohlížíme-li však naše učebnice, i ty, jež za nejlepší jsou pokládány, shledáme u výkladu fysiky vůbec, zejmena pak u výkladu mechaniky, stav věcí tak neutěšený, že i nepatrný pokrok k lepšímu musíme vítati co začátek nápravy. Takový *nepatrný* pokrok k lepšímu spatřujeme v zásadě, „že na příště nemá dynamiku předcházeti statika“. Co v zásadě té dobrého, vztahuje se k poznání o přednosti pojmů kinematických, jež se ovšem zavádějí ustrojeny v roucho pojmů dynamických; právě tato okolnost umožňuje však přístup i těm zvráceným pojmům, jichž vznik měl býti zavedenou změnou zamezen, jak uvedený zprvu příklad dokazuje. Než dokud nebude provedena reforma úplná, musíme i malými změnami se spokojiti, a v tom smyslu výklad o mechanice (vlastně o části mechaniky) podaný od p. Simonidesa v uvedené shora stati, můžeme pokládati za jakýsi pokrok proti výkladu o témž předmětu, obsaženému v učebnici fysiky od téhož autora (a p. Müllera).

Do podrobnějšího rozboru úvah zde obsažených nemíní se ref. pouštěti, a zdržuje se soudu svého tím raději, an by ve většině případů nemohl vysloviti svůj souhlas s názory p. spisovatelovými a se způsobem výkladu jeho. Než důležitější jest potěšitelné faktum, že se o této důležité otázce začíná přemítati, a budiž proto úloha, o jejíž řešení se p. spisovatel v oznámené stati pokusil, totiž otázka nejvhodnějšího upravení učební látky z mechaniky a fysiky pro střední školy, co nejvřeleji doporučena všem odborníkům. Dr. *S.*

B. Recense knih.

Ed. Weyr: **O theorii forem bilinearných.** Spisů poctěných jubilejní cenou král. č. společnosti nauk č. II. V Praze 1889.

Ed. Weyr: **O binarných matricích.** Věstník král. č. společnosti nauk, r. 1887.

První z uvedených spisů opírá se o jistý druh operačního kalkulu, o t. zv. *theorii matric*, čili jak se nyní s upřílišněným purismem říká, *matic;* pojednání druhé vykládá theorii tu v případě nejjednodušším. Theorie matic vznikla v zemi, v níž se odedávna kalkul s operacemi zvláštní zálibě těší, byvši založena r. 1859 od *Cayleye* pojednáním ve sv. 148. Phil. Transact. obsaženým. U nás zanáší se theorií tou již delší dobu prof. Ed. Weyr; již roku 1884 vydal první, tuším, u věci té pojednání: O základní větě v theorii matric (Věstník král. č. spol. nauk), v níž dokazuje společně se zvěčnělým Krausem větu od Cayleye bez důkazu vyslovenou. Dalšími studiemi o předmětu tom, hlavně v Comptes rendus uveřejněnými, zjednal nového lesku jmenu svému, v kruzích mathematického světa co nejchvalněji známému.*)

Pro naši literaturu má z jednotlivých těchto prací zvláštní důležitost uvedené shora pojednání o binarných matricích. Naznačíme stručně obsah jeho, o němž dosud na tomto místě nebylo referováno.

---

*) Viz „Drobné zprávy“ *c)* v t. čísle. *Red.*

Binarná matrice

$$M = \begin{Bmatrix} a, & b \\ c, & d \end{Bmatrix},$$

jest operační symbol, skládající se ze čtyr realných neb komplexných veličin a, b, c, d, jehož applikování na dvě libovolné hodnoty x, y znamená odvození dvou nových hodnot ξ, η pomocí rovnic:

$$\xi = ax + by, \qquad \eta = cx + dy.$$

Operační kalkul, na tomto výměru založený, ukládá nám definovati operace tak, že si jejich provedením zjednáváme opět jakousi matici. Tak znamená součin dvou matic MM':

$$M = \begin{Bmatrix} a, & b \\ c, & d \end{Bmatrix}, \qquad M' = \begin{Bmatrix} a', & b' \\ c', & d' \end{Bmatrix}$$

novou matici M'', která applikována jsouc na dvě libovolné hodnoty x, y, podává tytéž hodnoty, jako když na x, y applikujeme nejdříve M' a na obdržené hodnoty M. Snadno nalezneme, že

$$M'' = \begin{Bmatrix} aa' + bc', & ab' + bd' \\ ca' + dc', & cb' + dd' \end{Bmatrix}$$

a zároveň, že dlužno rozeznávati součiny MM' a $M'M$, t. j. že multiplikace matic není obecně kommutativní. Podobně rozeznáváme dvojí podíl $\mathrm{A} : \mathrm{B} = \mathrm{C}$ neb C_1 dvou matic, dle toho, je-li

$$\mathrm{CB} = \mathrm{A}, \qquad \mathrm{C} = \mathrm{AB}^{-1}$$

neb

$$\mathrm{BC}_1 = \mathrm{A}, \qquad \mathrm{C}_1 = \mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}.$$

Zvláštní jednoduchostí vynikají skalarné matice neb skalary

$$\begin{Bmatrix} a, & 0 \\ 0, & a \end{Bmatrix},$$

s nimiž lze operovati *úplně* tak jako s obyčejnými veličinami, pročež se pro stručnost tak jako obyčejné veličiny označují, právě uvedený skalar na př. literou a.

Skalar

$$J = \begin{Bmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{Bmatrix}$$

slove jednotkovou maticí.

Nyní pochopíme význam jakékoli funkce $\varphi(M)$ nějaké matice, v níž se *zdánlivě* též obyčejné veličiny vyskytují. Tak značí na př.

$$M + 1 \text{ matici} \begin{Bmatrix} a+1, & b \\ c, & d+1 \end{Bmatrix}.$$

Podobně dlužno rozuměti výroku, že matice

$$M = \begin{Bmatrix} a, & b \\ c, & d \end{Bmatrix}$$

vyhovuje identicky rovnici:

$$M^2 - (a + d)M + (ad - bc) = 0,$$

neboli

$$\begin{vmatrix} a - M, & b \\ c, & d - M \end{vmatrix} = 0.$$

Pokládáme-li o poslední rovnici všechny litery za znaky obyčejných veličin (při čemž pro větší zřetelnost můžeme μ místo M psáti), slovou kořeny této rovnice

$$\mu = \mu_1 , \quad \mu = \mu_2 ,$$

kořeny matice M o elementech a, b, c, d. Jak *Sylvester* ukázal, lze pak každou celistvou neb lomenou funkci $\varphi(M)$ matice M vyjádřiti jakožto funkci linearnou téže matice:

$$\varphi(M) = \alpha M + \beta,$$

kdež jest:

$$\alpha = \frac{\varphi(\mu_1) - \varphi(\mu_2)}{\mu_1 - \mu_2}, \quad \beta = \frac{\mu_1 \varphi(\mu_2) - \mu_2 \varphi(\mu_1)}{\mu_1 - \mu_2}.$$

V případě $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ obdržíme

$$\varphi(M) = \varphi'(\mu) \,.\, M + \varphi(\mu) - \mu\varphi'(\mu).$$

Tuto elegantní poučku rozšířil autor na případ obecné funkce analytické tvaru

$$\varphi(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\nu z^\nu,$$

konvergující při $r < | z | < r'$; řada

$$\varphi(M) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\nu M^\nu$$

definuje určitou matici $\alpha M + \beta$, kdež α a β má svrchu uvedené hodnoty, předpokládajíc ovšem, že kořeny matice vyhovují nerovnostem

$$r < |\mu_1| < r', \quad r < |\mu_2| < r'.$$

Důkaz veden jest dvojím způsobem; způsob druhý opírá se o pojem *typického tvaru matice.* Tak slove tvar

$$Q^{-1}\begin{Bmatrix}\mu_1, & 0\\ 0, & \mu_2\end{Bmatrix}Q,$$

na nějž lze uvésti každou matici M, mající dva nestejné kořeny $\mu_1 \gtrless \mu_2$ (případ stejných kořenů se dále diskutuje). Q jest matice obsahující dvě libovolné hodnoty λ, λ', na př. ve tvaru

$$Q = \begin{Bmatrix}\lambda(\mu_1 - d), & \lambda b\\ \lambda' c, & \lambda'(\mu_2 - a)\end{Bmatrix}.$$

Svrchu uvedená rovnice druhého stupně, t. j. rovnice

$$(M - \mu_1)(M - \mu_2) = 0,$$

jest rovnicí nejnižšího stupně, které matice M vyhovuje, není-li skalarem, v kterémž případě pro ni platí rovnice prvního stupně:

$$M - \mu = 0.$$

Ukazuje se dále, jak lze určiti matice vyhovující oné rovnici, jichž počet jest ovšem nekonečně velký, a na základě toho odvozují se řešení algebraické rovnice $n$tého stupně o skalarných koefficientech

$$\varphi(M) = M^n + a_1 M^{n-1} + \ldots + a_n = 0.$$

Tak jsou na př. všechna řešení rovnice

$$M^2 - 1 = 0$$

mimo skalary ± 1 obsažena ve tvaru

$$M = \begin{Bmatrix} a, & b\\ \frac{1-a^2}{b}, & -a\end{Bmatrix}.$$

Matice tato značí periodickou substituci 2. řádu, a všeobecně matice vyhovující rovnici

$$M^n - 1 = 0$$

periodickou substituci $n$tého řádu, t. j. substituci, která jsouc $n$krát opakována, vede k původním hodnotám, tak že

$$x_n = x, \quad y_n = y,$$

značíme-li příponou k výsledek $k$té substituce.

Matice tvaru $\alpha M + \beta$ slovou komplanarné s maticí M; matice ty tvoří soustavu, z níž nevystoupíme, applikujeme-li na příslušné k ní matice jakékoli základní operace arithmetické.

Další §§. obsahují výklad periodičnosti exponencialné funkce matice a mnohoznačnosti logarithmu matice.

Konečně podává se důkaz, že lze, za jistých podmínek, každou matici vyjádřiti pomocí 4 jiných, jež můžeme pak pokládati za základní, t. j. že lze klásti:

$$M = \varrho_1 J_1 + \varrho_2 J_2 + \varrho_3 J_3 + \varrho_4 J_4,$$

kdež jsou $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4$ skalary, J_1, J_2, J_3, J_4 základní matice. Matici $\Sigma \varrho_k J_k$ můžeme pak pokládati za komplexní číslo složené z jednotek J_k pomocí obyčejných veličin ϱ_k. Takovýchto komplexních soustav jest nekonečné množství, a v každé soustavě jednou přijaté stále zůstáváme, konajíce s maticemi touto soustavou vyjádřenými libovolné arithmetické operace, při čemž zákony operační (zejmena multiplikační) budou jiné a jiné, dle toho, jaké základní jednotky J_k soustavu skládají.

Volíme-li na př.

$$J_1 = \begin{Bmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{Bmatrix} = 1, \quad J_2 = \begin{Bmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{Bmatrix} = i$$

$$J_3 = \begin{Bmatrix} 0, & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1}, & 0 \end{Bmatrix} = j, \quad J_4 = \begin{Bmatrix} \sqrt{-1}, & 0 \\ 0, & -\sqrt{-1} \end{Bmatrix} = k,$$

obdržíme jednotky $1, i, j, k$, již vyhovují zákonům multiplikace soustavy kvaternionů, t. j. matice pomocí oněch jednotek vyjádřené jsou identické s Hamiltonovými kvaterniony.

Jest tedy na př.

$$w + xi + yj + zk = \begin{Bmatrix} w + z\sqrt{-1}, & x + y\sqrt{-1} \\ -x + y\sqrt{-1}, & w - z\sqrt{-1} \end{Bmatrix}.$$

Jeví se tudíž kvaterniony jen co specialný případ specialného druhu matic, totiž matic binarných.

Z toho vysvitá důležitosť studia matic pro každého, kdo spatřuje v kvaternionech důležitou pomůcku pro studium problémů geometrických a kinetických, s tímto operačním kalkulem se zanáší.

Obtížnějším úkolům věnován jest spis o theorii forem bilinearných. V kap. I.: O počítání s maticemi, zavádí se pojem matice $n$tého řádu:

$$A = \| a^{hk} \|$$

jakožto operačního symbolu pro vytvoření soustavy n hodnot y_h ze soustavy n hodnot x_k pomocí rovnic

$$y_h = \sum_{k=1}^{k=n} a_{hk}\, x_k \quad (h = 1, 2, \ldots n),$$

což se stručně označuje symbolickou rovnicí

$$(y) = \mathrm{A}(x).$$

Následují pravidla o základních čtyrech výkonech arithmetických s maticemi.

Kap. II.: O skládání soustav a kap. III.: O nullitě matic co nejtěsněji spolu souvisí. Sylvester přisuzuje matici $\mathrm{A} = \| a_{hk} \|$ o nn elementech *nullitu* 0, jest-li její determinant $\varDelta$, t. j. determinant z její elementů vytvořený jest různý od nully; jest-li $\varDelta$ nullou, avšak jest-li alespoň jeden minor $(n-1)$ho stupně různý od nully, přisuzuje matici A nullitu 1; všeobecně pak nullitu ν, jest-li vymizí všecky minory stupně $n - \nu + 1$, a jest-li alespoň jeden minor stupně $n - \nu$ jest různý od nully. Nullita n značí tudíž vymizení všech prvků a_{hk}; jen v případě tom jest

$$\mathrm{A} = 0.$$

Nyní porozumíme následující důležité větě:

Dáno-li n linearných stejnorodých rovnic o n neznámých

$$a_{h1}x_1 + a_{h2}x_2 + \ldots + a_{hn}x_n = 0 \quad (h = 1, 2 \ldots n)$$

a má-li matice utvořená z koefficientů těchto rovnic nullitu ν, lze vyhověti daným rovnicím ν linearně neodvislými soustavami (x); a naopak, vyhovíme-li rovnicím ν linearně neodvislými soustavami hodnot (x), má matice $\| a_{hk} \|$ nullitu $\gtreqless \nu$. Každé řešení daných rovnic jest složeno z kterýchkoli ν neodvislých řešení.

Tato poučka, obsahující in nuce theorii linearných rovnic o několik neznámých, ukazuje, jakou důležitosť má v algebře vyšetření nullity matic; vyšetřením tím zanáší se zbytek kap. III., pak kap. IV. a V. jednající o kořenech matice a jich charakteristických číslech, a o základní rovnici matice.

Zejmena budiž poukázáno k důležité větě, týkající se nullity součinu $\mathrm{P} = \mathrm{A}M$ dvou matic, jejíž *přesný důkaz* tu podán. Jsou-li α a μ nullity obou faktorů A a M, platí pro nullitu ϖ součinu relace:

$$\varpi \leqq \mu + \alpha, \quad \varpi \geqq \alpha, \quad \varpi \geqq \mu.$$

Důkaz osnován jest na úvahách o soustavách n veličin, a této *zcela původní* pomůcky užívá autor hojně i na dále, zejmena razí sobě zavedením t. zv. *normalných soustav* dráhu k problému tak obtížnému, jaký řešen v kap. XI.

Není snadno, v stručnosti vyložiti myšlenkový chod k řešení tomu vedoucí; jen některé základní pojmy buďte zde uvedeny.

Dána-li matice $M = \| a_{hk} \|$, nazýváme rovnici $n$tého stupně dle *skalaru* μ

$$f(\mu) = \begin{vmatrix} a_{11}-\mu, & a_{12}, & \dots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}-\mu, & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}, & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\mu \end{vmatrix} = 0$$

charakteristickou rovnicí, a její kořeny

$$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$$

charakteristickými kořeny téže matice M. Ukazuje se však, že oné rovnici jest též vyhověno, klademe-li matici M místo skalaru μ; obdržíme tak Cayleyovu rovnici $n$tého stupně

$$f(M) = 0,$$

které vyhovuje daná matice. Jest tato rovnice rovnicí *nejnižšího stupně*, které M vyhovuje? By na tuto otázku odpověděl, resp. příslušnou rovnici vyhledal, vyšetřuje prof. Weyr blíže nullitu různých mocností matice M, a přichází k následující *nové a důležité poučce* (str. 34.):

Je-li M matice o α-násobném nullovém kořenu a o nullitě α_1, tu

1) v případě $\alpha_1 = \alpha$ jsou všecky kladné mocnosti M^k nullity α;

2) v případě $\alpha_1 < \alpha$ má M^2 nullitu $\alpha_1 + \alpha_2$, kde $\alpha_1 \geqq \alpha_2 > 0$ a $\alpha_2 \leqq \alpha - \alpha_1$; je-li $\alpha_2 = \alpha - \alpha_1$, t. j. je-li M^2 nullity α, jsou všecky další mocnosti $M^k (k > 2)$ též nullity α; je-li však

3) $\alpha_2 < \alpha - \alpha_1$, jest M^3 nullity $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \leqq \alpha$, atd.

Konečně dojdeme k mocnosti M^ϱ takové, že jest nullita její

$$\alpha_1 + \alpha_2 \dots + \alpha_\varrho = \alpha$$

a totéž platí pak pro každou vyšší mocnosť

$$M^k (k > \varrho).$$

Co o matici M, má-li α-násobný kořen 0, platí o matici $M - \mu_\alpha$, má-li M α-násobný kořen μ_α. Čísla $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\varrho$ nazývá v případě tom autor *charakteristickými čísly* kořene μ_α.

Budiž nyní dána matice M o nn elementech a buďtež μ_α, $\mu_\beta \dots \mu_\lambda$ její kořeny, resp. α-násobný, β-násobný, ... a λ-násobný, takže platí

$$\alpha + \beta + \ldots + \lambda = n.$$

Buďtež dále α_ϱ, β_σ, ..., λ_τ vždy poslední z charakteristických čísel, příslušných jednotlivým kořenům; pak mají matice

$$\begin{array}{lcccc} & (M-\mu_\alpha)^\varrho, & (M-\mu_\beta)^\sigma, & \ldots & (M-\mu_\lambda)^\tau \\ \text{nullity} & \alpha, & \beta, & \ldots & \lambda. \end{array}$$

Nullita součinu jejich obnáší n, dle poučky, že součin úkonů algebraicky nesoudělných má nullitu rovnající se součtu nullit jednotlivých faktorů. Matice o nullitě n rovná se identicky nulle, platí tudíž rovnice

$$(M-\mu_\alpha)^\varrho (M-\mu_\beta)^\sigma \ldots (M-\mu_\lambda)^\tau = 0,$$

a toť rovnice nejnižšího stupně

$$\varrho + \sigma + \ldots + \tau \lesseqgtr n,$$

které vyhovuje daná matice M; rovnici tu zove autor *základní rovnicí* matice M.

Kap. VI. jedná o normalných soustavách příslušných dané matici. Buď M matice o α-násobném kořenu 0 a buďte α_1, α_2, ... α_ϱ, charakteristická čísla téhož kořene, tak že

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\varrho.$$

Rovnosti

$$M^\varrho(x) = (0)$$

lze pak vyhověti α neodvislými soustavami hodnot (x'), (x'') ... $x^{(\alpha)}$, jež, byvše vybrány zvláštním způsobem, slovou *normalnými soustavami* příslušnými matici M. Pojem ten modifikuje se pak přiměřeně, by se hodil pro libovolnou matici M, k níž příslušné normalné soustavy se pak blíže stanoví.

Kap. VII. věnována jest *maticím podobným*; tak nazývají se matice M a M', kdykoli lze určiti matici Q takovou, aby bylo

$$M' = Q^{-1} MQ.$$

Dvě podobné matice mají tytéž kořeny o týchže charakteristických číslech, vyhovují téže základní rovnici atd. A naopak, dvě matice M a M', mající tytéž kořeny o týchž charakteristických číslech jsou si podobny. To nás vede k úloze, stanoviti všechny matice o daných kořenech a charakteristických číslech, s kterouž úlohou se zanáší kapitola VIII. Shledává se, že mezi nimi lze nalézti vždy jednu matici M_0 tvaru zvlášť jednoduchého a význačného, takže ostatní z ní určíme rovnicí

$$N = Q^{-1} M_0 Q$$

Při samých nestejných kořenech $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$ na př. jest

$$M_0 = \begin{Vmatrix} \mu_1, 0, \ldots 0 \\ 0, \mu_2, \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ 0, 0 \ldots \mu_n \end{Vmatrix}$$

Takovou matici nazývá autor *typickou.*

S těmito úvahami souvisí způsobem patrným problém řešení rovnic o skalarných koefficientech, jemuž věnována kap. IX.; autor podává a řeší několik zajímavých příkladů, z nichž zejmena do popředí vstupuje řešení jednoduché rovnice

$$M^k = 1$$

vedouc k důležitému pojmu periodických matic (v. co shora o binarných maticích bylo uvedeno).

Jiný problem klade a řeší kap. X.: Stanovení všech matic záměnných s danou maticí. Záměnnými s maticí M jsou všechny matice Q, vyhovující podmínce:

$$MQ = QM.$$

Řešení tohoto problému dáno jest v nejdůležitějším případě větou: Je-li M matice o samých jednoduchých kořenech, jsou jediné celistvé funkce matice M záměnné s M. Nalezené Q se nám jeví jakožto celistvá fnnkce stupně $n-1$; avšak celistvou funkci libovolného stupně lze pomocí základní rovnice matice M patrně redukovati na funkci, jejíž stupeň nepřesahuje číslo $n-1$.

V případě uvažovaném existuje zrovna n linearně neodvislých matic záměnných s M.

V kap. XI. přikročuje prof. Weyr k řešení obtížného problému současné transformace dvou bilinearných forem. Bilinearná forma $2\,n$ neurčitých veličin $x_1, \ldots x_n, \ldots y_1, \ldots y_n$:

$$F = \sum_{(h,k)} a_{hk} x_h y_k \quad (h, k = 1, 2, \ldots n)$$

obsahuje nn koefficientů a_{hk}; matice A z nich vytvořená slove maticí bilinearné formy F. Proměníme-li ji pomocí linearných substitucí

$$(x) = C(x'), \quad (y) = D(y')$$

na novou formu veličin (x'), (y');

$$F = \sum_{(h,k)} a'_{hk} x'_h y'_k$$

nazýváme tuto novou formu formě původní *aequivalentní.* Mezi její maticí

$$A' = \| a'_{hk} \|$$

a maticí A původní formy platí vztah

$$A' = \bar{C}AD$$

kde značí $\bar{C}$ matici *konjugovanou* neb *transponovanou* vzhledem ku matici C, tak že jest

$$\bar{C} = \| c'_{hk} \|, \text{ je-li } C = \| c_{hk} \|$$

při čemž platí

$$c'_{hk} = c_{kh}.$$

Naopak: matice A a A′ patří ku dvěma aequivalentním formám, platí-li mezi nimi vztah

$$A' = HAK,$$

kdež jsou determinanty matic H a K od nully rozdílné. Druhá forma vychází tu z prvé na základě linearných substitucí:

$$(x) = \bar{H}(x') \quad (y) = K(y').$$

Autor řeší nyní na základě vymožeností v dřívějších kap. obsažených jediným téměř škrtnutím péra problém, jehož řešení se byl *Weierstrass* (v pojednání „Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen“ r. 1868) pomocí hlubokých analytických úvah dodělal. Jde o to, vyšetřiti, za jakých podmínek jsou dva páry bilinearných forem (vzhledem k témže nám z prvu ovšem neznámým substitucím) aequivalentní, tj. v mluvě theorie matic, má se vzhledem k dvěma párům matic P,Q a P′,Q′ rozhodnouti, lze-li stanoviti dvě takové matice H a K o determinantech různých od nully, aby platily rovnice

$$P' = HPK, \quad Q' = HQK$$

a v případě, že lze, mají se vyčísliti všechny matice hovící těmto rovnicím. Prof. Weyr shledává:

Nutná a postačující výminka, v případě $|P| \gtrless 0$, aby formy o maticích P,Q byly aequivalentní s formami o maticích P′ Q′, jest, aby matice QP^{-1} a $Q'P'^{-1}$ byly podobné t. j. měly stejné kořeny o týchž číslech charakteristických. Kap. VI. a VII. poskytuje pak pomůcky k určení na př. matic H, načež obdržíme též

$$K = P^{-1} H^{-1} P'.$$

Substituce zaměňující formy (P) (Q) ve formy (P') (Q') jsou

$$(x) = \bar{\bar{H}}(x'), \quad (y) = K(y').$$

Výminečný případ

$$|P| = 0, \ |P'| = 0, \ |Q| = 0, \ |Q'| = 0$$

doznává též svého řešení.

Nechceme-li překročiti meze svého referatu, musíme mlčením pominouti další zajímavá upotřebení theorie matic v oboru vyšší algebry, jež autor podává. Budiž jen krátce uvedeno, že jest kap. XII. věnována *skalarným funkcím matic*; zde se mezi jiným dokazuje platnosť vzorku

$$\sum_{\nu = \infty}^{+\infty} \alpha_\nu M^\nu = \bar{\alpha}_1 M^{m-1} + \bar{\alpha}_2 M^{m-2} + \ldots + \bar{\alpha}_m,$$

je-li jistým podmínkám vyhověno, při čemž značí m stupeň základní rovnice matice M (srv. obdobný výsledek vzhledem k binarným maticím na str. 320.) Poslední kap. podává upotřebení theorie matic (zejmena úvah o typickém tvaru jejich) v theorii linearných differencialných rovnic.

Ref. zúmyslna se obmezil na prosté naznačení obsahu oznámeného spisu, věda, že zde jako všude, kde při složení vědeckého díla bystrosť ducha ku klopotné píli se pojí, u výsledku „dílo samo mistra chválí“.

Ke konci nemůže však ref. potlačiti přání, jež při čtení oznámeného spisu několikrát se přihlásilo. Kdo nestojí na samých výších algebry, mnohdy bude při studiu téhož spisu ohlížeti se po pomůcce — a bude nucen sáhnouti ku spisům cizojazyčným. Toho by tuším nebylo, kdyby již dokončeno bylo dílo, jehož první díl vyšel r. 1883, a jež se stane zajisté pevným a trvanlivým základem pro podobné studie monografické v naší chudé literatuře: míníme spis: Základové vyšší algebry od *Ed. Weyra* a *V. Řehořovského.* Doufejme, že podmínky vědecké produkce se u nás zlepšily alespoň tou měrou, by vydání podobných spisů nebylo zdržováno tím, že ukládá autorům osobní oběti mnohdy nedostižné.

σα.