Arnošt Dittrich

Náhrada astronomických tabulek babylonských trigonometrickými vzorci

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 63 (1934), No. 4, 82--96

ČÁST FYSIKÁLNÍ

Náhrada astronomických tabulek babylonských trigonometrickými vzorci.

Dr. *Arnošt Dittrich*, Stará Ďala.

(Došlo 28. června 1933.)

V pojednání „Matematické prostředky babylonských astronomů", jež uveřejněno v tomto časopise roč. 63, str. 17, r. 1933, podán v resumé stručný návod, jak normální oscilující kolonu babylonskou lze stáhnouti v jediný trigonometrický vzorec.

Předvedu tento převod na koloně G z tabulky pro nové světlo, Nr. 272, 81—7—6.[1]) Kolona G následuje bezprostředně za sloupcem F, jejž jsme zpracovali jako příklad v uvedeném pojednání. Převodem těchto kolon razíme si cestu k babylonské teorii Luny.

Východiskem je kolona G v tabulce 1. Poloha ideálního maxima M naznačena tenkou dvojitou čarou, ideální minimum m označeno jedinou čarou, tenkou. Podle návodu v resumé na str. 29, roč. 63 tohoto časopisu obdržíme:

$$\begin{aligned} M &= 4^z\ 29^0\ 27'\ 05'' = 4{,}490856\dot{4}8\dot{1}^z \\ m &= 1^z\ 52^0\ 34'\ 35'' = 1{,}876373\dot{1}4\dot{8}^z \\ \tfrac{1}{2}(M+m) &= 3^z\ 11^0\ 00'\ 50'' = 3{,}183564\dot{8}\dot{1}^z = \mu \\ \tfrac{1}{2}(M-m) &= 1^z\ 18^0\ 26'\ 15'' \doteq 1{,}307291\dot{6}^z = A \end{aligned}$$

Nastane-li změna o diferenci tabulkovou

$$d = 22^0\ 30' = 0{,}375\dot{0}^z$$

za čas τ, je perioda tabulky p dána relací

$$\frac{p}{\tau} = \frac{4A}{d} = \frac{251}{18} = 13{,}9\dot{4}.$$

Numerická hodnota ve sloupci G v n-tém řádku zní opravena

$$G^*_n = \mu + A \cos \frac{360}{p}(n\tau - \gamma).$$

Všechny konstanty tohoto vzorce jsou známé až na γ. To se určí z relace

---

[1]) **Kugler:** Die babylonische Mondrechnung, 12, 1900.

Tab. 1.

Z tab. pro nové světlo Luny*) č. 272, 81—7—6.

No.	*G*				*g*	*g**	*g* — *g**
0.					z	z	z
1.	3	59	52	30	3,99792	4,26797	— 0,27005
2.	4	22	22	30	4,37292	4,47775	— 0,10483
3.	4	14	1	40	4,23380	4,42899	— 0,19519
4.	3	51	31	40	3,85880	4,13162	— 0,27282
5.	3	29	1	40	3,48380	3,64501	— 0,16121
6.	3	6	31	40	3,10880	3,06628	0,04252
7.	2	44	1	40	2,73380	2,51096	0,22284
8.	2	21	31	40	2,35880	2,08991	0,26889
9.	1	59	1	40	1,98380	1,88717	0,09663
10.	2	8	37	30	2,14375	1,94321	0,20054
11.	2	31	7	30	2,51875	2,24685	0,27190
12.	2	53	37	30	2,89375	2,73747	0,15628
13.	3	16	7	30	3,26875	3,31714	— 0,04839
14.	3	38	37	30	3,64375	3,87014	— 0,22639
15.	4	1	7	30	4,01875	4,28610	— 0,26735
16.	4	23	37	30	4,39375	4,48197	— 0,08822
17.	4	12	46	40	4,21296	4,41865	— 0,20569
18.	3	50	16	40	3,83796	4,10879	— 0,27083
19.	3	27	46	40	3,46296	3,61425	— 0,15129
20.	3	5	16	40	3,08796	3,03373	0,05423
21.	2	42	46	40	2,71296	2,48311	0,22985
22.	2	20	16	40	2,33796	2,07232	0,26564
23.	1	57	46	40	1,96296	1,88336	0,07960
24.	2	9	52	30	2,16458	1,95394	0,21064
25.	2	32	22	30	2,53958	2,26997	0,26961
26.	2	54	52	30	2,91458	2,76837	0,14621
27.	3	17	22	30	3,28958	3,34965	— 0,06007
28.	3	39	52	30	3,66458	3,89778	— 0,23320
29.	4	2	22	30	4,03958	4,30334	— 0,26376
30.	4	24	52	30	4,41458	4,48537	— 0,07079
31.	4	11	31	40	4,19213	4,40754	— 0,21541
32.	3	49	1	40	3,81713	4,08539	— 0,26826
33.	3	26	31	40	3,44213	3,58322	— 0,14109
34.	3	4	1	40	3,06713	3,00127	0,06586
35.	2	41	31	40	2,69213	2,45570	0,23643
36.	2	19	1	40	2,31713	2,05544	0,26169
37.	1	56	31	40	1,94213	1,88036	0,06177
38.	2	11	7	30	2,18542	1,96543	0,21999
39.	2	33	37	30	2,56042	2,29366	0,26676

$$n\frac{\tau}{p} - \frac{\gamma}{p} = \pm\left(\frac{1}{4} - \frac{y_n}{4A}\right) + k,$$

kde k je celistvé číslo,

*) Kugler: Mondrechnung. 12, 13. První dva sloupce. — Další jsou počítány od nás.

$$y_n = G_n - \mu.$$

Závorka dostane znamení minus, pokud serie y_n stoupá, plus, když klesá. Počítáme-li pak pro kterékoliv z 39 přípustných n, dostaneme vždy totéž nejmenší kladné číslo

$$\gamma = 0{,}165980\ .\ p.$$

Trigonometrická náhrada kolony G zní tedy:

$$G^*_n = 3{,}1835648\dot{1}^z + 1{,}307291\dot{6}^z \cos 360\,(n\,.\,0{,}07171314 - 0{,}165980) \tag{0}$$

K počítání hodnoty γ pořídili jsme si sloupec hodnot y_n. Můžeme je hned použít k stanovení korigované hodnoty

$$y^*_n = A\ .\ \sin y_n/4A.$$

V třetím sloupci tab. 1 nalezneme

$$g^* = \mu + y^*.$$

ve 4. sloupci rozdíl $g - g^*$, jenž udává chybu, jíž se Babyloňané dopouštěli pro nedokonalost jimi užívané interpolace. Činí nanejvýš $0{,}27^z$, což odpovídá asi 1 hod., jak v dalším odstavci uvidíme.

Dosud nebylo třeba, abychom se o smyslu kolony G vyslovili. Jen jsme předpokládali, že čísla jsou psána šedesátičně. Vyjmuli jsme však první čísla, protože nepřestupují číslo 4. Epping postřehl, že se tu celek nedělí šedesátičně, ale jen na 6 dílů. Označil tento dílek písmenou „z", kterou i my jsme převzali. Sloupec G je pomocný k počítání časových intervalů mezi sousedními novy. Proto je celkem, jenž se dělí na 6 dílů, den, takže $1^z = 4^h$, $1^0 = 4^m$, $1' = 4^s$, $1'' = 4^t$ naší obvyklé časomíry.

Epping a Lorentz[2]) objasnili společně smysl sloupců F i G. Také G porozumíme prostřednictvím střední hodnoty μ. Proměníme-li

$$\mu = 3{,}18356481^z$$

ve zlomek dne

$$\mu = 0{,}5\dot{3}0594136^d,$$

poznáme v něm zlomek středního synodického oběhu Luny

$$T_S = 29{,}530594136^d.$$

Je to přesně hodnota Hipparchova, jak nám ji zachoval Almagest.

Sloupec G potlačuje důsledně 29 dnů, což zabezpečuje i pozdější sloupec L. — Sloupec G určuje tedy za sebou jdoucí délky synodických měsíců, které oscilují . . . následkem čeho? — O tom nás poučí perioda oscilace. Je tatáž jako v koloně F, je to anomalistický měsíc. Skutečný synodický měsíc kolísá však nejen pro

---

[2]) Kugler: Mondrechnung, 11.

anomalii Luny, ale i pro anomalii slunce. Kolísání s periodou anomalistického měsíce T_a poukazuje na to, že v prvém přiblížení se pokládá pohyb slunce za rovnoměrný.

Budiž t_n čas, kdy n-tý nov naší tabulky nastane, pak jest

$$t_n = 29n + \sum_1^n {}_k\, g^*_k.$$

Na př.

$$t_1 = 29 + g^*_1,$$

kterým novem tabulka začíná. Narazili jsme tu na složitější případ, kdy teprve diference veličiny t_n tvoří řadu g^*_n babylonským způsobem oscilující.

Položme obecně zase

$$g^*_k = \mu + A \cos 2\pi/p\,(k\tau - \gamma)$$

a hledejme součet

$$\sum_1^n {}_k\, g^*_k = n\mu + A \sum_1^n {}_k \cos\frac{2\pi}{p}\,(k\tau - \gamma).$$

Třeba tedy pomocí trigonometrických vzorců sečísti

$$\sum_1^n {}_k \cos\frac{2\pi}{p}\,(k\tau - \gamma) = \sum_1^n {}_k \cos\,(ka - b),$$

kde

$$a = 2\pi\tau/p, \quad b = 2\pi\gamma/p.$$

Protože

$$\cos\,(ka - b) = \cos ka\, \cos b + \sin ka \sin b,$$

je

$$\sum_1^n {}_k \cos\,(ka - b) = C \cos b + S \sin b,$$

kde

$$C = \sum_1^n {}_k \cos ka, \quad S = \sum_1^n {}_k \sin ka.$$

Suma C je dobře známa z teorie Fourierových řad. Položme proto $a = 2y$ a stanovme

$$C = \sum_1^n {}_k \cos 2ky, \quad S = \sum_1^n {}_k \sin 2ky.$$

Násobíme $2 \sin y$:

$$2 \sin y\, C = \sum_1^n {}_k\, 2 \sin y \cos 2ky, \quad 2 \sin y\, S = \sum_1^n {}_k\, 2 \sin y \sin 2ky.$$

Součiny trigonometrických funkcí rozvedeme v rozdíly pomocí vzorců

$$2 \sin y \cos 2ky = \sin (2k + 1) y - \sin (2k - 1) y,$$
$$2 \sin y \sin 2ky = \cos (2k - 1) y - \cos (2k + 1) y,$$

takže

$$2 \sin y\, C = \sum_1^n{}_k \sin (2k + 1) y - \sum_1^n{}_k \sin (2k - 1) y,$$

$$2 \sin y\, S = \sum_1^n{}_k \cos (2k - 1) y - \sum_1^n{}_k \cos (2k + 1) y.$$

Rozepíšeme-li součty v rovnici pro C, jest

$$2 \sin y\, C =$$
$$= \sin 3y + \sin 5y + \ldots + \sin (2n - 1) y + \sin (2n + 1) y$$
$$- \sin y - \sin 3y - \sin 5y - \ldots - \sin (2n - 1) y.$$

Po sloučení zbude

$$2 \sin y\, C = \sin (2n + 1) y - \sin y.$$

Obdobně rozpíšeme sumy pro S a dostaneme

$$2 \sin y\, S = \cos y + \cos 3y + \ldots + \cos (2n - 1) y$$
$$- \cos 3y - \ldots - \cos (2n - 1) y - \cos (2n + 1) y,$$

takže po sloučení zbude

$$2 \sin y\, C = \cos y - \cos (2n + 1) y.$$

Dosadíme $a = 2y$ a dostaneme

$$C = \frac{\sin (2n + 1) \frac{1}{2}a - \sin \frac{1}{2}a}{2 \sin \frac{1}{2}a},$$

$$S = \frac{\cos \frac{1}{2}a - \cos (2n + 1) \frac{1}{2}a}{2 \sin \frac{1}{2}a}.$$

Vyvineme

$$C \cos b + S \sin b = \frac{- \sin (\frac{1}{2}a - b) + \sin [(2n + 1) \frac{1}{2}a - b]}{2 \sin \frac{1}{2}a}.$$

Je tedy

$$\sum_1^n{}_k \cos \frac{2\pi}{p} (k\tau - \gamma) = \frac{1}{2 \sin \pi\tau/p} \left\{ \sin \left[(2n + 1) \frac{\pi\tau}{p} - \frac{2\pi\gamma}{p} \right] - \right.$$
$$\left. - \sin \left(\frac{\pi\tau}{p} - \frac{2\pi\gamma}{p} \right) \right\},$$

takže

$$\sum_1^n{}_k g^*_k = n\mu + \frac{A}{2 \sin \pi\tau/p} \left[\sin \frac{2\pi}{p} \left(\frac{2n + 1}{2} \tau - \gamma \right) - \right.$$
$$\left. - \sin \frac{2\pi}{p} \left(\frac{\tau}{2} - \gamma \right) \right],$$

Tab. 2.

Z tab. pro nové světlo Luny*) č. 272, 81—7—6.

No.	*H*	*h*	*J*	*i*	*i**	*i* — *i**
		°		°	°	°
0.				+ 13,017	12,241	+ 0,776
1.	— 20 20	— 20,3̇	7 19 lal	— 7,317	— 5,013	— 2,304
2.	— 14 52 30	— 14,875	22 11 30 lal	— 22,192	— 19,984	— 2,208
3.	— 8 5	— 8,083	30 16 30 lal	— 30,275	— 29,907	— 0,368
4.	— 1 17 30	— 1,292	31 34 lal	— 31,56̇	— 32,276	+ 0,709
5.	+ 5 30	+ 5,5	27 52 lal	— 27,86̇	— 26,494	— 1,373
6.	+ 12 17 30	+ 12,292	15 34 30 lal	— 15,575	— 14,019	— 1,556
7.	+ 19 5	+ 19,083	3 30 30 tab	+ 3,508	1,996	+ 1,512
8.	+ 16 7 30	+ 16,125	19 38 tab	+ 19,63̇	17,507	+ 2,126
9.	+ 9 20	+ 9,3̇	28 58 tab	+ 28,96̇	28,597	+ 0,370
10.	+ 2 22 30	+ 2,375	31 30 30 tab	+ 31,508	32,463	— 0,955
11.	— 4 15	— 4,250	29 10 30 tab	+ 29,175	28,130	+ 1,045
12.	— 11 2 30	— 11,042	18 8 tab	+ 18,13̇	16,692	+ 1,441
13.	— 17 50	— 17,83̇	0 18 tab	+ 0,30̇	1,038	— 0,738
14.	— 17 22 30	— 17,375	17 4 30 lal	— 17,075	— 14,878	— 2,197
15.	— 10 35	— 10,583	27 39 30 lal	— 27,658	— 27,037	— 0,621
16.	— 3 47 30	— 3,792	31 27 lal	— 31,450	— 32,366	+ 0,916
17.	+ 3	+ 3.	30 29 lal	— 30,483	— 29,521	— 0,962
18.	+ 9 47 30	+ 9,792	20 41 30 lal	— 20,692	— 19,219	— 1,473
19.	+ 16 35	+ 16,583	4 6 30 lal	— 4,108	— 4,063	— 0,045
20.	+ 18 37 30	+ 18,625	14 31 tab	+ 14,517	12,119	+ 2,398
21.	+ 11 50	+ 11,83̇	26 21 tab	+ 26,350	25,240	+ 1,110
22.	+ 5 2 30	+ 5,042	31 23 30 tab	+ 31,392	31,986	— 0,594
23.	— 1 45	— 1,750	31 47 30 tab	+ 31,792	30,653	+ 1,139
24.	— 8 32 30	— 8,542	23 15 tab	+ 23,250	21,578	+ 1,672
25.	— 15 20	— 15,3̇	7 35 tab	+ 7,583	7,053	+ 0,530
26.	— 19 52 30	— 19,875	11 57 30 lal	— 11,958	— 9,254	— 2,704
27.	— 13 5	— 13,083	25 2 30 lal	— 25,042	— 23,223	— 1,819
28.	— 6 17 30	— 6,292	31 20 lal	— 31,3̇	— 31,327	— 0,006
29.	— 0 30	— 0,50̇	31 50 lal	— 31,83̇	— 31,518	— 0,315
30.	+ 7 17 30	+ 7,292	25 48 30 lal	— 25,808	— 23,749	— 2,059
31.	+ 14 5	+ 14,083	11 43 30 lal	— 11,725	— 9,981	— 1,744
32.	+ 20 52 30	+ 20,875	9 9 tab	+ 9,150	6,308	+ 2,842
33.	+ 14 20	+ 14,3̇	23 29 tab	+ 23,483	21,004	+ 2,479
34.	+ 7 32 30	+ 7,542	31 1 30 tab	+ 31,025	30,394	+ 0,631
35.	+ 0 45	+ 0,750	31 46 30 tab	+ 31,775	32,108	— 0,333
36.	— 6 2 30	— 6,042	27 7 tab	+ 27,117	25,712	+ 1,405
37.	— 12 50	— 12,83̇	14 17 tab	+ 14,283	12,822	+ 1,461
38.	— 19 37 30	— 19,625	5 20 30 lal	— 5,342	— 3,307	— 2,035
39.	— 15 35	— 15,583	20 55 30 lal	— 20,925	— 18,600	— 2,325

*) Kugler: Mondrechnung. 12, 13.

když

$$g^*_k = \mu + A \cos \frac{2\pi}{p} (k\tau - \gamma).$$

Součtový vzorec lze častěji použíti v babylonských tabulkách. Na př. v tabulce, z níž bereme numerický materiál, bezprostředně za kolonou F a sousední G následují dvě další H, J. Kolona H obsahuje diference za sebou jdoucích hodnot J. Kolona H jeví normální babylonskou oscilaci, kolona J obsahuje serii součtů veličiny H. Proto lze na ně aplikovati poslední dva naše vzorce. Třeba arci nejdříve určiti konstanty kolony H.

Nastane malá komplikace znaménky. V koloně J nalezneme za každým číslem babylonská slova lal po příp. tab. Lal dává předchozímu číslu znamení záporné, tab udílí znamení $+$. Čísla kolony J jsou tedy opatřena znaménky. Má-li se relace

$$J_{n+1} = J_n + H_{n+1} \tag{1}$$

zachovat, musíme také H_n opatřit znaménky. Provedli jsme to v tabulce 2. Nyní jsou H prostě diference za sebou jdoucích hodnot J. Výjimka je jen tam, kde je čára jednoduchá (negativní minimum) neb dvojitá (positivní maximum). Je zcela logické, že H dostalo znaménka. Přejímá funkci diference d, jež také po serii kladných hodnot přejde v záporné a naopak. Vrátíme se k věci, až budeme zkoumat sloupec J.

Soustavné zpracování sloupce H vede ke konstantám jeho:

$$\begin{aligned} d &= 6^0\ 47'\ 30'' = 6{,}791\dot{6}^0 \\ M &= +\ 21^0 \\ m &= -\ 21^0 \\ \mu &= 0 \\ A &= 21^0 \end{aligned}$$

Perioda oscilace $p = t_a$ je anomalistický rok, tabulkový interval časový $\tau = T_S$ je synodický měsíc. Je pak

$$p/\tau = 84/6{,}791\dot{6} = 2016/163 = t_a/T_S.$$

To je babylonský (ne zcela správný) poměr mezi rokem anomalistickým t_a a střední lunací T_S.[3])

Je tedy

$$H_n = A \cos \frac{2\pi}{t_a} (nT_S - \gamma)$$

a numericky

$$H_n = 21^0 \cos 2\pi \left(\frac{163}{2016}\, n - \frac{\gamma}{t_a}\right).$$

[3]) Kugler: Mondrechnung, 26. Anomalistický rok babylonský je o 32^m kratší než naše dnešní hodnota.

Protože $\mu = 0$, jest

$$y_n = H_n,$$

takže

$$n\frac{T_S}{t_a} - \frac{\gamma}{t_a} = \pm\left(\frac{1}{4} - \frac{H_n}{4A}\right) + k.$$

Když serie H_n stoupá, užije se před závorkou —, když klesá +. Propočítáním dostaneme

$$\gamma = 0{,}5887895\, t_a.$$

Numericky jest tedy

$$H_n = 21^0 \cos 2\pi\, (0{,}08085317n - 0{,}5887895).$$

Tak specialisuje se nám vzorec

$$H_n = A \cos 2\pi \left(n\frac{T_S}{t_a} - \frac{\gamma}{t_a}\right).$$

Babyloňané užívali však hodnot H_n jen k tomu, aby počítali — viz vzorec (1) —

$$J_n = J_0 + \sum_1^n {}_k H_k,$$

$$J_n = \\ = J_0 + \frac{A}{2\sin \pi T_S/t_a}\left[\sin\frac{2\pi}{t_a}\left(\frac{2n+1}{2}T_S - \gamma\right) - \sin\frac{2\pi}{t_a}\left(\frac{T_S}{2} - \gamma\right)\right].$$

Dosadíme konstanty:

$$A = 21^0,\quad T_S = 0{,}08085317\, t_a,\quad \gamma = 0{,}5887894\, t_a,\quad J_0 = 13^0\, 01'$$

a dostaneme numerický vzorec

$$J_n = 0{,}513776^0 + 41{,}78522^0 \sin\frac{2\pi}{t_a}\left(\frac{2n+1}{2}T_S - \gamma\right).$$

Nahradíme-li sinus kosinem ve vzorci, dostaneme

$$J_n = 0{,}513776^0 + 41{,}78522^0 \cos 2\pi\left(n\frac{T_S}{t_a} - \frac{\gamma}{t_a} - \frac{1}{4}\right). \tag{2}$$

To je ale normální kosinusový vzorec. Babyloňané byli tedy v omylu, když mínili, že užíváním normální babylonské řady jako řada diferencí získají. Zisk byl jen zdánlivý, od nedokonalosti jejich zpracování periodických zjevů.

Vzorec (2) je výsledkem počtu, když H pokládáme za diferenci po sobě jdoucích J. Ale čísla ve vzorci, ač správně počítána, neodpovídají skutečnosti. J je sluneční korekční člen, jejž musíme připojiti k ryze lunárnímu členu G, abychom dostali trvání lunace. Protože G užívá již správné střední lunace, nesmí na ni J již nic korigovat, tedy střední hodnota, kolem níž J kolísá, jest nulou, nikoliv $0{,}5138^0$. Ale také amplituda $41{,}785^0$ není k potřebě. Babyloňané počítají, jako by J kolísalo mezi

$$M = +\,32^0\ 28' \text{ a } m = -\,32^0\ 28',$$

takže

$$\mu = 0, \quad A = 32^0\ 28' = 32{,}4\dot{6}^0.$$

V normální řadě je d konstantní, střídavě kladné a záporné. V koloně J nahradí se d hodnotou H, opatřenou znaménkem. Jsou-li J_n, J_{n+1} členové obstupující ideální minimum, jest

$$2m = J_n + J_{n+1} - |\,H_{n+1}\,|.$$

Obstupují-li ideální maximum, je

$$2M = J_n + J_{n+1} + |\,H_{n+1}\,|.$$

Vyšetřili jsme si, že zavedení kolísavých diferencí $d = H_n$ je zbytečnou komplikací, užíváme-li trigonometrických vzorců. — Stačí, když J_n osciluje kolem $\mu = 0$ amplitudou $A = 32{,}4\dot{6}^0$ s periodou t_a, což vede ke vzorci

$$J_n = 32{,}4\dot{6}^0 \cos 2\pi \left(n\,\frac{T_S}{t_a} - \frac{\beta}{t_a}\right).$$

Srovnáme-li se vzorcem (2), vidíme, že μ změnilo se o $0{,}51^0$, A o $9{,}32^0$, při čemž zůstane

$$T_S = 0{,}08085317\,t_a,$$

$$\beta/t_a = \gamma/t_a + 0{,}25 = 0{,}8387894.$$

Z opatrnosti budeme veličinu tu přímo na tabulce kontrolovat. Upravme

$$J_n = 32{,}4\dot{6}^0 \cos\,(29{,}1071412^0\,n - 301{,}964184^0).$$

V tabulce 2. nalezneme v 3. koloně serii hodnot J. Počítati budeme s jejich decimálním vyjádřením „i“ v koloně sousední. Dostaneme pak 40 hodnot $\beta : t_a$. Na první pohled není tato konstanta příliš „konstantní“. Kdyby kolísání bylo od nahodilých chyb, musili bychom se spokojiti s jedinou decimálkou 0,8. Ale chyby jsou od nedokonalosti babylonské početní techniky. Proto se v nich musí obrážeti perioda tabulky. Tato čítá skoro 14 tabulkových intervalů, přesně $13{,}9\dot{4}$. Proto musí součty 14 za sebou následujících hodnot našich $\beta : t_a$ kolísati mnohem méně než tyto samy o sobě. Tak tomu skutečně jest. Vezmeme-li střed ze 27 součtů, dostaneme,

že $$14\beta/t_a = 11{,}2865\dot{3},$$

takže $$\beta = 0{,}8061809\ t_a.$$

Tedy i tato konstanta se musí změnit, takže se počítá podle vzorce

$$J_n = 32{,}4\dot{6}^0 \cos (29{,}1071412^0\, n - 290{,}225124^0). \qquad (3)$$

Pomocí jeho počítán sloupec i^*, jenž je 5. v tabulce 2. O chybách, jež Babyloňané dělali následkem nedokonalé interpolace, poučuje nás sloupec 6. označený $i - i^*$. Vidíme, že rozdíl ten dosahuje nanejvýše 2,7^0. Protože časový stupeň platí 4^m, jest chyba při sluneční korektuře 10,8^m. — To není tragické. Ještě Ptolemaiovy hodiny byly o 15^m nespolehlivé.[4])

Smysl další kolony K jest velmi jednoduchý. V n-tém řádku stojí

$$K_n = G_n + J_n.$$

Trigonometricky vyjádří se K vzorci (0) + (3), tak, že

$$K_n = 3{,}1835648\dot{1}^z + 1{,}307291\dot{6}^z \cos 360^0 (0{,}07171314 n - 0{,}165980) +$$
$$+ 32{,}4\dot{6}^0 \cos 360^0 (0{,}08085317\, n - 0{,}8061809).$$

Význam této kolony objasnili Epping a Lorenz.[5]) Objevili, že

$$29 + K_{n+1}$$

je interval mezi n-tým a $(n + 1)$-vým novem tabulky. Volíme-li den za jednotku času, jest[6])

$$29 + K_n = 29{,}530594136^d +$$
$$+ 0{,}2128819\dot{4}^d \cos 360\, (0{,}07171314\, n - 0{,}165980) +$$
$$+ 0{,}090\dot{1}8\dot{5}^d \quad \cos 360\, (0{,}08085317\, n - 0{,}8061809).$$

Abychom zase přehlédli vliv nedokonalé interpolace, založíme tab. 3 pro K. V první koloně jsou babylonské hodnoty.[7]) V druhé je k, předchozí hodnota přepočtená na zlomek dne. V třetí a čtvrté je g^* a i^* přepočteno z tab. 1 a tab. 2 také na zlomek dne. Sečtením obdržíme

$$k^*_n = i^*_n + g^*_n,$$

což tabulováno v sloupci 5. V šestém je rozdíl $k - k^*$, jenž nás poučuje o velikosti babylonské chyby následkem nedokonalé interpolace. Tato činí až $\pm$ 0,05^d, což je asi 5 čtvrthodin, tedy $\pm$ 1^h 15^m.

Epping a Lorenz objevili také význam kolony K. Slouží k zjištění dat novolunních v babylonském kalendáři. Tato data obsahuje sloupec L, první v tab. 4. Hodnoty K jsou diference

---

[4]) Schoch: Die säkulare Acceleration des Mondes und der Sonne, určuje z dotyku Spiky a srpu Luny, že vodní hodiny Timocharisovy šly o 42^m napřed. Astr. Abh. Sv. 8. No. 2. Str. B. 1. 1930.

[5]) Kugler: Mondrechnung, 11.

[6]) Ludendorff: Das Mondalter in den Inschriften der Maya, 8, 1931 praví, že pravý nov nikdy o víc než 0,59^d se nevzdaluje od středního. — Babyloňanům kolísá lunace kol střední hodnoty nejvýše o 0,30^d.

[7]) Kugler: Mondrechnung, 13.

Tab. 3.

Z tab. pro nové světlo Luny*) č. 272, 81—7—6.

No.	K	k	g*	i*	k*	k — k*
				d		
0.		d	d	0,03400	d	d
1.	3 52 33 30	0,64600	0,71133	— 0,01393	0,69740	— 0,05140
2.	4 0 11 0	0,66718	0,74629	— 0,05551	0,69078	— 0,02360
3.	3 43 45 10	0,62154	0,73817	— 0,08307	0,65510	— 0,03356
4.	3 19 57 40	0,55545	0,68860	— 0,08966	0,59894	— 0,04349
5.	3 1 9 40	0,50322	0,60750	— 0,07359	0,53391	— 0,03069
6.	2 50 57 10	0,47487	0,51105	— 0,03894	0,47211	+ 0,00276
7.	2 47 32 10	0,46538	0,41849	+ 0,00555	0,42404	+ 0,04134
8.	2 41 9 40	0,44767	0,34832	+ 0,04863	0,39695	+ 0,05072
9.	2 27 59 40	0,41110	0,31453	+ 0,07943	0,39396	+ 0,01714
10.	2 40 8 0	0,44482	0,32387	+ 0,09018	0,41405	+ 0,03077
11.	3 0 18 0	0,50083	0,37447	+ 0,07814	0,45261	+ 0,04822
12.	3 11 45 30	0,53266	0,45625	+ 0,04637	0,50262	+ 0,03004
13.	3 16 25 30	0,54562	0,55286	+ 0,00288	0,55574	— 0,01012
14.	3 21 33 0	0,55986	0,64502	— 0,04133	0,60369	— 0,04383
15.	3 33 28 0	0,59296	0,71435	— 0,07510	0,63925	— 0,04629
16.	3 52 10 30	0,64493	0,74699	— 0,08991	0,65708	— 0,01215
17.	3 42 17 40	0,61749	0,73644	— 0,08200	0,65444	— 0,03695
18.	3 29 35 10	0,58218	0,68480	— 0,05339	0,63141	— 0,04923
19.	3 23 40 10	0,56575	0,60237	— 0,01129	0,59108	— 0,02533
20.	3 19 47 40	0,55498	0,50562	+ 0,03366	0,53928	+ 0,01570
21.	3 9 7 40	0,52536	0,41385	+ 0,07011	0,48396	+ 0,04140
22.	2 51 40 10	0,47686	0,34539	+ 0,08885	0,43424	+ 0,04262
23.	2 29 34 10	0,41547	0,31389	+ 0,08515	0,39904	+ 0,01643
24.	2 33 7 30	0,42535	0,32566	+ 0,05994	0,38560	+ 0,03975
25.	2 40 17 30	0,44525	0,37838	+ 0,01959	0,39797	+ 0,04728
26.	2 42 55 0	0,45255	0,46140	— 0,02570	0,43570	+ 0,01685
27.	2 52 20 0	0,47870	0,55827	— 0,06451	0,49376	— 0,01506
28.	3 8 32 30	0,52373	0,64963	— 0,08702	0,56261	— 0,03888
29.	3 30 32 30	0,58484	0,71722	— 0,08755	0,62967	— 0,04483
30.	3 59 4 0	0,66407	0,74756	— 0,06597	0,68159	— 0,01752
31.	3 59 48 10	0,66612	0,73459	— 0,02773	0,70686	— 0,04074
32.	3 58 10 40	0,66161	0,68090	+ 0,01752	0,69842	— 0,03681
33.	3 50 0 40	0,63892	0,59720	+ 0,05834	0,65554	— 0,01662
34.	3 35 3 10	0,59737	0,50021	+ 0,08443	0,58464	+ 0,01273
35.	3 13 18 10	0,53695	0,40928	+ 0,08919	0,49847	+ 0,03848
36.	2 46 8 40	0,46151	0,34257	+ 0,07142	0,41399	+ 0,04752
37.	2 10 48 40	0,36336	0,31339	+ 0,03562	0,34901	+ 0,01435
38.	2 5 47 0	0,34940	0,32757	— 0,00919	0,31838	+ 0,03102
39.	2 12 42 0	0,36861	0,38228	— 0,05167	0,33061	+ 0,03800

*) Kugler: Mondrechnung. 12, 13.

za sebou jdoucích L, takže

$$L_n + K_{n+1} = L_{n+1}. \tag{4}$$

Zlomek dne při datu udává přesný nov, pokud jej Babyloňané dovedli stanovit. Den začíná půlnocí, jako u nás.[8])

Pomocí relace (4) lze určiti,[9]) zda měsíc má 29 či 30 dnů. Má-li (viz datum 1. a 2.)

$$\begin{array}{lllll}
\text{Adaru} & 29^d\ 1^z\ 2^0\ 43'\ 50'' & + K_2 & = & \text{Nisannu } 28^d\ 5^z\ 2^0\ 54'\ 50'' \\
\text{kde} & 29^d\ 4^z\ 0^0\ 11'\ 00'' & & = & K_2 \\
\hline
\text{Adaru} & 58^d\ 5^z\ 2^0\ 54'\ 50'' & & = & \text{Nisannu } 28^d\ 5^z\ 2^0\ 54'\ 50''
\end{array}$$

Ale 58. den od 1. Adaru čítaný stane se 28. dnem následujícího měsíce jen, když Adaru čítal 30 dnů. Tak lze skrze celou tabulku vyšetřiti počet dnů v měsíci. Je to vyznačeno v koloně 2. (úzké) znamením + pro 30, znamením — pro 29.

Tabulku můžeme doplniti datem nultým, teoretickým východiskem tabulky. Užije se specialisace vzorce (4), jež zní:

$$L_0 + K_1 = L_1.$$

Aby datum stalo se určitým, musíme arci věděti, kolik dnů měl Šabatu, jenž Adar, jímž tabulka začíná, předcházel. Můžeme to určiti dvojím způsobem: Přejíždíme-li kolonu L v tab. 4 zdola nahoru, vidíme, že obecně po 29 přijde 28. Jen při $n = 33, 34$ objeví se 29, 29. — Je tedy skoro jisto, že Šabatu měl jen 28. Pak vychází ale, že tento měsíc čítal 29 dnů (viz znamení — v 2. sloupci). To ale musíme očekávat, byl-li kalendář v pořádku. Jinak by totiž v úzké koloně šla za sebou tři znamení plus: $+++$! Tři plné měsíce za sebou v lunárním kalendáři jsou ale velikou vzácností.[10]) Schoch praví, že taková kombinace je rovnocennou se zprávou o zatmění slunce.

Čítejme 28 Šabatu, přesněji den nultého úplňku za nultý den naší tabulky, za východisko. Pak byl začáteční (nultý) nov naší tabulky v čas

$$t_0 = 0{,}528256^d.$$

Viz tab. 4, sloupec 4. Další hodnoty $t_1, t_2, \ldots$ tohoto sloupce dostaneme postupným připočítáním hodnot $k_1, k_2, k_3, \ldots$ Jsou to babylonské hodnoty originálním datům L ekvivalentní; proto jsme je označili písmenou t, bez hvězdičky.[11])

---

[8]) Kugler: Mondrechnung, 31.

[9]) Kugler: Mondrechnung, 22.

[10]) Schoch: Die Schaltjahre von Bursin 1 bis Ibisin 1 in Umma, Z. f. Assyriologie, 39. 226. 1930.

[11]) Originální data babylonská v šedesátičné soustavě značím velkou písmenou na př. K. Táž data decimálně vyjádřená značím k, malou písmenou k předchozí velké náležející. Naše hodnoty, použitím trigonometrie korigované, dostanou hvězdičku, tedy k^*. Index dole na př. k^*_5 poukazuje na pátý řádek v tabulce.

Tab. 4.

Z tab. pro nové světlo Luny*) č. 272, 81—7—6.

No.	L							l		t	t*	t — t*
									d	d	d	d
0.							—	Šabâtu	28,52826	0,52826	0,45472	+ 0,07354
1.	Adâru	29	1	2	43	50	+	Adâru	29,17425	30,17425	30,15213	+ 0,02212
2.	Nisannu	28	5	2	54	50	+	Nisannu	28,84143	59,84143	59,84291	— 0,00148
3.	Airu	28	2	46	40	0	—	Airu	28,46296	89,46296	89,49800	— 0,03504
4.	Simannu	29	0	6	37	40	+	Simannu	29,01841	119,01841	119,09695	— 0,07854
5.	Dûzu	28	3	7	47	20	—	Dûzu	28,52164	148,52164	148,63085	— 0,10921
6.	Âbu	28	5	58	44	30	+	Âbu	28,99651	177,99651	178,10296	— 0,10645
7.	Ulûlu I	28	2	46	16	40	—	Ulûlu I	28,46188	207,46188	207,52699	— 0,06511
8.	Ulûlu II	28	5	27	26	20	—	Ulûlu II	28,90955	236,90955	236,92394	— 0,01439
9.	Tišrîtu	29	1	55	26	0	+	Tišrîtu	29,32065	266,32065	266,31791	+ 0,00274
10.	Arah-s	28	4	35	34	0	—	Arah-s	28,76546	295,76546	295,73195	+ 0,03351
11.	Kislimu	29	1	35	52	0	+	Kislimu	29,26630	325,26630	325,18456	+ 0,08174
12.	Tebitu	28	4	47	37	30	—	Tebitu	28,79896	354,79896	354,68717	+ 0,11179
13.	Šabâtu	29	2	4	3	0	+	Šabâtu	29,34458	384,34458	384,24292	+ 0,10166
14.	Adâru	28	5	25	36	0	+	Adâru	28,90444	413,90444	413,84661	+ 0,05783
15.	Nisannu	28	2	59	4	0	—	Nisannu	28,49741	443,49741	443,48586	+ 0,01155
16.	Airu	29	0	51	14	30	+	Airu	29,14234	473,14234	473,14295	— 0,00061
17.	Simannu	28	4	33	32	10	+	Simannu	28,75982	502,75982	502,79739	— 0,03757
18.	Dûzu	28	2	3	7	20	—	Dûzu	28,34201	532,34201	532,42880	— 0,08679
19.	Âbu	28	5	26	47	30	—	Âbu	28,90775	561,90776	562,01989	— 0,11213
20.	Ulûlu	29	2	46	35	10	+	Ulûlu	29,46274	591,46274	591,55917	— 0,09643
21.	Tišrîtu	28	5	55	42	50	+	Tišrîtu	28,98809	620,98810	621,04314	— 0,05504
22.	Arah-s	28	2	47	23	0	—	Arah-s	28,46495	650,46496	650,47738	— 0,01242
23.	Kislimu	28	5	16	57	10	—	Kislimu	28,88042	679,88043	679,87642	+ 0,00401
24.	Tebitu	29	1	50	4	40	+	Tebitu	29,30577	709,30578	709,26201	+ 0,04377
25.	Šabâtu	28	4	30	22	10	—	Šabâtu	28,75103	738,75103	738,65998	+ 0,09105
26.	Adâru	29	1	13	17	10	+	Adâru	29,20357	768,20358	768,09567	+ 0,10791
27.	Nisannu	28	4	5	37	10	—	Nisannu	28,68228	797,68228	797,58944	+ 0,09284
28.	Airu	29	1	14	9	40	+	Airu	29,20600	827,20601	827,15205	+ 0,05396
29.	Simannu	28	4	44	42	10	+	Simannu	28,79084	856,79084	856,78172	+ 0,00912
30.	Dûzu	28	2	43	46	10	—	Dûzu	28,45492	886,45492	886,46331	— 0,00839
31.	Âbu	29	0	43	34	20	+	Âbu	29,12103	916,12104	916,17018	— 0,04914
32.	Ulûlu	28	4	41	45	0	—	Ulûlu	28,78264	945,78264	945,86860	— 0,08596
33.	Tišrîtu	29	2	31	45	40	+	Tišrîtu	29,42156	975,42156	975,52414	— 0,10258
34.	Arah-s	29	0	6	15	40	+	Arah-s	29,01739	1005,01893	1005,10878	— 0,08985
35.	Kislimu	28	3	20	7	0	—	Kislimu	28,55588	1034,55588	1034,60726	— 0,05138
36.	Tebitu	29	0	6	48	50	+	Tebitu	29,01893	1064,01740	1064,02125	— 0,00385
37.	Šabâtu	28	2	17	4	20	—	Šabâtu	28,38076	1093,38076	1093,37026	+ 0,01050
38.	Adâru I	28	4	22	51	20	—	Adâru I	28,73015	1122,73016	1122,68865	+ 0,04151
39.	Adâru II	29	0	35	33	20		Adâru II	29,09876	1152,09877	1152,01926	+ 0,07951

*) Kugler: Mondrechnung. 12, 13.

Počáteční datum t_0 lze počítati z každé hodnoty t_n. Určí se

$$t_0 = t_n - (k^*_n + k^*_{n-1} + \ldots + k^*_1) - 29n.$$

Korigované hodnoty k^* vezmeme ze sloupce 5 tabulky 3. Tak dostaneme 40 hodnot t_0. Na grafu se t_0 vlní. Perioda činí (asi)

14 lunací. Proto serie 27 součtů po 14 za sebou jdoucích t_0 vlní se již jen nepatrně, asi s periodou 12 lunací.

Průměrné

$$t^*_0 = 0{,}454724.$$

Nyní můžeme počítati zlepšené hodnoty

$$t^*_n = t^*_0 + k^*_1 + k^*_2 + \ldots + k^*_n + 29n,$$

jež tabulovány v sloupci 5 tab. 4. Vyvineme zase

$$t - t^*$$

(sloupec 6 tab. 4) a vidíme, že pro nedokonalost babylonské interpolace posouvají se novy až o

$$\pm\ 0{,}11^d = \pm\ 2^h\ 38^m.$$

Tento posuv pochází z nedokonalosti kolony G, jež činí $1^h\ 5^m$, pak kolony J, jež činí 11^m, čímž jednotlivé k stane se nejistým až o $\pm\ 1^h\ 16^m$.

Každý začátek je těžký. Babylonské tabulky obsahují chyby podstatné, jež jsou od nedokonalosti použitých konstant, na př. od špatného roku. Vedle toho obsahují chyby, jež jsou od matematické primitivnosti tabulek. Chyby ty jsou dosti značné. Posouvají nov o $\pm\ 2^h\ 38^m$. Jimi se platí za jednoduchý početní mechanism, jímž Babyloňané dokázali ku podivu mnoho.

*

(Résumé.)

Substitution des tables astronomiques babyloniennes par les formules trigonométriques.

Cette revue (année 63, p. 17) a donné une instruction concernant l'expression de la série normale babylonienne oscillante par une formule trigonométrique. Comme exemple l'auteur calcule la vitesse diurne de la Lune d'après le tableau de la lumière nouvelle No 272, 81—7—6 (Kugler, Die babylonische Mondrechnung, p. 13, 1900)

$$F_n = 13{,}1764^0 + 2{,}0916^0 \cos (25{,}8167^0\, n - 136{,}3320^0); \qquad \pm\ 0{,}43^0.$$

A côté de la formule on trouve l'intervalle des erreurs dues à une interpolation imparfaite des Babyloniens.

Pour le même tableau No 272 sont données dans ce traité les formules supplémentaires

$$G_n = 0{,}53059^d + 0{,}21288^d \cos (258{,}1673^0 n - 59{,}7528^0); \qquad \pm\ 1{,}08^h.$$

La valeur $G_n + 29$ indique le temps entre la $(n - 1)$ et la n-ième Lune nouvelle (ligne) du tableau, en supposant que le mouvement du Soleil soit uniforme.

La colonne J donne une correction

$$J_n = 0{,}09018^{d} \cos (29{,}1071^{0} n - 290{,}2251^{0}); \qquad \pm 10{,}8^{m},$$

qui prend en considération l'inégalité du mouvement du Soleil.

L'intervalle de la $(n - 1)$ et la n-ième Lune nouvelle est alors

$$29 + K_n = 29 + G_n + J_n.$$

On en peut calculer l'équivalent de la colonne L, qui contient les dates babyloniennes des Lunes nouvelles comme leur intervalle compté à partir du temps $t = 0$

$$t_n = t_0 + K_1 + K_2 + \ldots + K_n + 29n; \qquad \pm 2^{h}\, 38^{m}.$$

L'imperfection de l'interpolation babylonienne, à l'aide des séries arithmétiques, introduit donc dans la détermination de la Lune nouvelle une incertitude $\pm 2^{h}\, 38^{m}$.