Filip Bock

Kyvadlo s oscilujícím závěsem

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 67 (1938), No. 4, 270--277

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122002

ČÁST FYSIKÁLNÍ.

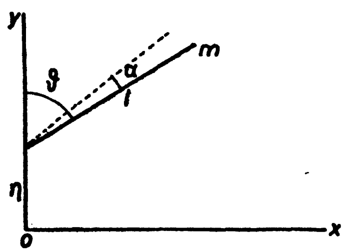
Kyvadlo s oscilujícím závěsem.

Filip Bock, Brno,

(Došlo 30. září 1937).

Kmity matematického kyvadla, jehož závěs vykonává lineární harmonický pohyb ve vertikálním směru o amplitudě l, hoví diferenciální rovnici

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \left(\frac{\nu^2}{l}\cos \nu t - \frac{g}{l}\right) . \sin\vartheta = 0.^{1)} \qquad (1)$$



Obr. 1.

Veličiny zde se vyskytující mají tento význam: ϑ je elongace kyvadla v daném okamžiku, l je délka kyvadla, g je gravitační zrychlení (při čemž směr gravitace je položen do směru záporné osy y), ν je oscilační frekvence závěsu (viz. obr. 1.).

Pozorujeme-li jenom malé kmity kolem střední polohy ϑ_0,

---

[1]) Rovnice může se odvoditi takto: Potenciální energie kyvadla jest

$$- U = mg\,(\eta + l\cos\vartheta),$$

kinetická energie

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2),$$

při čemž

$$x = l\sin\vartheta,$$
$$y = \eta + l\cos\vartheta.$$

Dosazením těchto hodnot do rovnice Lagrangeovy

$$\frac{\partial(T + U)}{\partial\vartheta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\vartheta}}\right) = 0,$$

obdržíme rovnici (1), položíme-li ještě $\eta = \cos\nu t$.

klademe

$$\vartheta = \vartheta_0 + \alpha$$

a můžeme v rovnici (1) pro proměnnou α nahraditi $\sin\alpha$ veličinou α, $-\cos\alpha$ nahraditi 1, což je pro malou hodnotu α jistě dovoleno. Tím přechází (1) v

$$\ddot{\alpha} + \left(\frac{\nu^2}{l}\cos\nu t - \frac{g}{l}\right) . \cos\vartheta_0 \, . \, \alpha = \left(\frac{g}{l} - \frac{\nu^2}{l}\cos\nu t\right) . \sin\vartheta_0 . \qquad (2)$$

Poněvadž $\alpha = \operatorname{tg}\vartheta_0$, jest partikulární řešení rovnice (2), dá se integrace této rovnice převésti na nalezení periodických řešení homogenní diferenciální rovnice

$$\ddot{\psi} + \left(\frac{\nu^2}{l}\cos\nu t - \frac{g}{l}\right) . \cos\vartheta_0 \, . \, \psi = 0. \qquad (3)$$

Obecné řešení rovnice (2) je pak dáno

$$\alpha = -\operatorname{tg}\vartheta_0 + \psi.$$

Diferenciální rovnice (3) je tak zvaná Mathieuova diferenciální rovnice. Substitucí

$$\nu t = 2\varphi, \quad \mathrm{d}t = \frac{2}{\nu}\,\mathrm{d}\varphi, \quad z = -\frac{g}{\nu^2 l} . \cos\vartheta_0, \quad \frac{4\cos\vartheta_0}{l} = \frac{8}{b} \qquad (4)$$

ji převedeme na tvar obvyklý v literatuře (Heine, Handbuch der Kugelfunktionen, 1. svaz., str. 401)

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}\varphi^2} + \left(4z + \frac{8}{b} . \cos 2\varphi\right) . \psi = 0. \qquad (5)$$

Otázka periodických řešení této diferenciální rovnice je totožná s vyhledáním oněch periodických funkcí, které činí integrál

$$I = \int_0^{2\pi} \left[\psi'^2 - \left(4z + \frac{8}{b} . \cos 2\varphi\right) \psi^2\right] \mathrm{d}\varphi$$

minimem. Při tom se připouštějí ke konkurenci všechny spojité a dvakrát spojitě derivovatelné funkce o periodě 2π. Aplikuje-li se na tento variační problém Ritzova metoda použitím trigonometrických funkcí souřadnicových, položíme-li tedy

$$\psi = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu . \cos 2\nu\varphi,$$

obdržíme pro koeficienty a_ν lineární soustavu rovnic, která jen tehdy dává řešení různá od nuly, je-li příslušný determinant $\Delta = 0$. (Podmínka periodicity.) Pro Δ nalezneme výraz:

$$\Delta\left(\frac{1}{b}, z\right) = \Delta(\beta, z) =$$

$$\begin{vmatrix} -\frac{z}{2} & -\frac{1}{b} & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{1}{b} & 1-z & -\frac{1}{b} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & -\frac{1}{b} & 4-z & -\frac{1}{b} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & & & & & & \\ \cdot & & & & & & & & & \\ \cdot & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & -\frac{1}{b} & [(n-1)^2 - z] & -\frac{1}{b} & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & -\frac{1}{b} & (n^2 - z) & \end{vmatrix}$$

$\Delta(\beta, z)$ může se jako funkce proměnné $\beta = 1/b$ rozvinouti v potenční řadu konvergentní pro všechna β a z tvaru

$$\Delta(\beta, z) = \delta_0(z) + \delta_2(z)\,\beta^2 + \ldots \tag{6}$$

První dva nemizící koeficienty tohoto rozvoje jsou

$$\begin{aligned} \delta_0(z) &= -\frac{z}{2}\prod_{\nu=1}^{n}\left(1 - \frac{z}{\nu^2}\right), \\ \delta_2(z) &= \delta_0(z)\left[-\frac{2}{z} + \sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{2}{(2\nu)^2 - 1}\cdot\frac{1}{z - \nu^2} + \frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{2 - n^2}\right]. \end{aligned} \tag{7}$$

Koeficienty lichých mocnin se vesměs rovnají nule. Nemohla však býti zjištěna jednoduchá zákonitost ve tvaru $\delta_{2\nu}(z)$, a to tím méně, že výpočet těchto výrazů je spojen s velikými obtížemi.

Jednodušeji se proti tomu utváří diskuse podmínky periodicity pro $\Delta = 0$, jsou-li oscilační frekvence ν velké. Dosadíme-li $\cos\vartheta_0 = x$ a zanedbáme-li členy řádové velikosti $O\left(\frac{1}{\nu^2}\right)$ v prvcích hlavní diagonály, přechází rovnice $\Delta = 0$ pro velká ν v

$$\bar{\Delta} = \begin{vmatrix} \frac{g}{\nu^2} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & & \dots & & \cdot \\ -\frac{x}{2l} & 1 & -\frac{x}{2l} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & & \dots & & \cdot \\ 0 & -\frac{x}{8l} & 1 & -\frac{x}{8l} & 0 & 0 & 0 & \dots & & \dots & & \cdot \\ 0 & 0 & -\frac{x}{18l} & 1 & -\frac{x}{18l} & 0 & 0 & \dots & & \dots & & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -\frac{x}{2n^2l} & 1 & -\frac{x}{2n^2l} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = 0.$$

Dokáže se, že kořen $x = \frac{2g}{\nu^2}$ rovnice²)

$$\begin{vmatrix} \frac{g}{\nu^2} & -1 \\ -\frac{x}{2l} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

znázorňuje rovněž až na chybu řádové velikosti $O\left(\frac{1}{\nu^6}\right)$ kořen rovnice $\bar{\Delta} = 0$.

K provedení toho důkazu rozvineme $\bar{\Delta}$ podle subdeterminantů prvních dvou sloupců. Dostaneme

$$\begin{vmatrix} \frac{g}{\nu^2} & -1 \\ -\frac{x}{2l} & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -\frac{x}{8l} & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ -\frac{x}{18l} & 1 & -\frac{x}{18l} & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & -\frac{x}{32l} & 1 & -\frac{x}{32l} & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} -$$

²) Tento determinant jest, jak zřejmo, levý horní dvouřadý poddeterminant determinantu $\bar{\Delta}$.

$$
-\begin{vmatrix} \dfrac{g}{\nu^2} & -1 \\ 0 & -\dfrac{x}{8l} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -\dfrac{x}{2l} & 0 & 0 & 0 & . & . \\ -\dfrac{x}{18l} & 1 & -\dfrac{x}{18l} & 0 & . & . \\ 0 & -\dfrac{x}{32l} & 1 & -\dfrac{x}{32l} & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{vmatrix} = 0.
$$

Označíme-li $2gl/\nu^2 = x_0$ a položíme-li $x = x_0 + \xi$, je

$$
\begin{vmatrix} \dfrac{g}{\nu^2} & -1 \\ -\dfrac{x}{2l} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{\xi}{2l}
$$

a hořejší rovnici můžeme psáti takto:

$$
\frac{\xi}{2l} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -\dfrac{x_0+\xi}{8l} & 0 & 0 \\ -\dfrac{x_0+\xi}{18l} & 1 & -\dfrac{x_0+\xi}{18l} & 0 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix} +
$$

$$
+ \frac{g}{16l^2\nu^2}(x_0+\xi)^2 \begin{vmatrix} 1 & -\dfrac{x_0+\xi}{18l} & 0 & . & . \\ -\dfrac{x_0+\xi}{32l} & 1 & -\dfrac{x_0+\xi}{32l} & . & . \\ . & . & . & . & . \end{vmatrix} = 0
$$

Oba nekonečné determinanty představují pro absolutní a rovnoměrnou konvergenci nekonečné řady

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_0+\xi}{2n^2 l} \cdot \frac{x_0+\xi}{2(n+1)^2 l} = \frac{(x_0+\xi)^2}{(2l)^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2}
$$

pro každou hodnotu ξ, spojité funkce proměnné ξ, které mimo to ještě jsou závislé na ν. Označíme-li tyto funkce písmeny $D_1(\xi, \nu)$ a $D_2(\xi, \nu)$, nabývá rovnice tohoto tvaru:

$$\frac{\xi}{2l} \cdot D_1(\xi, \nu) + \frac{g}{16l^2\nu^2}(x_0 + \xi)^2 \cdot D_2(\xi, \nu) = 0. \tag{I}$$

Jelikož obě funkce $D_1(\xi, \nu)$ a $D_2(\xi, \nu)$ jsou spojité funkce, můžeme dosáhnouti, aby pro libovolně malé dané ε platil vždy vztah

$$1 - \varepsilon \leqq D_1(\xi, \nu) \leqq 1 + \varepsilon$$

a

$$1 - \varepsilon \leqq D_2(\xi, \nu) \leqq 1 + \varepsilon \tag{II}$$

pokud je zvoleno ξ tak malé a ν tak velké, že zůstává

$$| x_0 + \xi | < \delta(\varepsilon), \tag{III}$$

při čemž $\delta(\varepsilon)$ znamená vhodně zvolené malé číslo, které přirozeně ještě závisí na ε.

Zvolíme-li ještě ε tak malé, že mimo to platí obě následující nerovnosti

$$1 - \eta \leqq \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}$$

a

$$1 + \eta \geqq \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon},$$

při čemž η jest libovolně malá veličina, pak je splněna, jak plyne z rovnice (II) pro všechna ξ a ν, které hoví rovnici (III), tato nerovnost

$$1 - \eta \leqq \frac{D_1(\xi, \nu)}{D_2(\xi, \nu)} \leqq 1 + \eta, \tag{IV}$$

aneb

$$\frac{D_1(\xi, \eta)}{D_2(\xi, \eta)} = 1 + \eta(\xi, \nu),$$

při čemž jest

$$| \eta(\xi, \nu) | \leqq \eta.$$

Rovnice (I) nabývá tímto tvaru

$$\frac{\xi}{2l}(1 + \eta(\xi, \nu)) + \frac{g}{16l^2\nu^2}(x_0 + \xi)^2 = 0. \tag{V}$$

Zvolíme-li nyní ν a ζ tak, aby jednak platila rovnice (III), jednak však aby ν bylo proti ξ tak velké, že můžeme zanedbati $x_0 = \frac{2gl}{\nu^2}$ proti ξ, potom první člen v rovnici (V) rozhoduje o znaménku celé levé strany. Pro záporná ξ nabývá pak levá strana rovnice (V) záporné hodnoty a pro kladná ξ hodnoty kladné.

Položíme-li

$$\bar{x} = x_0 + \bar{\xi} = \frac{2gl}{\nu^2} + \bar{\xi},$$

konverguje $\bar{\xi}$ s nekonečně rostoucím ν k nule, má tedy tvar

$$\bar{\xi} = \frac{c}{\nu^\alpha} + O\left(\frac{1}{\nu^\alpha}\right), \qquad \alpha > 0. \tag{VI}$$

Poněvadž dále $\eta(\xi, \nu)$ s $\xi \to 0$ a $\nu \to \infty$ se blíží nule tak, že je

$$\eta(\bar{\xi}, \nu) = O(1), \tag{VII}$$

obdržíme z rovnice (V) a v důsledku (VI) a (VII) vztah:

$$\frac{1}{2l}\left(\frac{c}{\nu^\alpha} + O\left(\frac{1}{\nu^\alpha}\right)\right) + \frac{g}{16l^2\nu^2}\left(\frac{2gl}{\nu^2} + \frac{c}{\nu^\alpha} + O\left(\frac{1}{\nu^\alpha}\right)\right)^2 = 0.$$

Z něho plyne nejprve $\alpha = 6$ a dále

$$\frac{c}{2l} + \frac{g}{16l^2} \cdot 4g^2l^2 = 0.$$

Je tedy

$$c = -\frac{g^3l}{2}.$$

Pro velké hodnoty ν vznikne tak kořen

$$x \sim \frac{2gl}{\nu^2} \text{ s chybou } \bar{\xi} \sim -\frac{g^3l}{2\nu^6},$$

čímž je svrchu uvedené tvrzení dokázáno.

Poněvadž zřejmě určitému ν náležící kořeny $x = \cos\vartheta_0$, které plynou z podmínky periodicity $\bar{\Delta} = 0$, určují pro tuto frekvenci možné rovnovážné polohy ϑ_0, je tím dokázáno, že velkým frekvencím příslušná rovnovážná poloha ϑ_0 vyhovuje v prvním přiblížení rovnici

$$\cos\vartheta_0 = \frac{2gl}{\nu^2}.$$

Táž rovnice se dá snadno odvoditi z výsledků, získaných Hirschem (Das Pendel mit oszillierendem Aufhängepunkt, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, *10* (1930), 41—52.)[3])

Tím je tedy dokázáno, ovšem jen pro velmi veliké frekvence,

[3]) Jest jen třeba dosaditi do rovnice (14b) citované práce

$$\vartheta = 0, \; k = c = l, \; a = 1 \text{ a } \nu = n\pi$$

a dodatečně psáti $\beta = \vartheta_0$.

že Hirschův výsledek představuje první přibližný výraz pro rovnovážnou polohu.[4])

Za podnět k této práci jsem zavázán prof. dr. R. Weyrichovi a vyslovuji mu svůj srdečný dík.

*

Le pendule au point de suspension oscillant.

(Extrait de l'article précédent.)

Dans le traité présent est démontré qu'un pendule, dont le point de suspension est mis en oscillations verticales d'une fréquence ν par seconde et d'une amplitude ègale à 1, peut effectuer des oscillations autour d'une position d'équilibre, qui a une direction oblique vers le haut. ϑ étant l'angle que la tige du pendule renferme avec la direction négative de la gravité, la position d'équilibre est donnée par

$$\vartheta' = \vartheta - \alpha = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int \vartheta \, dt.$$

Ce problème mène à une équation differentielle de Mathieu dont les solutions périodiques peuvent être trouvées par le procédé de Ritz. Il est prouvé que le résultat obtenu par Hirsch est valable pour les oscillations très rapides et très petites du point de suspension et que le résultat de Hirsch représente le premier membre d'une série asymptotique.

---

[4]) K témuž výsledku dospěl také pan A. Erdélyi v své práci: Über die kleinen Schwingungen eines Pendels mit oszillierendem Aufhängepunkt. (Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, *14* (1934), 235—247 und *16* (1936), 171—182.)