Jan Srb

O rozkladu některých kolineací prostoru 2n-rozměrného v produkt harmonických homologií

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 67 (1938), No. 4, 256--262

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122001

O rozkladu některých kolineací prostoru $2n$-rozměrného v produkt harmonických homologií.

Jan Srb, Olomouc.

(Došlo dne 9. února 1936.)

Všimneme-li si invariantních útvarů partikulárních kolineací r-rozměrného prostoru, je přímo patrno, že *kolineaci r-rozměrného prostoru typu* [(0 . . . 0) 0] (podle symboliky Predellovy), *v níž hyperbolická projektivnost indukovaná na samodružné přímce je involuční, je vždy možno rozložit v produkt r harmonických homologií.*

V kolineaci typu [(0 . . . 0) 0] soumístných r-rozměrných prostorů S_r a S'_r buďte body X a Y jediné hlavní prostory. Na samodružné přímce $y \equiv (XY)$ buď touto kolineací indukována hyperbolická involuce se samodružnými body X, Y a na samodružné přímce x jdoucí bodem X (různé od y) projektivnost parabolická se samodružným bodem X. Hlavní svazy kolineace jsou dvě samodružné nadroviny S_{r-1} a S'_{r-1} různé, z nichž nechť S_{r-1} obsahuje rovinu (xy) a S'_{r-1} jen přímku x. Obě nadroviny se tedy protínají v $(r-2)$ rozmerném prostoru S_{r-2}, který neobsahuje bod Y. V nadrovině S'_{r-2} zvolme dvě korespondující přímky a, a', jdoucí bodem X a nelezící v prostoru S_{r-2}. Řady korespondujících bodů těchto přímek mají společný bod X samodružný. Jsou proto perspektivní se středem perspektivnosti v prostoru S_{r-2}, který jako jediný samodružný prostor je zároveň basí hlavního svazu kolineace typu [(0. . . . 0)], indukované v nadrovině S'_{r-1}. Zvolme nyní osou harmonické homologie H_1 nadrovinu S_{r-1} a středem libovolný bod v rovině (a, a'), který odděluje střed perspektivnosti korespondujících řad na přímkách a, a' s oběma přímkami harmonicky. Tento bod nepadne jistě do osy S_{r-1}, s kterou tedy H_1 určuje. Leží totiž na spojnici dvou různých korespondujících bodů nadroviny S'_{r-1}, neobsažených v průsečném prostoru S_{r-2} obou nadrovin. Tato spojnice protíná prostor S_{r-2} a tedy také nadrovinu S_{r-1} v jediném bodě, který je středem perspektivnosti řad (a) a (a'). Bod s tímto středem harmonicky sdružený ke dvěma bodům různým s ním nesplývá a neleží tedy v nadrovině S_{r-1}.

Harmonickou homologií H_1 přejde prostor S'_r v soumístný $S_r^{(1)}$ kolineárný se soumístným S_r. Řada (a') přejde v řadu (a'') na přímce a, a protože osa harmonické homologie prochází středem perspektivnosti řad (a) a (a'), budou projektivní soumístné řady (a) a (a'') hyperbolicky involuční se samodružnými body X a Y_1 na a. Přímka y a prostor S_{r-2} leží v nadrovině S_{r-1}, jsou tedy při H_1 invariantní. Přímka a má s prostorem S_{r-2} jen bod X společný. Leží proto bod Y_1 v nadrovině S'_{r-1}, ne však v prostoru S_{r-2}, který tedy s body Y, Y_1 neleží v jedné nadrovině $(r-1)$ rozměrné.

V samodružném prostoru S_{r-2} kolineace soumístných prostorů S_r a $S_r^{(1)}$ je touto indukována kolineace typu $[(0\ldots0)]$. Base hlavního svazu splývá s jedinou samodružnou nadrovinou S_{r-3} prostoru S_{r-2}, obsahující bod X a přímku x. V prostoru S_{r-2} zvolme dvě v kolineaci prostorů S_r a $S_r^{(1)}$ (ale i S_r a S'_r) korespondující přímky a_1, a'_1, procházející bodem X, ale neležící v S_{r-3}. Osou harmonické homologie H_2 zvolme nadrovinu $S_{r-1}^{(2)}$, určenou prostorem S_{r-3} a body Y, Y_1, středem bod různý od X, který v rovině (a_1, a'_1) odděluje harmonicky tyto přímky a střed perspektivnosti řad bodů na nich korespondujících v kolineaci prostorů S_r a $S_r^{(1)}$. Tento střed nepadne do osy $S_{r-1}^{(2)}$. Z téhož důvodu jako při H_1 je v S_{r-2}, ale ne v S_{r-3}, a nadrovina $S_{r-1}^{(2)} \equiv (S_{r-3}, Y_1, Y)$ má s S_{r-2} jenom S_{r-3} společný. Jinak by totiž S_{r-2} v ní ležel celý a body Y, Y_1 by náležely s prostorem S_{r-2} téže nadrovině $(r-1)$ rozměrné. Transformací H_2 přejde prostor $S_r^{(1)}$ v soumístný $S_r^{(2)}$ kolineárný se soumístným S_r. Přímka a'_1 přejde v a_1 a projektivní soumístné řady korespondujících bodů na a_1 budou hyperbolicky involuční, protože osa harmonické homologie prochází středem perspektivnosti řad na a_1 a a'_1 ležícím v S_{r-3}. Involuce na a_1 má samodružné body X a Y_2. Prostor S_{r-3} jakož i přímky XY a XY_1 leží v ose harmonické homologie H_2, jsou tedy při ní invariantní. Bod Y_2 leží v S_{r-2}, ale ne v S_{r-3}. Neleží tedy body Y, Y_1, Y_2 s prostorem S_{r-3} v žádné nadrovině $(r-1)$ rozměrné.

Pokračujeme-li takto dále, bude po provedení $(r-3)$ harmonické homologie H_{r-3} v kolineaci soumístných prostorů S_r a $S_r^{(r-3)}$ samodružný prostor S_2, jdoucí bodem X a přímkou x s indukovanou kolineací typu $[(00)]$ a $(r-2)$ samodružných přímek, jdoucích bodem X s indukovanými hyperbolickými involucemi, s jedním samodružným bodem X společným a ostatními Y, $Y_1, \ldots$ $\ldots, Y_{r-3}$ takovými, že s rovinou S_2 nenáleží žádné nadrovině $(r-1)$ rozměrné. V samodružné rovině S_2 zvolme dvě korespondující přímky a_{r-2}, a'_{r-2} procházející bodem X. Řady (a_{r-2}) a (a'_{r-2}) jsou perspektivní se středem perspektivnosti na přímce x. Osou $(r-2)$. harmonické homologie H_{r-2} zvolme nadrovinu $S_{r-1}^{(r-2)}$, určenou body $Y, Y_1, \ldots, Y_{r-3}$ a samodružnou přímkou x, která protíná $(r - 2)$ rozměrný prostor určený těmito body a bodem X v X a v řečeném prostoru neleží. Středem zvolme bod v rovině S_2, různý od X takový, aby odděloval přímky a_{r-2} a a'_{r-2} se středem perspektivnosti řad na nich indukovaných, harmonicky. H_{r-2} je určena, protože její střed nepadne na osu. Osa totiž protíná rovinu S_2 v přímce x a střed leží na přímce, která tuto odděluje harmonicky s dvěma přímkami různými. Harmonickou homologií H_{r-2} přejde prostor $S_r^{(r-3)}$ v $S_r^{(r-2)}$ soumístný a kolineárný s S_r. Přímka a'_{r-2} přejde v a_{r-2} a řady na a_{r-2} budou z téhož důvodu jako nahoře involuční. Samodružné body této involuce jsou X a Y_{r-2} takové, že se samodružnými body $Y, Y_1, \ldots, Y_{r-3}$ tvoří skupinu bodů nezávislých a přímka x neleží v nadrovině jimi určené. Středem $(r - 1)$. harmonické homologie H_{r-1} zvolme samodružný bod X a osou libovolnou nadrovinu jednomocného svazku, jehož base je určena $r - 1$ nezávislými body $Y, Y_1, \ldots, Y_{r-2}$, neprocházející bodem X. Touto přejde prostor $S_r^{(r-2)}$ v soumístný $S_r^{(r-1)}$ kolineárný s S_r. Involuce na samodružných přímkách $XY, XY_1, \ldots, XY_{r-2}$ přejdou v řady samodružných bodů, tedy nadrovina určená body $X, Y, Y_1, \ldots, Y_{r-2}$ v nadrovinu samodružných bodů. Kolineace soumístných prostorů $S_r^{(r-1)}$ a S_r je tedy homologie. Protože střed harmonické homologie H_{r-1} byl zvolen v samodružném bodě X parabolické projektivnosti indukované kolineací prostorů $S_r^{(r-2)}$, a S_r na přímce x a osa protíná tuto přímku v bodě jiném, zbude x při H_{r-1} invariantní, parabolická projektivnost na ní však přejde v hyperbolickou involuci a homologie prostorů $S_r^{(r-1)}$ a S_r je harmonická.

Dále ukážeme, že *každou kolineaci 2n-rozměrného prostoru, jejíž hlavní prostory jsou pouze body, lze rozložit v produkt harmonické homologie a kolineace typu* $[(0 \ldots 0)\, 0]$, *která indukuje na samodružné přímce řady hyperbolicky involuční.*

V kolineaci dvou soumístných prostorů r-rozměrných S_r a S'_r, jejíž hlavní prostory jsou pouze body, buďte A, A' dva korespondující body, neležící v žádné samodružné nadrovině. $(r - 1)$-rozměrné trsy indukované v bodech A, A' vytvoří průsečíky sdružených přímek racionální normální křivku C^r r-rozměrného prostoru, procházející body A, A' a všemi samodružnými body kolineace. Křivce $C^r \equiv K'^r$ odpovídají v kolineaci dané a inversní dvě opět racionální normální křivky C'^r a K^r prostorů S'_r a S_r, nemající mimo hlavní body kolineace žádného společného bodu. Kdyby obě křivky měly nesamodružný bod $B \equiv C'$ společný, náležely by nezávislé body A, B, C a korespondující A', B', C' téže rovině a body A, A' by ležely v rovině samodružné proti předpokladu. Nebo by body B, B', C, C' ležely na přímce AA', která by byla, opět proti předpokladu, samodružnou. Bodové řady (C'^r) a (K^r)

jsou projektivní s řadou $(C^r) \equiv (K'^r)$, jsou tedy i spolu projektivní a přímky spojující korespondující body obou řad vytvoří racionální normální plochu V_2^{r-1}. Plocha je totiž vytvořena spojnicemi bodů dvou křivek r-tého stupně, korespondujících v biracionální korespondenci, s $r + 1$ body koincidence. Je tedy její stupeň $r + r - (r + 1) = r - 1$. Každá přímka tvořící této plochy leží v rovině, která promítá bod křivky $C^r \equiv K'^r$ z přímky AA'. Každá tvořící přímka protíná tedy přímku AA', ale tak, že žádné dvě ji neprotínají v témž bodě. Kdyby se dvě přímky tvořící na př. BC' a ED' protínaly v bodě F přímky AA', pak přímky EB, $B'E' \equiv CD$, $C'D'$, které jsou průsečnicemi tří rovin (ACD), $(A'B'E')$ a (BEF) prostoru S_3, stanoveného rovinami (ACA') a (ADA'), by se protínaly v jednom bodě X. Bod X by byl průsečík přímek EB a CD prostoru S_r a zároveň přímek korespondujících $E'B'$ a $C'D'$ prostoru S'_r, tedy bod samodružný ležící na všech třech normálních křivkách a každá z nich by měla s přímkou tři společné body. To je pro nezávislost libovolných $r + 1$ bodů křivky normální nemožné. Je tedy plocha, vytvořená spojnicemi korespondujících bodů obou křivek, racionální normální V_2^{r-1} a přímka AA' je její minimální řídicí křivkou. Tvořící přímky protínají proto přímku AA' v řadě (M) projektivní s řadami (C'^r) a (K^r), tedy také s $(C^r) \equiv (K'^r)$. Z podmínky pro stupeň minimální řídicí křivky, pro lichá r $1 \leqq \frac{1}{2}r - 1$, t. j. $r \geqq 3$, a pro sudá r $1 \leqq \frac{1}{2}r - 2$, t. j. $r \geqq 4$, plyne platnost řečeného pro všechna $r \geqq 3$.

Je-li nyní $r = 2n$ $(n \geqq 2)$, je korelace přiřazující bodům normální křivky C^{2n} její nadroviny oskulační polární, t. j. oskulační nadroviny této křivky jsou tečnými nadrovinami nadplochy incidenční V^2_{2n-1}. Obě oskulační nadroviny S_{2n-1} a S'_{2n-1} v bodech A, A' křivky C^{2n} se protnou v $(2n - 2)$ rozměrném prostoru S_{2n-2}, který nemá s křivkou společného bodu. Nadroviny jednomocného svazku s basí S_{2n-2}, určené body řady (M), vytínají tedy na C^{2n} $2n$-bodové skupiny involuce I^1_{2n}, která s řadou (C^{2n}) $[(C^{2n}) \,\overline{\wedge}\, (M)]$ tvoří na C^{2n} algebraickou příbuznost $(1, 2n)$. Tato má podle korespondenčního principu $2n + 1$ bodů incidence, tedy alespoň jeden reálný B, který nepadne ani do A ani do A'. V trsu A' odpovídá totiž přímce AN $(N \equiv A')$ tečna $A'N'$ křivky C^{2n} v bodě A'. Tedy bodu $A' \equiv N$ řady (C^{2n}) odpovídá přímka AN' normální plochy V_2^{2n-1}, t. j. bodu $A' \equiv N$ řady (C^{2n}) bod A řady (M). Odpovídá tedy oskulační rovina křivky C^{2n} v bodě A ve svazku S_{2n-2} bodu A' řady (C^{2n}) a naopak. Bod B je možno sestrojit jako průsečík dvou normálních křivek C^{2n} a ${}^1C^{2n}$. Promítneme-li na př. z bodu A křivky C^{2n} řadu (C^{2n}) na této kuželem K_2^{2n-1}, protínají korespondující nadroviny svazku S_{2n-2} přímky tohoto kužele v normální křivce ${}^1C^{2n}$. Obecná nadrovina $2n$-rozměrného prostoru protne totiž kužel K_2^{2n-1} v normální křivce C^{2n-1} této nadroviny.

Jednomocný svazek nadrovin pak protne tuto nadrovinu v jednomocném svazku prostorů $(2n - 2)$-rozměrných. Korespondence $(1, 2n - 1)$ na křivce C^{2n-1}, vytvořená průsečíky $(2n - 2)$-rozměrných prostorů svazku a body na korespondujících přímkách kužele K_2^{2n-1}, má $2n - 1 + 1 = 2n$ bodů incidence, jež jsou průsečíky variety, vytvořené řečenými svazky s obecnou nadrovinou. Průsečík křivek C^{2n} a ${}^1C^{2n}$, a podle dřívějšího je vždy alespoň jeden reálný, je hledaný bod B. Sestrojíme-li nyní v bodě B oskulační nadrovinu křivky C^{2n}, protne tato přímku AA' v bodě, který odděluje harmonicky body A, A' a bod korespondující v řadě (M) bodu B řady (C^{2n}).

V harmonické homologii $2n$-rozměrného prostoru buď osou oskulační nadrovina křivky C^{2n} v bodě B, středem bod M řady (M) korespondující bodu B řady (C^{2n}). Touto přejde prostor S'_{2n} v soumístný $S_{2n}{}^1$ kolineárný se soumístným S_{2n}. Bod A' přejde v bod $A_1 \equiv A$ a přímka $a' \equiv A'B$ v $a_1 \equiv A_1B \equiv AB$. Jsou tedy v kolineaci prostorů S_{2n} a $S^1{}_{2n}$ přímka AB a bod A samodružné. Není-li bod B samodružný v kolineaci dané, tedy $B \equiv D'$, korespondují mu na přímce AB bod D prostoru S_{2n} a na $A'B$ bod B' prostoru S'_{2n}. Jejich spojnice je podle předešlého přímka plochy $V^2{}_{2n-1}$ procházející bodem M. Harmonickou homologií přejde proto bod B' v $B_1 \equiv D$. Na samodružné přímce a kolineace prostorů S_{2n} a $S_{2n}{}^1$ je $B_1 \equiv D$ a $B \equiv D_1$ dvojina bodů obapolně si odpovídajících a projektivnost na ní indukovaná je tedy involuční s jedním reálným bodem samodružným A a druhým od něho rozdílným E. Řadu (M) na AA' můžeme také sestrojiti jinak. V každé rovině $(A, A', C \equiv D')$ obalují spojnice v dané kolineaci korespondujících bodů na přímkách AC, $A'C'$ kuželosečku. Je-li společný bod $C \equiv D'$ obou řad nesamodružný, je kuželosečka pravá a body C', D jsou dotyčné na přímkách $A'C'$ a AC. Je-li $S \equiv (A'D \times AC')$, je $M' \equiv (CS \times AA')$ dotyčný bod kuželosečky na AA' a pro $M \equiv \equiv (C'D \times AA')$, jest $(MM'AA') = -1$. Je-li nyní bod B samodružný, degeneruje kuželosečka ve svazek přímek, jehož střed M' na AA' je středem perspektivnosti korespondujících řad na přímkách AB a $A'B$. Koresponduje tedy samodružnému bodu řady (C^{2n}) v řadě (M) bod, který odděluje harmonicky body A, A' s bodem, ve kterém protne přímka AA' basi hlavního svazu přidruženého tomuto samodružnému bodu. Padne-li tedy bod B řady (C^{2n}) do bodu samodružného dané kolineace, prochází nadrovina oskulační křivky C^{2n} v tomto bodě středem perspektivnosti řad na AB, $A'B'$ a tedy také v tomto případě indukuje kolineace prostorů S_{2n} a $S^1{}_{2n}$ na přímce a hyperbolickou involuci.

V kolineaci prostorů S_{2n} a $S_{2n}{}^1$ neprochází bodem A mimo přímku a žádná samodružná přímka, protože osa harmonické homologie je oskulační nadrovina v bodě B křivky C^{2n}, vytvořené průsečíky sdružených paprsků trsů indukovaných kolineací prostorů S_{2n} a S'_{2n} v bodech A, A', tedy mimo AB a $A'B$ se žádné dva sdružené paprsky těchto trsů na ose neprotínají. Ještě alespoň jedna existující reálná přímka samodružná b musí proto procházet bodem E. Projektivnost indukovaná na přímce b je parabolická se samodružným bodem E. Kdyby nebyla, existoval by na ní ještě jeden reálný samodružný bod jiný než E (neležící na a) a spojnice tohoto s bodem A by byla samodružná přímka (různá od a) procházející bodem A. Mimo obě přímky a, b nemůže bodem E procházet jiná přímka samodružná. Kdyby procházela a byla reálná, pak by podle předešlého projektivnost na ní indukovaná byla parabolická se samodružným bodem E. Kolineace indukovaná v samodružné rovině, určené touto přímkou a b, byla by typu [(00)] a bodem E by procházela řada invariantních bodů. Kdyby byla imaginární, byla by spojnicí bodu E s imaginárním samodružným bodem neležícím na a. Pak by však spojnice tohoto bodu s A byla druhá samodružná přímka procházející bodem A. Je proto kolineace prostorů S_{2n} a $S_{2n}{}^1$ typu [(0 . . . 0) 0] s hyperbolickou involucí indukovanou na samodružné přímce a kolineace daná je produktem jejím a harmonické homologie.

Je-li $r = 2n + 1$ $(n \geqq 1)$, je korelace, přidružující bodům křivky normální nadroviny oskulační, nulová. Sestrojíme-li z bodů řady (M') takové, že $(M'MAA') = -1$ nadroviny oskulační k normální křivce C^{2n+1}, určují skupiny $2n + 1$ bodů dotyčných na této křivce involuci $I^1{}_{2n+1}$, jež s řadou $(C^{2n+1}) \barwedge M \barwedge M'$ vytvoří příbuznost $(1, 2n + 1)$ s $2n + 2$ body incidence. Je-li některý z těchto bodů reálný, je možno stejným způsobem jako pro $r = 2n$ rozložit danou kolineaci v produkt harmonické homologie a kolineace typu [(0 . . . 0) 0] s hyperbolickou involucí na samodružné přímce.

Protože každou kolineaci $2n$-rozměrného prostoru $(n > 1)$ jejíž hlavní prostory jsou pouze body, je možno rozložit v produkt harmonické homologie a kolineace, která je produktem $2n$-harmonických homologií, je tato kolineace produktem $2n + 1$-harmonických homologií. V článku „O rozkladu rovinných kolineací“*) jsem ukázal, že rozklad je možný také pro $n = 1$. Je tím tedy dokázáno, že

každou kolineaci $2n$-rozměrného prostoru, jejíž hlavní prostory jsou pouze body, lze rozložit v produkt $2n + 1$ harmonických homologií.

*

*) Časopis **65** (1936), str. 77.

Sur la décomposition de certaines homographies de l'espace à $2n$ dimensions en un produit d'homologies harmoniques.

(Extrait de l'article précédent.)

Étant donnée, dans l'espace à $2n$ dimensions, une homographie ne possédant que des points unis isolés, considérons l'homographie de deux étoiles aux centres A, A', contenue dans l'homographie donnée. Les droites de ces étoiles qui se correspondent mutuellement et se coupent en même temps produisent une courbe normale de l'espace. On peut toujours trouver un point $C' \equiv D$ tel que l'hyperplan osculataire en ce point est conjugué harmonique, par rapport aux points A, A', au point M, intersection de la droite AA' avec la droite joignant les points correspondant à $C' \equiv D$ dans l'homographie donnée et son inverse. L'homographie donnée est le produit de l'homologie harmonique dont M est le centre et l'hyperplan osculateur l'axe, et d'une homographie du type $[(0, \ldots, 0)\ 0]$. Celle-ci étant le produit de $2n$ homologies harmoniques, l'homographie donnée est le produit de $2n + 1$ de telles homologies.