Vilém Jung

O asymptotických křivkách na plochách zborcených

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 20 (1891), No. 6, 294--302

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121992

O asymptotických křivkách na plochách zborcených.

Analyticky pojednává

Vilém Jung,

s. professor při státní průmyslové škole v Brně.

1. *Inflekční tečny v určitém bodě plochy zborcené. Na plochách zborcených 2. stupně jsou dvě soustavy povrchových přímek.* Každá z obou inflekčních tečen v určitém bodě plochy dotýká se jedné z obou asymptotických křivek tímto bodem procházejících.

Budiž dána zborcená plocha rovnicemi

$$\mathrm{A} \equiv \mathrm{A}_1 x + \mathrm{A}_2 y + \mathrm{A}_3 z + \mathrm{A}_4 = 0, \tag{1}$$

$$a \equiv a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 = 0, \tag{2}$$

při čemž jsou A_i, a_i funkcemi parametru t.

Znamenejž dále

$$\mathrm{A}_i^{(k)} = \frac{d^k \mathrm{A}_i}{dt^k}, \quad \mathrm{A}^{(k)} \equiv \mathrm{A}_1^{(k)} x + \mathrm{A}_2^{(k)} y + \mathrm{A}_3^{(k)} z + \mathrm{A}_4^{(k)},$$

$${}^1\mathrm{A} \equiv \mathrm{A}(x_1, y_1, z_1), \quad {}^1\mathrm{A}^{(k)} \equiv \mathrm{A}^{(k)}(x_1, y_1, z_1).$$

Obdobné vzorce mějtež platnosť ohledně symbolu a.

Jednou z inflekčních tečen o určitém bodě (x_1, y_1, z_1) zborcené plochy jest povrchová přímka (t) tímto bodem procházející a stanovená rovnicemi

$$\mathrm{A} = 0, \quad a = 0.$$

Druhá inflekční tečna*) určena jest rovnicemi

$$\begin{vmatrix} \mathrm{A} & a \\ {}^1\mathrm{A}' & {}^1a' \end{vmatrix} = 0, \tag{3}$$

$$\begin{vmatrix} \mathrm{A} & a' \\ {}^1\mathrm{A}' & \frac{1}{2}\,{}^1a'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathrm{A}' & a \\ \frac{1}{2}\,{}^1\mathrm{A}'' & {}^1a' \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

*) Viz mé pojednání: „Několik analytických studií o plochách zborcených“ v tomto časopise r. XVIII., pag. 66—67.

Souhrn těchto inflekčních tečen v bodech určité povrchové přímky (t) tvoří zborcenou plochu 2. stupně, tak zvaný oskulační hyperboloid.*)

Budiž dána zborcená plocha 2. stupně rovnicemi

$$\text{(5)} \qquad A + tB = 0,$$

$$\text{(6)} \qquad a + tb = 0.$$

$$A \equiv A_1 x + A_2 y + A_3 z + A_4\,, \quad B = B_1 x + B_2 y + B_3 z + B_4,$$
$$a \equiv a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4\,, \quad b = b_1 x + b_2 y + b_3 z + b_4.$$

Veličiny A_i, B_i, a_i, b_i jsou konstantami.

Vyloučením parametru t z rovnic (5) a (6), obdržíme rovnici ohledně x, y, z stupně 2.; t. j. rovnici zborcené plochy 2. stupně:

$$\text{(7)} \qquad \begin{vmatrix} A & B \\ a & b \end{vmatrix} = 0.$$

Ježto ale

$$\frac{d\,(A + tB)}{dt} = B, \quad \frac{d^2\,(A + tB)}{dt^2} = 0\,,$$
$$\frac{d\,(a + tb)}{dt} = b\,, \quad \frac{d^2\,(a + tb)}{dt^2} = 0\,,$$

určena jest inflekční tečna v bodě (x_1, y_1, z_1) zborcené plochy 2. stupně rovnicemi:

$$\text{(8)} \qquad (A + tB)\,.\,{}^1b - (a + tb)\,.\,{}^1B = 0\,,$$

$$\text{(9)} \qquad {}^1b\,.\,B - {}^1B\,.\,b = 0.$$

Vyloučením veličin x_1, y_1, z_1 z těchto rovnic obdržíme

$$\text{(10)} \qquad Ab - aB = 0$$

jakožto rovnici oskulačního hyperboloidu dle povrchové přímky (t).

Rovnice (10) shoduje se s rovnicí (7), tak že oskulační hyperboloid, stanovený dle kterékoliv povrchové přímky zborcené plochy 2. stupně, splývá s touto plochou.

Obě inflekční tečny v kterémkoliv bodě zborcené plochy 2. stupně leží v této ploše. Proto má každá plocha zborcená

*) Tamtéž r. XVIII., pag. 67.

2. stupně *dvě* soustavy povrchových přímek,*) jež jsou zároveň jejími asymptotickými křivkami.

2. *Differencialní rovnice asymptotických křivek na zborcených plochách vůbec.*

Jednu soustavu asymptotických křivek na zborcené ploše, stanovené rovnicemi:

$$\text{(1)} \qquad A = 0 ,$$

$$\text{(2)} \qquad a = 0 ,$$

tvoří její povrchové přímky.

Pro druhou soustavu asymptotických křivek na takovéto ploše mají differencialní rovnice následující formu:

$$\frac{dx}{dt} + x^2 f_1(t) + x\varphi_1(t) + \psi_1(t) = 0 ,$$

$$\frac{dy}{dt} + y^2 f_2(t) + y\varphi_2(t) + \psi_2(t) = 0 ,$$

$$\frac{dz}{dt} + z^2 f_3(t) + z\varphi_3(t) + \psi_3(t) = 0 .$$

Položme

$$\begin{vmatrix} A_i & a_i \\ {}^1A' & {}^1a' \end{vmatrix} = Q_i , \quad \begin{vmatrix} A_i & a'_i \\ {}^1A' & \frac{1}{2}\,{}^1a'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A'_i & a_i \\ \frac{1}{2}\,{}^1A'' & {}^1a' \end{vmatrix} = q_i ;$$

veličiny Q_i, q_i jsou funkcemi veličin x_1, y_1, z_1, t.

Veličiny x_1, y_1, z_1 se tu vyskytují linearně.

Inflekční tečna v bodě (x_1, y_1, z_1) jest stanovena rovnicemi:

$$Q_1 x + Q_2 y + Q_3 z + Q_4 = 0 ,$$
$$q_1 x + q_2 y + q_3 z + q_4 = 0 .$$

Buďtež α, β, γ úhly inflekční tečny s osami X, Y, Z.

Položme

$$P_2 = (\pm Q_2 q_3) ;$$

P_2, P_3 povstanou z P_1 cyklickou přeměnou ukazovatelů 1, 2, 3.

Možno tedy psáti:

*) Jiným způsobem jsem to dokázal v tomto časopise R. XVIII., č. II., pag. 63.

$$\frac{\cos\alpha}{P_1} = \frac{\cos\beta}{P_2} = \frac{\cos\gamma}{P_3}.$$

Tato inflekční tečna dotýká se příslušné asymptotické křivky v bodě $(x_1\, y_1\,,\, z_1)$ povrchové přímky (t) na zborcené ploše.

Zaměníme-li symboly x_1, y_1, z_1 jednoduššími x, y, z, můžeme psáti:

$$\frac{dx}{P_1} = \frac{dy}{P_2} = \frac{dz}{P_3}, \tag{3}$$

při čemž jsou P_1, P_2, P_3 funkcemi veličin x, y, z, t.

Differencováním rovnic (1), (2) plochy plyne

$$A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz + A_4 = 0, \tag{4}$$
$$a_1 dx + a_2 dy + a_3 dz + a_4 = 0. \tag{5}$$

Pomocí rovnice (3) lze odvoditi z rovnice (4)

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_1^3 A_i P_i}{A'} dx + P_1 dt &= 0,\\
\frac{\sum_1^3 A_i P_i}{A'} dy + P_2 dt &= 0,\\
\frac{\sum_1^3 A_i P_i}{A'} dz + P_3 dt &= 0,
\end{aligned} \tag{6}$$

a z rovnice (5)

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_1^3 a_i P_i}{a'} dx + P_1 dt &= 0,\\
\frac{\sum_1^3 a_i P_i}{a'} dy + P_2 dt &= 0,\\
\frac{\sum_1^3 a_i P_i}{a'} dz + P_3 dt &= 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

Snadno se přesvědčíme, že

$$P_1 = (A')^2 (\pm a_2 a'_3) + (a')^2 (\pm A_2 A'_3) + A'a' \{(\pm A_2 a_3) + (\pm a'_2 A_3)\} + \tfrac{1}{2}(A'a'' - a'A'')(\pm A_2 a_2);$$

P_2, P_3 obdržíme z P_1 cyklickou přeměnou ukazovatelů 1, 2, 3. Z toho pak vyplývá:

$$\frac{\sum_1^3 A_i P_i}{A'} = \frac{\sum_1^3 a_i P_i}{a'} = A' (\pm A_1 a_2 a_3') + a' (\pm a_1 A_2 A_3').$$

Z té příčiny podávají rovnice (6) totéž co rovnice (7) t. j.

$$(8) \quad \{A' (\pm A_1 a_2 a_3') + a' (\pm a_1 A_2 A_3')\}\, dx + P_1 dt = 0,$$

$$(9) \quad \{A' (\pm A_1 a_2 a_3') + a' (\pm a_1 A_2 A_3')\}\, dy + P_2 dt = 0,$$

$$(10) \quad \{A' (\pm A_1 a_2 a_3') + a' (\pm a_1 A_3 A_3')\}\, dz + P_3 dt = 0.$$

Z rovnice (8) možno pomocí rovnic (1), (2) vyloučiti y, z; z rovnice (9) veličiny z, x; z rovnice (10) veličiny x, y.

Provedeme-li příslušnou eliminaci proměnných, obdržíme:

$$(11) \quad \frac{dx}{dt} + \frac{(\pm A_2 a_3)}{(\pm A_1 a_2 a_3')(\pm A_4 a_2 A_3') - (\pm A_1 a_2 A_3')(\pm A_4 a_2 a_3')} P_1 = 0,$$

$$(12) \quad \frac{dy}{dt} + \frac{(\pm A_3 a_1)}{(\pm A_1 a_2 a_3')(\pm A_1 a_4 A_3') - (\pm A_1 a_2 A_3')(\pm A_1 a_4 a_3')} P_2 = 0,$$

$$(13) \quad \frac{dz}{dt} + \frac{(\pm A_1 a_2)}{(\pm A_1 a_2 a_3')(\pm A_1 a_2 A_4') - (\pm A_1 a_2 A_3')(\pm A_1 a_2 a_4')} P_3 = 0.$$

Výraz P_1 jest kvadratickou funkcí veličiny x, veličina P_2 kvadratickou funkcí veličiny y, veličina P_3 kvadratickou funkcí veličiny z. Proto mají differencialní rovnice formu na počátku tohoto odstavce uvedenou.

Zvolíme-li formu rovnic (1), (2) co nejobecněji, obdržíme formule velmi souměrné.

Ve zvláštních případech jest však výhodno uvésti rovnice (1), (2) na formu co možná nejjednodušší, totiž

$$A \equiv x \,.\, \Phi(t) - y + F(t) = 0,$$
$$a \equiv x \,.\, \varphi(t) - z + f(t) = 0.$$

Dostačí pak odvoditi differencialnou rovnici mezi proměnnými x, t, ježto se y a z dají pomocí x a t jednoduše vyjadřiti.

Tato differencialní rovnice zní:

$$(14) \quad \frac{dx}{dt} + \frac{(\Phi'\varphi'' - \varphi'\Phi'')x^2 + (F'\varphi'' - \varphi'F'' + \Phi'f'' - f'\Phi'')x + F'f'' - f'F''}{2(F'\varphi' - f'\Phi')} = 0.$$

3. *Asymptotické křivky na zborcených plochách s jednou řídící přímkou.*

Zvolíme-li řídící přímku zborcené plochy za osu Z, stanovena jest tato plocha rovnicemi:

$$(1)\qquad A \equiv tx - y = 0\,,$$

$$(2)\qquad a \equiv x\,.\,\varphi(t) - z + f(t) = 0\,.$$

Dosadíme-li do diff. rovnice (14) odstavce 2. hodnoty, tomuto případu příslušející, obdržíme

$$(3)\qquad \frac{dx}{dt} - \frac{\varphi''}{2f'}x^2 - \frac{f''}{2f'}x = 0\,.$$

V této diff. rovnici lze proměnné x a t odloučiti.

Položíme-li

$$\frac{\varphi''}{2f'} = \Psi, \quad \frac{f''}{2f'} = F\,,$$

obdržíme z rovnice (3)

$$\frac{dx}{dt} - x\,.\,F(t) - x^2\,.\,\Psi(t) = 0$$

čili

$$(4)\qquad -\frac{1}{x^2}\frac{dx}{dt} + \frac{1}{x}F(t) + \Psi(t) = 0\,.$$

Zavedeme-li $\frac{1}{x} = \xi$, tak že $-\frac{1}{x^2}\frac{dx}{dt} = \frac{d\xi}{dt}$, obdržíme dále z rovnice (4)

$$(5)\qquad \frac{d\xi}{dt} + \xi\,.\,F(t) + \Psi(t) = 0\,.$$

Substitucí $\xi = uv$ dospějeme k částečným integralům

$$u = C_1\,e^{-\int F dt}, \quad v = C_2 - \frac{1}{C_1}\int e^{\int F dt}\,.\,\Psi dt\,,$$

tak že

$$\xi = uv = C_1\,e^{-\int F dt}\left\{C_2 - \frac{1}{C_1}\int e^{\int F dt}\,.\,\Psi dt\right\}$$

čili

$$\xi = e^{-\int \mathrm{F}dt}\left\{ \mathrm{C} - \int e^{\int \mathrm{F}dt} . \Psi dt \right\}.$$

Ježto ale

$$\int \mathrm{F}dt = \frac{1}{2}\int \frac{f''dt}{f'} = \frac{1}{2} lf' = l\sqrt{f'},$$

$$\xi = \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{f'}}\left\{ \mathrm{C} - \frac{1}{2}\int \frac{\varphi''}{\sqrt{f'}} dt \right\}.$$

Jest tedy druhá soustava asymptotických křivek na zborcené ploše s jednou řidící přímkou stanovena rovnicemi:

$$x = \frac{\sqrt{f'(t)}}{\mathrm{C} - \frac{1}{2}\int \frac{\varphi''(t)}{\sqrt{f'(t)}} dt},$$

$$y = tx \quad , \quad z = x . \varphi(t) + f(t).$$

4. *Asymptotické křivky na zborcených plochách s dvěma řidícími přímkami.*

Zvolíme-li jednu z řidících přímek plochy za osu Z, mají zborcené plochy tohoto typu formu:

(1) $\mathrm{A} \equiv tx - y = 0$

(2) $a \equiv x . \varphi(t) - z + f(t) = 0 .$

Zvolme dále přímku, která obě řidící přímky plochy kolmo protíná, za osu Y, tak že jest druhá řidící přímka s rovinou (ZX) rovnoběžná a protíná osu Y.

Označme úhel obou řidících přímek symbolem α a položme $\operatorname{cotg} \alpha = m$; mimo to znamenejž n kolmou vzdálenost obou řidících přímek.

Druhá řidící přímka stanovena jest rovnicemi

(3) $y = n$

(4) $z = mx .$

Povrchové přímky plochy, stanovené rovnicemi (1), (2), protínají tuto řidící přímku; vyloučením proměnných x, y, z z rovnic (1), (2), (3), (4) obdržíme

(5) $$\varphi(t) = m - \frac{tf(t)}{n}.$$

Mají tedy rovnice zborcených ploch tohoto typu formu:.

$$A \equiv xt - y = 0$$

$$a \equiv \left(m - \frac{tf(t)}{n}\right) x - z + f(t) = 0.$$

Derivováním rovnice (5) plyne

$$\varphi' = -\frac{1}{n}(f + tf')$$

$$\varphi'' = -\frac{1}{n}(2f' + tf'').$$

Dosaďme tyto hodnoty pro φ'' do posledních rovnic odstavce 3., t. j.

$$\int \frac{\varphi''}{\sqrt{f'}} dt = -\frac{1}{n} \int \frac{2f' + tf''}{\sqrt{f'}} dt = -\frac{2}{n} \int (\sqrt{f'} . dt + t . d\sqrt{f'})$$
$$= -\frac{2}{n} t . \sqrt{f'} .$$

Pro druhou soustavu asymptotických křivek na zborcených plochách s dvěma řídícími přímkami platí tedy rovnice:

$$x = \frac{\sqrt{f'(t)}}{C + \frac{1}{n} t \sqrt{f'(t)}}$$

$$y = tx\,, \quad z = \left(m - \frac{tf(t)}{n}\right) x + f(t) .$$

Není tedy v tomto případě zapotřebí prováděti nějakou zvláštní integraci.

5. *Asymptotické křivky na zborcených plochách s jednou řídící přímkou a jednou řídící rovinou (na konoidech).*

Zvolme opět řídící přímku za osu Z, osu Y pak rovnoběžně s rovinou řídící. Budiž α úhel, v kterém jest řídící přímka k rovině řídící nakloněna a položme cotg $\alpha = m$.

Rovnice zborcených ploch tohoto typu mají formu

(1) $$A \equiv tx - y = 0$$

(2) $$a \equiv mx - z + f(t) = 0 .$$

Vzhledem k odstavci (3) platí

$$\varphi(t) = m\,, \quad \varphi'' = 0\,.$$

Z posledních rovnic odstavce 3. obdržíme pro asymptotické křivky na *konoidech vůbec* následující rovnice*):

$$x = \mathrm{B}\sqrt{f'(t)}\,, \quad y = tx\,, \quad z = mx + f(t)\,.$$

U *konoidů přímých* jest řídící přímka kolmá k rovině řídící, tak že $m = \operatorname{cotg}\frac{\pi}{2} = 0$.

Rovnice ploch tohoto typu mají tedy formu

$$tx - y = 0\,, \quad z - f(t) = 0\,,$$

zvolíme-li řídící přímku za osu Z.

Pro asymptotické křivky na těchto plochách platí pak rovnice:

$$x = \mathrm{B}\sqrt{f'(t)}\,, \quad y = tx\,, \quad z = f(t)\,.$$

K didaktice veličin komplexních.

Napsal

M. Lerch,

docent při české vysoké škole technické v Praze.

(Dokončení.)

5. O nějakém komplexním výrazu pravíme, že zmizí, jestliže se rovná komplexu nullovému (0, 0). Pak platí důležitá věta, že komposiční součin jen tehdy zmizí, zmizí-li jeden z jeho činitelů.

Abychom to dokázali, pišme $a = (\alpha, \alpha')$, $b = (\beta, \beta')$ a položme $ab = 0$, t. j.

$$\alpha\beta - \alpha'\beta' = 0, \; \alpha\beta' + \alpha'\beta = 0.$$

*) K témuž výsledku dospějeme, dosadíme-li do posledních rovnic odstavce 4. hodnotu $n = \infty$, t. j. volíme druhou řídící přímku v nekonečné vzdálenosti, stanovíce ji zaměřením řídící roviny.