Matyáš Lerch

Obecné kriterium konvergence nekonečných řad a integrálů

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 20 (1891), No. 6, 285--293

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121988

Obecné kriterium konvergence nekonečných řad a integrálů.

Napsal

M. Lerch,

docent české vysoké školy technické v Praze.

1. Literou $\varphi(x)$ znamenati budeme vždy kladnou funkci, která v jistém intervallu nekonečném $(a \ldots \infty)$ hoví nerovnosti $\varphi(x) > x$ a má kladnou derivaci $\varphi'(x)$, jež je schopna integrace. Takovými funkcemi jsou na př. $x+1$, x^2 (pro $x > 1$), e^x.

Bude se nám jednati o podmínku, za níž existuje integrál

$$(1) \qquad \int_a^\infty f(x)\,dx,$$

kde $f(x)$ je kladná funkce, konečná a schopná integrace ve všech mezích konečných obsažených v mezeře $(a \ldots \infty)$.

Podmínku nutnou pro existenci integrálu (1) nalézti nelze, pokud $f(x)$ jest obecnou funkcí. Ale můžeme dokázati větu velmi obecnou, která stačí k posouzení tohoto integrálu takřka ve všech případech, jež se mohou vyskytnouti v applikacích. Tato věta zní takto:

I. *Je-li možno ustanoviti kladnou integrace schopnou funkci $h(x)$ a kladnou konstantu μ tak, aby v mezeře $(a \ldots \infty)$ platila vždy nerovnost:*

$$h(x)\frac{f(x)}{\varphi'(x)f(\varphi)} - h(\varphi) > \mu,$$

pak konverguje (existuje) integrál (1).

K této větě druží se jiná, jež vyjadřuje, za jakých okolností integrál (1) jistě diverguje (neexistuje). Abychom ji stručně mohli vyjádřiti, definujme v mezeře $(a \ldots \infty)$ řadu veličin

$$m_0 < m_1 < m_2 < m_3 < \dots$$

danou podmínkami:

$$\varphi(a) \leqq m_0, \quad m_1 = \varphi(m_0), \quad m_2 = \varphi(m_1), \quad m_3 = \varphi(m_2), \dots$$

a znamenejme symbolem $h\ (m_\nu \dots m_{\nu+1})$ horní mez hodnot funkce $h(x)$ v intervallu $(m_\nu \dots m_{\nu+1})$. Pak zní věta druhá takto:

II. *Existuje-li kladná a integrace schopná funkce $h(x)$, pro níž diverguje řada*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{h\,(m_\nu \dots m_{\nu+1})} = \infty$$

a platí-li v mezeře $(a \dots \infty)$ *nerovnosť*

$$h(x)\,\frac{f(x)}{\varphi'(x) f(\varphi)} - h(\varphi) \leqq 0,$$

pak diverguje integrál (1).

Tyto věty se dokáží velmi jednoduše takto:

1. Nechť je splněna podmínka věty I., tu můžeme psáti ve tvaru

$$h(x) f(x) - h(\varphi) f(\varphi)\,\varphi'(x) > \mu f(\varphi)\,\varphi'(x)$$

a tedy bude po integraci v mezích $(a \dots m)$, kde $m > \varphi(a)$:

$$\int_a^m h(x) f(x)\,dx - \int_a^m h(\varphi) f(\varphi)\,\varphi'(x)\,dx > \mu \int_a^m f(\varphi)\,\varphi'(x)\,dx.$$

Transformujeme-li druhý a třetí integrál substitucí $\varphi(x) = z$, obdržíme tvar

$$\int_a^m h(x) f(x)\,dx - \int_{\varphi(a)}^{\varphi(m)} h(x) f(x)\,dx > \mu \int_{\varphi(a)}^{\varphi(m)} f(x)\,dx,$$

aneb po krátké redukci na levé straně:

$$\int_a^{\varphi(a)} h(x) f(x)\,dx - \int_m^{\varphi(m)} h(x) f(x)\,dx > \mu \int_{\varphi(a)}^{\varphi(m)} f(x)\,dx,$$

odkudž pak máme a fortiori:

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(m)} f(x)\,dx < \frac{1}{\mu} \int_a^{\varphi(a)} h(x) f(x)\,dx.$$

Ježto funkce $f(x)$ je kladná a $\varphi(m)$ roste s m, je patrno, že levá strana roste ustavičně s m; ale nerovnosť poslední vyžaduje, aby byla obsažena pod stálou mezí. Ze základní věty theorie limit plyne pak, že tu musí existovati limita

$$\lim_{m=\infty} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(m)} f(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\infty} f(x)\,dx,$$

t. j. integrál (1) konverguje. Zároveň ale máme horní mez jeho: Je totiž

$$(2) \qquad \int_{\varphi(a)}^{\infty} f(x)\,dx \leqq \frac{1}{\mu} \int_a^{\varphi(a)} h(x) f(x)\,dx.$$

Poznámka. Existuje-li limita

$$\lim_{x=\infty} \left[\frac{h(x) f(x)}{\varphi'(x) f(\varphi)} - h(\varphi)\right] = r > 0,$$

pak odpovídá každému $\alpha < r$ číslo a_0 tak, aby pro každé $a \geqq a_0$ platila nerovnosť (2), kde $\mu = r - \alpha$.

Neboť z existence limity plyne, že musí existovati jistý intervall $(a_0 \ldots \infty)$, v němž je funkce uzávorkovaná větší než $r - \alpha$.

2. Abychom dokázali větu II., pišme nerovnosť, již tato předpokládá, ve tvaru

$$h(x) f(x) - h(\varphi) f(\varphi) \varphi'(x) \leqq 0;$$

násobme dx a integrujme v mezích $(a \ldots m)$, kde $m > \varphi(a)$; užívajíce týchž obratů jako prvé, obdržíme nerovnosť:

$$(\alpha) \qquad \int_a^{\varphi(a)} h(x) f(x)\,dx - \int_m^{\varphi(m)} h(x) f(x)\,dx \leqq 0.$$

Poněvadž $m_0 > \varphi(a)$, můžeme klásti

$m = m_\nu$, $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$, načež $\varphi(m) = \varphi(m_\nu) = m_{\nu+1}$; mimo to bude

$$\int_{m_\nu}^{m_{\nu+1}} h(x) f(x)\, dx < h(m_\nu \ldots m_{\nu+1}) \int_{m_\nu}^{m_{\nu+1}} f(x)\, dx$$

a tedy obdržíme z nerovnosti (α)

$$\int_{m_\nu}^{m_{\nu+1}} f(x)\, dx > \frac{A}{h(m_\nu \ldots m_{\nu+1})}, \text{ kde } A = \int_a^{\varphi(a)} h(x) f(x)\, dx.$$

Odtud máme sečtením pro $\nu = 0, 1, \ldots, k-1$:

$$\int_{m_0}^{m_k} f(x)\, dx > A \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{1}{h(m_\nu \ldots m_{\nu+1})};$$

poněvadž pravá strana dle předpokládané divergence řady roste s k přes všecky meze, bude též integrál

$$\int_{m_0}^{m_k} f(x)\, dx$$

pro dosti veliké k libovolně velikým, a tedy nebude existovati integrál (1), *c. b. d.*

2. Má-li funkce $f(x)$ v intervallu $(k \ldots \infty)$ tu vlastnost, že neroste na žádném místě zároveň s x, bude platit nerovnost

$$f(\nu) \geqq \int_\nu^{\nu+1} f(x)\, dx \geqq f(\nu+1)$$

a tedy

$$\sum_{\nu=k}^{n} f(\nu) \geqq \int_k^{n+1} f(x)\, dx \geqq \sum_{\nu=k+1}^{n+1} f(\nu).$$

Z těchto nerovností soudíme:

1. Konverguje-li řada $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} f(\nu)$, bude

$$\sum_{\nu=k}^{\infty} f(\nu) \geqq \int_{k}^{n+1} f(x)\, dx,$$

a poněvadž funkce $f(x)$ je kladná, musí existovati

$$\lim_{n=\infty} \int_{k}^{n+1} f(x)\, dx = \int_{k}^{\infty} f(x)\, dx.$$

2. Konvervuje-li integrál tento, máme nerovnosť

$$\int_{k}^{\infty} f(x)\, dx \geqq \sum_{\nu=k+1}^{n+1} f(\nu)$$

a odtud plyne konvergence řady $\Sigma f(\nu)$. Tedy máme větu:

A. *Jestliže kladná funkce $f(x)$ v intervallu $(a \ldots \infty)$ nikde neroste, pak řada a integrál*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} f(\nu), \qquad \int_{a}^{\infty} f(x)\, dx$$

zároveň konvergují neb divergují.

Z toho plyne, že lze věty I. a II. přeměniti v konvergenční kriteria řad sestupných, t. j. takových řad

$$(3) \qquad u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

kde $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ od jistého místa počínaje nepřevýší 1.

Avšak okolnosť, že jsme ve větách I. a II. nepředpokládali, že funkce $f(x)$ je spojitou, aneb že neroste, můžeme z nich obdržeti *kriteria platná i pro řady, jež nejsou sestupnými.*

Je-li totiž dána řada (3), zcela libovolná, můžeme jí přiřaditi funkci $f(x)$, ovšem přetržitou, tak aby existence integrálu $\int_{a}^{\infty} f(x)\, dx$ měla za následek konvergenci řady Σu_ν a naopak. K tomu stačí voliti na př.

$$f(x) = u_{[x]},$$

kde $[x]$ značí největší číslo celistvé obsažené v x, takže v intervallu $(n \ldots n+1)$ bude $f(x) = u_n$.

Poněvadž tu

$$\int_\nu^{\nu+1} f(x)\, dx = u_\nu,$$

máme

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} u_\nu = \int_0^n f(x)\, dx,$$

a tu je tedy patrno, že řada a integrál zároveň konvergují neb divergují.

Máme tedy kriteria následující:

$$h(x) \frac{u_{[x]}}{\varphi'(x)\, u_{[\varphi(x)]}} - h(\varphi) > \mu \textit{ pro konvergenci,}$$

a

$$\left.\begin{aligned} & h(x) \frac{u_{[x]}}{\varphi'(x)\, u_{[\varphi(x)]}} - h(\varphi) \leqq 0 \\ & \Sigma \frac{1}{h(m_\nu \ldots m_{\nu+1})} = \infty \end{aligned}\right\} \textit{pro divergenci řady } \Sigma u_{(\nu)},$$

která dostačují, nechť řada Σu_ν má jakékoli zvláštnosti vzhledem k seřadění členů.

Vytkněmež některé případy zvláštní.

a) Volme $\varphi(x) = x + 1$, takže pak $[\varphi(x)] = [x] + 1$; píšeme-li kromě toho $h(x) = a_{[x]}$, kde $a_0, a_1, a_2, \ldots$ jest daná posloupnosť kladných veličin, budou naše podmínky zníti:

$$a_{[x]} \frac{u_{[x]}}{u_{[x]+1}} - a_{[x]+1} \left\{ \begin{aligned} & > \mu \text{ pro konvergenci,} \\ & \leqq 0 \text{ pro divergenci,} \end{aligned}\right.$$

předpokládaje, že v druhém případě řada $\Sigma \frac{1}{a_\nu}$ diverguje [zde voleno $m_0 = k$, tedy $m_1 = k + 1$, $m_2 = k + 2, \ldots$ takže $h(m_\nu \ldots m_{\nu+1})$ značí veličinu $a_{k+\nu}$].

Je patrno, že lze tyto výsledky vyjádřiti následující větou *Kummerovou*:

Řada Σu_ν konverguje, lzeli ustanoviti kladné veličiny μ; $a_0, a_1, a_2, \ldots$ tak, aby od určitého místa počínaje platila nerovnost:

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} > \mu.$$

Řada ta však diverguje, platí-li při divergenci řady $\Sigma \frac{1}{a_n}$ nerovnost:

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \leqq 0.$$

Ve zvláštním případě, kdy existují limity následující, obdrží tyto podmínky tvar:

$$\lim_{n=\infty} \left(a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1}\right) > 0 \text{ pro konvergenci}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n=\infty} \left(a_n \dfrac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1}\right) < 0 \\ \Sigma \dfrac{1}{a_n} = \infty \end{array}\right\} \text{ pro divergenci.}$$

Specialisováním veličin a_n obdržíme odtud celou řadu kriterií známých. Na př. kriterium *Raabeovo* pro $a_n = n$:

$$\lim_{n=\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \begin{array}{l} > 1 \text{ pro konvergenci} \\ < 1 \text{ pro divergenci,} \end{array}$$

které jest z nich nejzajímavější.

b) Volme $h(x) = 1$, pak máme podmínky:

$$\frac{\varphi'(x) f(\varphi)}{f(x)} \begin{array}{l} < \varrho \textit{ pro konvergenci} \\ \geqq 1 \textit{ pro divergenci} \end{array}$$

řady $\Sigma f(\nu)$, kde $\varrho = \frac{1}{1+\mu}$ je pravý zlomek. Při tom buď pro danou řadu Σu_ν značí $f(x)$ veličinu $u_{[x]}$, aneb jest $f(x)$ funkcí *klesající*, která v tomto případě může též býti spojitou. Ve zvláštním případě, kdy existují limity následující, máme podmínky:

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varphi'(x) f(\varphi)}{f(x)} \begin{array}{l} < 1 \text{ \textit{pro konvergenci}} \\ > 1 \text{ \textit{pro divergenci}} \end{array}$$

řady $\Sigma f(v)$.

Toto kriterium objevil ruský mathematik p. *Ermakov*;*) ono vyčerpává nejzajímavější i nejužitečnější část našich theorémů I a II, a je ze všech známých kriterií nejpůsobivějším. Volme na př. $\varphi(x) = e^x$; pak máme kriterium

$$\lim_{x=\infty} \frac{e^x f(e^x)}{f(x)} \begin{array}{l} < 1 \text{ pro konvergenci,} \\ > 1 \text{ pro divergenci.} \end{array}$$

Při volbě $\varphi(x) = x + 1$ máme tu nejznámější kriterium *Cauchyovo* vztahující se k výrazu $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Zdá se, že pro funkce $\varphi(x)$, jež rychleji rostou, obdržíme též citlivější kriteria. Tato citlivosť však není tak značná, jak se zdá na prvý pohled. P. *Ermakov* ukázal na př., že funkce $\varphi(x)$, $\varphi_2(x) = \varphi(\varphi)$, $\varphi_3(x) = \varphi(\varphi_2)$, ... $\varphi_k(x) = \varphi(\varphi_{k-1})$ mají stejnou citlivosť pro konvergenční otázku; t. j. vede-li jedna z těchto funkcí k určité odpovědi, vedou k ní též ostatní; to plyne z následující úvahy: Ježto

$$\varphi'_2(x) = \varphi'(\varphi)\,\varphi'(x),$$

máme

$$\frac{\varphi'_2(x) f(\varphi_2)}{f(x)} = \frac{\varphi'(\varphi) f(\varphi_2)}{f(\varphi)} \cdot \frac{\varphi'(x) f(\varphi)}{f(x)}$$

a tedy

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varphi'_2(x) f(\varphi_2)}{f(x)} = \left[\lim_{x=\infty} \frac{\varphi'(x) f(\varphi)}{f(x)} \right]^2.$$

Podobně ukáže se

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varphi'_3(x) f(\varphi_3)}{f(x)} = \left[\lim_{x=\infty} \frac{\varphi'(x) f(\varphi)}{f(x)} \right]^3,$$

atd. Pravé strany jsou zároveň $\gtreqless 1$ s výrazem $\lim \frac{\varphi'(x) f(\varphi)}{f(x)}$, a tedy neposkytují nic nového.

*) Bulletin des Sciences mathématiques, sv. II., a pak 2. serie sv. VII.

Abychom učinili malou applikaci, znamenejme $\psi(z)$ řešení rovnice $z = \varphi(x)$; bude pak nutně $\psi(z) < z$. Pomocí této funkce sestrojme řadu

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\Psi_k(a+\nu)_s},$$

znamená-li

$$\Psi_k(x)_s = x\,\psi(x)\,\psi_2(x)\,\psi_3(x)\,\ldots\,\psi_{k-1}(x)\,.\,\psi_k(x)^s,$$

kde s je realné, a

$$\psi_2 = \psi(\psi),\quad \psi_3 = \psi(\psi_2),\quad \psi_4 = \psi(\psi_3),\ \ldots$$

Tu bude nám dle Ermakova vyšetřovati výraz

$$A = \frac{\varphi'(x)\,f(\varphi)}{f(x)} = \frac{\varphi'(x)\,\Psi_k(x)_s}{\Psi_k(\varphi)_s};$$

avšak

$$\psi(\varphi) = x,\quad \psi_2(\varphi) = \psi(x),\quad \psi_3(\varphi) = \psi_2(x),\ \ldots$$

takže

$$\Psi_k(\varphi)_s = \varphi\,.\,x\,.\,\psi(x)\,\psi_2(x)\,\ldots\,\psi_{k-2}(x)\,.\,\psi_{k-1}(x)^s$$

a tedy máme

$$A = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,\frac{\psi_k(x)^s}{\psi_{k-1}(x)^{s-1}}.$$

Klademe-li $\psi_k(x) = z$, obdržíme $x = \varphi_k(z)$, a tedy bude

$$A = \frac{\varphi'[\varphi_k(z)]}{\varphi(\varphi_k(z))}\cdot\frac{z^s}{\varphi(z)^{s-1}},$$

a vše záleží na $\lim\limits_{s=\infty} A$. V případě $\varphi(x) = e^x$ máme na příklad $A = \frac{z^s}{e^{(s-1)z}}$ a tento výraz jen tehdy není ∞ pro $z = \infty$, je-li $s > 1$, a sice bude pak $\lim A = 0$, kdežto pro $s \leqq 1$ by $\lim A = \infty$.