Úlohy.

Řešení úlohy 25.

(Zaslal p. *Václav Hromádko*, stud. VII. tř. g. v Táboře.)

Z daných číslic soudíme, že základem soustavy jest číslo x v mezích $5 < x < 10$; toto má vyhověti rovnici

$$x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 3x + 1 = 1891$$

čili

$$x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 3x - 1890 = 0.$$

Má-li rovnice tato kořen celistvý, musí tento býti dělitelem čísla 1890; rozložíme-li toto v prvočinitele

$$1890 = 2 \,.\, 3^3 \,.\, 5 \,.\, 7,$$

přesvědčíme se zkouškou, že rovnici činí zadost kořeny

$$x_1 = 6 \,, x_2 = -7.$$

Dáme-li pak rovnici podobu

$$(x - 6)(x + 7)(x^2 + x + 45) = 0,$$

najdeme další dva kořeny

$$x_{3,4} = \frac{-1 \pm i\sqrt{179}}{2}.$$

Jest tedy $x = 6$ základem soustavy, ve které letopočet 1891 píše se číslicemi 12431.

Jiné řešení úlohy 25.

(Zaslal p. *Josef Čeřovský*, stud. VI. tř. r. v Hradci Králové.)

Rovnici

$$x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 3x - 1890 = 0$$

lze dáti podobu

$$x^4 + x^3 + 3x^2 + x^3 + x^2 + 3x - 1890 = 0$$

čili

$$(x^2+x+3)(x^2+x)-1890=0.$$

Položíme-li

$$x^2+x=y,$$

vypočítáme z rovnice

$$(y+3)\,y-1890=0$$

hodnoty

$$y_1=42,\ y_2=-45,$$

načež z rovnic

$$x^2+x=42$$
$$x^2+x=-45$$

najdeme tytéž kořeny jako způsobem prve uvedeným.

Správné řešení úlohy této zaslali pp.: *Vladimír Janků* ze VII. tř. akad. g. v Praze, *Goth. Nehasil* ze VII. tř. české real. v Praze, *Ant. Vyskočil*, *J. Valečka* ze VI. tř. r., *Václav Sýkora*, *Karel Rosa* ze VII. tř. g. a *Arnošt Rosa* z VIII. tř. g. městské střední šk. na Malé Straně v Praze, *Ignác Rath* ze VII. tř. g. v Českých Budějovicích, *Boh. Vávra* ze VII. tř. g. ve Spálené ulici v Praze, *Václav Posejpal* a *Frant. Schindler* ze IV. tř. r. g. v Kutné Hoře, *Jan Matoušek* a *Jindřich Gloza* ze VI. tř. g. v Kroměříži.

Řešení úlohy 26.

(Zaslal p. *Goth. Nehasil,* stud. VII. tř. české realky v Praze.)

Pišme prvou rovnici v podobě

$$\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\cos y}{\sin y}=\frac{1}{8}$$

a dosaďme z rovnice druhé

$$\sin y=\frac{26}{25}\sin x.$$

Tím obdržíme rovnici

$$104\cos x-13\sin x=4\sqrt{625-676\sin^2 x},$$

která zdvojmocněním a užitím vztahu

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

promění se ve

$$816 \cos^2 x - 2704 \cos x \sin x + 985 \sin^2 x = 0$$

čili $$816 \operatorname{cotg}^2 x - 2704 \operatorname{cotg} x + 985 = 0.\text{*})$$

Odtud vypočítáme

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1352 \pm 1012}{816},$$

tedy

$$\operatorname{cotg} x_1 = \frac{197}{68}, \quad \operatorname{cotg} x_2 = \frac{5}{12},$$

$$\operatorname{cotg} y_1 = \frac{377}{136}, \quad \operatorname{cotg} y_2 = \frac{7}{24},$$

načež z tabulek nalezneme

$$x_1 = 19^\circ 2' 37'', \quad x_2 = 67^\circ 22' 48'',$$

$$y_1 = 19^\circ 50' 12'', \quad y_2 = 73^\circ 44' 23''.$$

Správné řešení úlohy této zaslali pp.: *Josef Čeřovský* ze VI. tř. r. v Hradci Králové, *Vladimír Janků* ze VII. tř. akad. gymn. v Praze, *Karel Fritsche* ze VII. tř. g. v Příbrami, *Václav Hromádko* ze VII. tř. g. v Táboře, *Arnošt Rosa* z VIII. tř. a *Karel Rosa* ze VII. tř. g. městské střední šk. na Malé Straně v Praze a *M. Veleslav Popper* z VIII. tř. g. v Písku.

---

*) Kdybychom byli bývali z rovnice $\cot y = \frac{8 \cot x - 1}{8}$, tuto hodnotu za $\cot y$ dosadili do rovnice $26 \sin x = 25 \sin y$, kterou píšeme ve tvaru

$$26^2 (1 + \cot^2 y) = 25^2 (1 + \cot^2 x),$$

dospěli bychom též k hořejší rovnici.

Řešení úlohy 27.

(Zaslal p. *Karel Rosa*, stud. VII. tř. g. městské střední školy na Malé Straně v Praze.)

Střed O kružnice, opsané hledanémů trojúhelníku ABC leží na prodloužené přímce VT, a sice jest $OT = \frac{1}{2} VT$; tím dán poloměr $R = OB$ této kružnice. Rovněž leží půlící bod D strany AC na prodloužené BT, a sice jest $TD = \frac{1}{2} BT$.

Sestrojíme-li tedy s bodu D kolmici na prodlouženou BV, až se obě setkají v E, a protneme-li kolmici tuto kružnicí o poloměru OB, najdeme vrcholy A a C hledaného trojúhelníku ABC.

Že T je těžištěm trojúhelníku, je zřejmo. Spojíme-li však střed S strany AB s O a s C, a prodloužíme-li CV, až protne stranu AB v F, bude CF také výškou, neboť $\triangle CVT \sim \triangle OST$, a že $OS \perp AB$, bude i $CF \perp AB$. Je tedy V průsečíkem výšek sestrojeného trojúhelníku.

Správné řešení úlohy této podali pp.: *Vladimír Janků* ze VII. tř. akad. gymn. v Praze, *Jos. Čeřovský* ze VI. tř. r. v Hradci Králové, *Goth. Nehasil* ze VII. tř. české realky v Praze, *Arnošt Rosa* z VIII. tř. g. městské střední šk. na Malé Straně v Praze a *Jan Matoušek* ze VI. tř. g. v Kroměříži.

Řešení úlohy 28.

(Zaslal p. *Vladimír Janků*, stud. VII. tř. akad. gymn. v Praze.)

Základna AC hledaného trojúhelníku ABC budiž ode středu O opsané kružnice o poloměru R vzdálena o m, i bude pak rovnice dané kružnice

$$x^2 + (y - m)^2 = R^2$$

se vztahem na pravoúhlou soustavu souřadnic, jejíž osa úseček jest AC a osa pořadnic půlí AC v bodu E. Znamená-li pak

ξ a η souřadnice těžiště T, přejde hořejší rovnice pro $x = 3\xi$ a $y = 3\eta$ ve tvar

$$9\xi^2 + (3\eta - m)^2 = R^2$$

aneb

$$\xi^2 + \left(\eta - \frac{m}{3}\right)^2 = \left(\frac{R}{3}\right)^2,$$

t. j. je-li základna trojúhelníku od středu O opsané kružnice o poloměru R vzdálena o m, leží jeho těžiště T na obvodu kružnice o poloměru $\frac{R}{3}$, jejíž střed O jest od základny vzdálen o $\frac{m}{3}$,

Že pak těžiště T trojúhelníku jest ode středu O vzdáleno o $\frac{n}{2}$, protněme těžišťovou kružnici kružnicí, opsanou kolem O poloměrem $\frac{n}{2}$. Každý průsečík T neb T′ dá nám těžiště hledaného trojúhelníku. Prodloužíme-li ještě ET neb ET′ až k obvodu dané kružnice, najdeme třetí vrchol B neb B′ trojúhelníku ABC neb AB′C.

Důkaz podobný důkazu v předcházejícím úkolu, vyplývá z konstrukce.

Jiné řešení úlohy 28.

(Zaslal p. *Ant. Čeřovský*, stud. VI. tř. r. v Hradci Králové.)

Užijme téhož označení jako v úloze 27.

Je-li AC základna hledaného trojúhelníku ABC, jest

$$AV \perp BC, \quad CV \perp AB,$$

pročež

$$\sphericalangle AVC = 2R - \sphericalangle ABC.$$

Leží tedy průsečík výšek V na kružnici, která má tetivu AC a jest dle této souměrna ke kružnici opsané o trojúhelník ABC.

Mimo to, je-li $VT = n$, jest $OV = \frac{3}{2}n$, a bod V náleží kružnici opsané z O poloměrem $\frac{3}{2}n$.

Ustanovíme-li bod V jakožto průsečík dvou kružnic, lze trojúhelník ABC snadně dokončiti.

Správné řešení úlohy této zaslali pp.: *Arnošt Rosa* z VIII. tř. g. a *Karel Rosa* ze VII. tř. gymn. městské střední školy na Malé Straně v Praze.

Řešení úlohy 29.

(Zaslal p. *Arnošt Rosa,* stud. VIII. tř. g. městské střední školy na Malé Straně v Praze.)

Je-li ABC hledaný trojúhelník, $a = \mathrm{BC}$, a je-li výška BE na AC rozpůlena bodem V, a strana AC rozpůlena bodem D, bude

$$\mathrm{OD} = \frac{1}{2}\mathrm{BV} = \frac{1}{2}\mathrm{VE} = \frac{1}{4}\mathrm{BE}.$$

Vedeme-li pak středem O kružnice přímku $\mathrm{O}m \parallel \mathrm{AC}$, až protne výšku BE v bodě n a stranu BC v bodě m, bude $\mathrm{O}n \perp \mathrm{BE}$ a nejen $n\mathrm{E} = \frac{1}{4}\mathrm{BE}$, nýbrž i $m\mathrm{C} = \frac{1}{4}\mathrm{BC}$.

Vnesme tedy do dané kružnice tetivu $\mathrm{BC} = a$, rozdělme ji na čtvrtiny a poslední dělící bod m spojme se středem O dané kružnice. Tetiva $\mathrm{AC} \parallel \mathrm{O}m$ bude stranou hledanou žádaného trojúhelníka.

Důkaz jako v úloze 27.

Správné řešení úlohy této zaslali pp.: *Josef Čeřovský* ze VI. tř. r. v Hradci Králové, *Vladimír Janků* ze VII. tř. akad. gymn. v Praze, *Karel Rosa* ze VII. tř. g. měst. stř. šk. na Malé Straně v Praze a *Goth. Nehasil* ze VII. tř. české realky v Praze.

Řešení úlohy 30.

(Zaslal p. *Karel Rosa,* stud. VII. tř. g. městské střední šk. v Praze.)

Je-li ABC žádaný trojúhelník, a prochází-li bodem P strana AB, bodem Q strana BC, jest $\mathrm{PQ} \parallel \mathrm{AC}$, dělí-li body P a Q ony strany ve stejném poměru.

Sestrojíme-li v bodě A tečnu ke kružnici K opsané o trojúhelník ABC, a protíná-li tato spojnice PQ v bodě M, jest z důvodů blízkých

$$\triangle APM \sim \triangle QPB,$$

pročež

$$AP : PM = PQ : PB$$

čili

$$AP \,.\, PB = PM \,.\, PQ.$$

Leží tedy body A, B, M, Q na kružnici, a taktéž body A′, B′, M, Q, jsou-li A′, B′ průsečíky kružnice K s libovolným paprskem jdoucím bodem P; neboť jest pak také

$$PA \,.\, PB = PA' \,.\, PB' = PM \,.\, PQ.$$

Z tohoto rozboru plyne následující sestrojení:

Veďme bodem P libovolnou sečnu, která danou kružnici K v bodech A′, B′ protíná; položme body těmi a bodem Q kružnici, která PQ seče v bodě M. Bodem M veďme ke kružnici K tečnu, která se jí dotýká ve vrcholu A trojúhelníka žádaného. Spojnice AP obsahuje druhý vrchol B a spojnice BQ vrchol třetí C. Ježto bodem M vždy dvě realné tečny vésti lze, má úloha dvě realná řešení.

Jiné řešení úlohy 30.

(Zaslal p. *Vlad. Janků*, stud. VII. tř. akad. gymn. v Praze.)

Žádaný trojúhelník budiž ABC. Aby body P na AB a Q na BC strany tyto rozdělovaly dle stejného poměru, musí být spojnice $PQ \parallel AC$.

Jsou tedy trojúhelníky PBQ a ABC podobny, a kružnice jim opsané se dotýkají vzájemně v bodě B. Neboť spojíme-li jejich středy O s A a B, a pak *o* s P a B, povstanou zase trojúhelníky $ABO \sim PBo$; tedy jest $\sphericalangle ABO = \sphericalangle PBo$. Leží tudíž středy O a *o* obou kružnic s temenem B na jediné přímce a středná $Oo = R - r$.

Opišme tedy kružnici, která prochází danými body P a Q a dané kružnice se dotýká uvnitř (Apolloniův problém dotyku) Bod dotyčný dá vrchol B.

Takové kružnice jsou možny dvě, tedy jsou možny i dva trojúhelníky. — Podobně, kdyby ležely body P a Q mimo plochu daného kruhu.

Správné řešení úlohy této zaslal též p. *Goth. Nehasil* ze VII. tř. české real. v Praze.

Řešení úlohy 31.

(Zaslal p. *Boh. Vávra*, stud. VII. tř. g. ve Spálené ulici v Praze.)

Danými body je dána i kružnice opsaná žádanému trojúhelníku ABC. Poloměr OU bude stranu a půliti a státi na ní kolmo. — Vedeme-li tedy tetivu VA || OU, bude VA směrem výšky a A jedním vrcholem trojúhelníka. Průsečík s přímek AS a OU dá pak střed strany a. Sestrojíme-li tedy bodem s tetivu kolmou na VA, obdržíme stranu $BC = a$ a tím hledaný trojúhelník.

Správné řešení úlohy této zaslali pp.: *Josef Čeřovský* ze VI. tř. r. v Hradci Králové, *Arnošt Rosa* z VIII. tř. g. a *Karel Rosa* ze VII. tř. gymn. městské střední školy na Malé Straně v Praze, *Goth. Nehasil* ze VII. tř. české real. v Praze, *Vladimír Janků* ze VII. tř. akad. gymn. v Praze a *Jan Matoušek* ze VI. tř. g. v Kroměříži.

Řešení úlohy 32.

(Zaslal p. *V. Komberec*, stud. V. tř. r. v Hradci Králové.)

Znamená-li r poloměr kružnice, bude strana pravidelného dvanáctiúhelníka, do ní vepsaného

$$s_{12} = r\sqrt{2-\sqrt{3}},$$

a opsaného

$$S_{12} = 2r(2-\sqrt{3}),$$

takže

$$S_{12} = \frac{2s_{12}^2}{r},$$

a tedy plocha

$$P_{12} = 12 \cdot \frac{2s_{12}^2}{r} \cdot \frac{r}{2} = 12 s_{12}^2 .$$

Správné řešení úlohy této zaslali pp.: *Boh. Vávra* ze VII. tř. g. v Spálené ulici v Praze, *Jos. Čeřovský* ze VI. tř. real. v Hradci Králové, *Vladimír Janků* ze VII. tř. akad. gymn. v Praze, *Zdeněk Tobolka* ze VII. tř. g. v Žitné ulici v Praze, *Karel Vrba* ze VI. tř. g. v Něm. Brodě, *M. Veleslav Popper* z VIII. tř. g. v Písku, *Antonín Plánička* a *Ignác Rath* ze VI. tř. g. v Č. Budějovicích, *Václav Hromádko* ze VII. tř. g. v Táboře, *Jan Matoušek* ze VI. tř. g. v Kroměříži, *Karel Rosa* ze VII. tř. g., *Ant. Vyskočil*, *J. Valečka* ze VI. tř. r. a *Arnošt Rosa* z VIII. tř. g. městské střední šk. na Malé Straně v Praze a *Karel Fritsche* ze VII. tř. g. v Příbrami.

Řešení úlohy 33.

(Zaslal p. *Jan Matoušek,* stud. VI. tř. g. v Kroměříži).

Budiž ABC hledaný trojúhelník. Úhel β proti straně b, závislý na dané straně a dané kružnici, musí býti obvodovým úhlem v této kružnici i v kružnici, opsané v trojúhelníku PBQ.

Vepišme tedy dané kružnici trojúhelník o straně SM, procházející danými body P a Q, a o straně MN $= b$. Pak bude $\sphericalangle$ MSN $= \beta$. Veďme PT $\perp$ SN, rozpůlme PQ bodem m a vztyčme $mo \perp$ PQ; pak bude také $\sphericalangle Pom = \beta = \sphericalangle$ PBQ, je-li B průsečíkem dané kružnice s kružnicí opsanou kolem o poloměrem oP. Trojúhelníkem PBQ je stanoven i hledaný ABC. — Dle polohy obou kružnic najdeme dva neb jeden žádaný trojúhelník, aneb nebude žádného.

Předpokládali jsme tuto, že body P a Q leží uvnitř daného kruhu; kdyby tomu nebylo tak, bylo by sestrojování podobné.

Správné řešení úlohy této zaslali pp.: *Josef Čeřovský* ze VI. tř. r. v Hradci Králové a *Karel Rosa* ze VII. tř. g. měst. stř. školy na Malé Straně v Praze.

Řešení úlohy 34.

(Zaslal p. *Václav Hromádko*, stud. VII. tř. g. v Táboře.)

Budiž m délka úhlopříčky, která jest osou souměrnosti daného deltoidu, n délka úhlopříčky kolmé k prvé; průměr kružnice vepsané jest

$$2r = \frac{2ab}{a+b}.$$

Závislosť stran a úhlopříček vyjadřují rovnice

$$m = \sqrt{a^2 - \frac{n^2}{4}} + \sqrt{b^2 - \frac{n^2}{4}},$$

$$mn = 2(a+b)r,$$

z kterých vyloučivše m a r, obdržíme

$$\sqrt{a^2 - \frac{n^2}{4}} + \sqrt{b^2 - \frac{n^2}{4}} = \frac{2ab}{n}.$$

Upravíme-li rovnici tuto na tvar racionálný

$$(a^2+b^2)^2 n^4 - 8a^2b^2(a^2+b^2)n^2 + 16a^4b^4 = 0,$$

nalezneme

$$n = \frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

a tudíž

$$m = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Odtud následuje, že úhly různoběžníka, jimiž prochází úhlopříčka n, jsou pravé.

Řešení úlohy této zaslali pp.: *Vladimír Janků* z VIII. tř. akad. gymn. v Praze, *Arnošt Rosa* z VIII. tř. a *Karel Rosa* ze VII. tř. g. městské střední šk. v Praze, *Jan Matoušek* ze VI. tř. g. v Kroměříži a *K. Fritsche* ze VII. tř. g. v Příbrami.

Řešení úlohy 35.

(Zaslal p. *Jos. Čeřovský*, stud. VI. tř. r. v Hradci Králové.)

Budiž dán rovnostranný trojúhelník abc středu o a na kružnici vepsané zvolen bod m. Označme

$$\overline{ab} = \overline{bc} = \overline{ca} = s,$$

$$\overline{oa} = \overline{ob} = \overline{oc} = r = \frac{s}{3}\sqrt{3},$$

$$\overline{om} = \varrho = \frac{s}{6}\sqrt{3},$$

$$\overline{am} = a, \quad \overline{bm} = b, \quad \overline{cm} = c.$$

Je-li dále

$$\sphericalangle com = \alpha < 120^0,$$

jest

$$a^2 = r^2 + \varrho^2 - 2r\varrho \cos(120^0 - \alpha)$$
$$b^2 = r^2 + \varrho^2 - 2r\varrho \cos(120^0 + \alpha)$$
$$c^2 = r^2 + \varrho^2 - 2r\varrho \cos \alpha,$$

čili

$$a^2 = \frac{5s^2}{12} + \frac{s^2}{6}\cos\alpha - \frac{s^2}{6}\sqrt{3}\,.\sin\alpha$$

$$(1) \qquad b^2 = \frac{5s^2}{12} + \frac{s^2}{6}\cos\alpha + \frac{s^2}{6}\sqrt{3}\,.\sin\alpha$$

$$c^2 = \frac{5s^2}{12} - \frac{s^2}{3}\cos\alpha.$$

Sečtením rovnic těchto plyne přímo

$$(\mathrm{I}) \qquad a^2 + b^2 + c^2 = \frac{5s^2}{4}.$$

Z rovnic (1) obdržíme snadným způsobem

$$a^2b^2 = \frac{13s^4}{144} + \frac{5s^4}{36}\cos\alpha + \frac{s^4}{9}\cos^2\alpha$$

$$(2) \qquad b^2c^2 = \frac{25s^4}{144} - \frac{5s^4}{72}\cos\alpha - \frac{s^4}{18}\cos^2\alpha + p$$

$$c^2a^2 = \frac{25s^4}{144} - \frac{5s^4}{72}\cos\alpha - \frac{s^4}{18}\cos^2\alpha - p,$$

kdež položeno

$$p = \frac{s^4}{72}\sqrt{3}\,[5 - 4\cos\alpha]\sin\alpha.$$

Sečtením rovnic (3) vyjde

$$\text{(II)} \qquad a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = \frac{7s^4}{16};$$

jestliže pak od zdvojmocněné rovnice (I) odečteme zdvojnásobenou rovnici (II), nabudeme vztahu

$$\text{(III)} \qquad a^4 + b^4 + c^4 = \frac{11s^4}{16}.$$

Značí-li pak $\triangle$ obsah trojúhelníka ze stran a, b, c sestrojeného, $\triangle'$ obsah trojúhelníka rovnostranného, jest

$$16\triangle^2 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)$$

a proto

$$\triangle = \frac{s^2}{16}\sqrt{3} = \frac{1}{4}\triangle'.$$

Správné řešení úlohy této zaslali pp.: *Jan Matoušek* ze VI. tř. g. v Kroměříži, *Arnošt Rosa* z VIII. tř. a *Karel Rosa* ze VII. tř. g. městské střední škole na Malé straně v Praze.

Řešení úlohy 36.

(Zaslal p. *Arnošt Rosa*, stud. VIII. tř. g. městské stř. školy v Praze.)

Body a, b nechť procházejí rovnoběžky

$$\begin{aligned} A &\equiv y - 7 - \alpha(x - 8) = 0 \\ B &\equiv y - 3 - \alpha(x + 1) = 0 \end{aligned}$$

a body c, d k přímkám těm kolmice

$$C \equiv y - 3 + \frac{1}{\alpha}(x - 9) = 0$$

$$D \equiv y + 3 + \frac{1}{\alpha}(x - 7) = 0.$$

Uvedeme-li rovnice těchto čtyr přímek na tvar normálný

$$A \equiv \frac{\alpha x - y - 8\alpha + 7}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} = 0$$

$$B \equiv \frac{\alpha x - y + 3 + \alpha}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} = 0$$

$$C \equiv \frac{x + \alpha y - 3\alpha - 9}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} = 0$$

$$D \equiv \frac{x + \alpha y + 3\alpha - 7}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} = 0,$$

najdeme odtud snadně vzdálenosť v_1 přímek A, B i vzdálenosť v_2 přímek C, D; jestiť

$$v_1 = \frac{8\alpha - 4}{\sqrt{\alpha^2 + 1}}, \quad v_2 = \frac{6\alpha + 2}{\sqrt{\alpha^2 + 1}}.$$

Aby přímky A, B, C, D omezovaly čtverec, k tomu jest nutna i dostatečna podmínka

$$v_1 = \pm v_2$$

čili

$$4\alpha - 2 \mp (3\alpha + 1) = 0.$$

Jest tedy

$$\alpha = 3 \quad \text{aneb} \quad \alpha' = \frac{1}{7}.$$

V prvním případě ($\alpha = 3$) obdržíme přímky

$$A \equiv 3x - y - 14 = 0, \quad B \equiv 3x - y + 6 = 0,$$
$$C \equiv x + 3y - 18 = 0, \quad D \equiv x + 3y + 2 = 0,$$

omezující čtverec vrcholů

$$m\,(6,\ 4),\quad n\,(0,\ 6),\quad p\,(-2,\ 0),\quad q\,(4,\ -2);$$

v druhém případě $\left(\alpha' = \frac{1}{7}\right)$ jest přímkami

$$A' \equiv x - 7y + 42 = 0, \quad B' \equiv x - 7y + 22 = 0,$$
$$C' \equiv 7x + y - 66 = 0, \quad D' \equiv 7x + y - 46 = 0,$$

omezen čtverec vrcholů

$$m'\,(8{\cdot}4,\ 7{\cdot}2),\quad n'\,(8{\cdot}8,\ 4{\cdot}4),\quad p'\,(6,\ 4),\quad q'\,(5{\cdot}6,\ 6{\cdot}8).$$

Délky stran těchto čtverců jsou

$$s = 2\sqrt{10}, \quad s' = 2\sqrt{2}.$$

Správné řešení úlohy této zaslali pp.: *Vladimír Janků* ze VII. tř. akad. gymn. v Praze, *Goth. Nehasil* ze VII. tř. české realky v Praze, *Jos. Čeřovský* ze VI. tř. r. v Hradci Králové, *Karel Rosa* ze VII. tř. g. městské střední školy na Malé Straně v Praze, *Boh. Vávra* ze VII. tř. g. ve Spálené ulici v Praze, *M. Veleslav Popper* z VIII. tř. g. v Písku a *K. Fritsche* ze VII. tř. g. v Příbrami.

Správné řešení úlohy 23. zaslal též p. *Boh. Vávra*, stud. VII. tř. g. ve Spálené ulici v Praze.*)

Řešení cenné úlohy z deskriptivní geometrie.**)

Rozbor. Každá plocha kulová proložená kružnicí K_1 seče centralně promítající plochu kuželovou (sK_1) ve dvou kružnicích K_1 a K. Neboť pronik jest řádu čtvrtého a jednou jeho částí je kružnice K_1; druhá část K musí tedy býti také křivkou druhého stupně, ale tou může býti na ploše kulové zase jen kružnice. Aby pak bylo $K \cong K_1$, musí býti střed plochy kulové na ose O kuželové plochy (sK_1), tudíž v průsečíku osy O s osou kružnice K_1.

Sestrojení. Spojnice $c_1 o_1$ protínej průmět K_1 v bodech a_1, b_1. Osa O plochy kuželové (sK_1), ležíc v hlavní rovině plochy $\lambda \equiv (sa_1 b_1)$ rozpoluje $\sphericalangle a_1 s b_1$. Abychom ji zobrazili, učiňme rovinu λ průmětnou vedlejší, promítněme na ni plochu (sK_1) *pravoúhelně*, sklopme ji okolo $\lambda_1 \equiv c_1 o_1$ do průmětny hlavní π, i znamenejme vůbec symbolem u' vedlejší průmět útvaru u. Sestrojme $c_1 s' \perp \lambda_1$, $c_1 s' = d$, spojme $a_1 s'$, $b_1 s'$; $a_1 s' b_1$ jest vedlejší průmět plochy kuželové, osa O' úhlu $a_1 s' b_1$ průmět osy plochy kuželové, $o_1 u' \perp a_1 b_1$ průmět osy kružnice K_1, průsečík její u' na O' průmět středu pomocné plochy kulové, kružnice R_1 opsaná ze středu u' poloměrem $u' a_1$ obrysem prů-

*) Připomínáme, že dva řešitelé úloh se zapomněli podepsati.

**) Viz str. 219.

mětu plochy kulové, tetiva $a'b' \equiv \mathrm{K}'$ souměrná ku $a_1 b_1$ dle O′ vedlejším průmětem žádané kružnice K, přímka pak $a'b' \equiv \xi'$ průmětem její roviny ξ. Jelikož $\xi \perp \lambda$, jde stopa P^{ξ} průsečíkem ξ' a λ_1, bodem $m_1, \perp \lambda_1$; $s'\mu_1 \parallel \xi'$ dá na λ_1 hlavní úběžník μ_1 roviny ξ, jímž pak jde úběžnice $\mathrm{U}_1{}^{\xi} \parallel \mathrm{P}_1{}^{\xi}$. Druhá osa (vedlejší průmět $s'n_1 \perp \mathrm{O}'$) plochy kuželové ($s\mathrm{K}_1$), obsažená v rovině λ, vede ke druhé kružnici L úloze vyhovující; avšak kružnice $\mathrm{K} \cong \mathrm{L}$ jsou ke středu s středově souměrny, roviny jejich $\xi \parallel \eta$ mají rovné vzdálenosti od středu ($\xi' \parallel \eta' \parallel s'\mu_1$), pročež $\mu_1 n_1 = \mu_1 m_1$, $n_1 \mathrm{P}_1{}^{\eta} \parallel \mathrm{P}_1{}^{\xi}$, $\mathrm{U}_1{}^{\eta} \equiv \mathrm{U}_1{}^{\xi}$.

Pan Vincenc Jarolímek, professor c. k. české vyšší realky Pražské, který úlohu tuto navrhl, uznal, že za zdařilé řešení dostati mají ceny, výborem J. Č. M. vypsané, studující středních škol jak následují:

a) Za řešení dokonalé:

Goth. Nehasil ze VII. tř. české realky v Praze.
Jindř. Hovorka ze VII. tř. české realky v Praze.
Em. Hlavatý ze VII. tř. r. v Hradci Králové.
Jindřich Vít ze VII. tř. r. v Hradci Králové.
Lad. Červenka ze VII. tř. r. v Pardubicích.
Lad. Otta ze VII. tř. r. v Pardubicích.
K. Vaňouček ze VII. tř. r. v Pardubicích.
Frant. Novotný ze VII. tř. r. na Malé Straně v Praze.
Frant. Rybka ze VII. tř. české realky v Brně.
Boh. Pavlousek z VIII. tř. g. v Ml. Boleslavi.

b) Za řešení správné:

Ant. Kříž ze VII. tř. r. na Malé Straně v Praze.
Břet. Fořt ze VII. tř. r. na Malé Straně v Praze.
Karel Rosa ze VII. tř. g. na Malé Straně v Praze.
Gust. Procházka ze VI. tř. české realky v Praze.
Zd. Sláma ze VI. tř. české realky v Praze.