Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Antonín Pleskot

Stanovení společných sečen a tečen dvou kuželoseček o společné ose

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 37 (1908), No. 4, 424--441

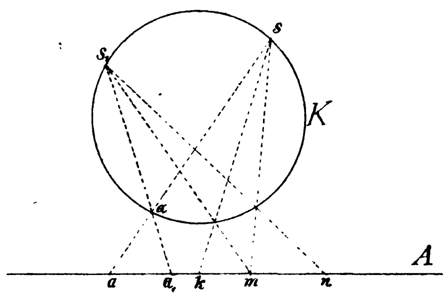
Stanovení společných sečen a tečen dvou kuželoseček o společné ose. *)

Studujícím napsal Dr. **Ant. Pleskot**, professor v Plzni

I.
O řadách involučních.

Dříve než k řešení předložené úlohy přistoupíme, zmíníme se stručně o řadách bodových na téže přímce.

Budiž dána přímka X a na té libovolný bod a, jemuž přiřaďme dle určitého zákona bod a_1 na téže přímce ležící. Zákon ten budiž takový, že ku každému bodu a přímky X patří jen jediný bod a_1, a naopak každému a_1 jen jediný bod a.



Obr. 1.

Tím obdržíme na přímce X dvě řady bodové, řadu a, b, c a t. d. a k ní patřící řadu bodů a_1, b_1, c_1 a t. d., při čemž ovšem kterýkoli bod m přímky můžeme pokládati buď za bod řady prvé aneb řady druhé. Dvě takové řady slují řadami promětnými aneb projektivními. Ty vyskytují se často již v elementárních úlohách geometrických i v úvahách fysikálních, jmenovitě optických. Příklad na řady takové jest následující.

Budiž dána kružnice K a přímka A (obr. 1).

---

*) V pojednání tomto řeší se úlohy v článcích pp. Kálala, Lehovce a Archleba řešené methodou, založenou na nauce o involucích, do níž tato úvaha zároveň uvádí. *R.*

Na kružnici zvolme dva pevné libovolné body s a s_1; na přímce A vytkněme libovolný bod a a k němu stanovme takto bod a_1: Bod a spojme s bodem s přímkou, která protne kružnici v bodě α. Bod α spojme s bodem s_1 a průsečík a_1 přímek $s_1\alpha$ a A přiřaďme bodu a. Jest patrno, že tímto způsobem k libovolnému bodu a přímky A patří jen jediný bod a_1 a naopak k bodu a_1 jen jediný bod a, neboť přímka sa aneb s_1a_1 protne kružnici jen v jediném dalším bodě α.

Jest dále zřejmo, že libovolnému bodu m přímky A odpovídají, dle toho ku které řadě bod m počítáme, různé body; tak počítáme-li bod m ku řadě prvé, odpovídá mu bod n řady druhé, kdežto počítáme-li m k řadě druhé, odpovídá mu bod k řady prvé.

Pro řešení úlohy naší stačí, omezíme-li se na řady jednodušší a to takové, kde k libovolnému bodu m přímky patří vždy týž bod, ať bod m počítáme k řadě prvé neb druhé. Takové řady nazýváme řadami *involučními*; příklad k nim jest tento:

Na přímce X nechť jsou dány dva pevné body r a s. K libovolnému bodu a přímky X stanovme harmonický bod a_1 hledíc k bodům r a s. Body a a a_1 probíhají pak dvě řady, jež jsou involučními, neboť jest patrno, že libovolnému bodu m přímky patří vždy týž bod, ať bod m patří prvé neb druhé řadě.

Snadným způsobem lze stanoviti závislost poloh bodu a a a_1 počtářsky. Zvolíme-li na ose X libovolný bod o za počátek a stanovíme-li určitý směr za kladný, pak možno polohu libovolného bodu na ose určiti jeho úsečkou hledíc k počátku o.

Označíme-li úsečku bodu a písmenem x, úsečku bodu a_1 písmenem x_1, pak mezi veličinami x a x_1 musí platiti závislost, již možno vyjádřiti rovnicí:

$$kxx_1 + hx + mx_1 + n = 0,$$

při čemž k, h, m, n značí jisté konstanty. Závislost musí proto dána býti rovnicí předchozí, poněvadž k danému x patří jen jediné x_1 a naopak; nesmí proto x aneb x_1 vyskytovati se ve vyšší mocnině než prvé.

Rovnice hořejší vyjadřuje obecně vztah mezi řadami projektivními; jsou-li ale řady involuční, možno jí dáti tvar jednodušší.

Poněvadž v řadách těch k bodu o úsečce x patří bod o úsečce x_1, ať bod prvý počítáme ku kterékoli řadě, nutno aby platily rovnice:

$$kxx_1 + hx + mx_1 + n = 0,$$
$$kxx_1 + hx_1 + mx + n = 0,$$

z nichž druhá plyne z prvé, vyměníme-li x za x_1.

Odečtením předchozích rovnic obdržíme:

$$(m - h)(x - x_1) = 0.$$

Protože rovnice tato platí pro libovolné $x - x_1$, jest nutno, aby platilo:

$$m - h = 0,$$

t. j.

$$m = h.$$

Pro involuční řady nabýváme tedy rovnice:

$$kxx_1 + h(x + x_1) + n = 0,$$

čili

$$k \,.\, \overline{oa} \,.\, \overline{oa_1} + h(\overline{oa} + \overline{oa_1}) + n = 0,$$

z níž naopak, ježto dle $\overline{oa}$ a $\overline{oa_1}$ jest souměrnou, involuční vlastnost plyne. Rovnici tuto ještě zjednodušíme tím, že bod o položíme do bodu, který odpovídá v daných řadách bodu nekonečně vzdálenému. Bod tento sluje centrálním bodem daných řad involučních; označíme-li ho i, pak místo rovnice předchozí máme rovnici:

$$k \,.\, \overline{ia} \,.\, \overline{ia_1} + h(\overline{ia} + \overline{ia_1}) + n = 0, \qquad \text{I.}$$

aneb rovnici:

$$k \,.\, \overline{ia_1} + h\left(1 + \frac{\overline{ia_1}}{\overline{ia}}\right) + \frac{n}{\overline{ia}} = 0.$$

Bod a má polohu docela libovolnou; položíme li ho do nekonečna, pak bod a_1 splyne s bodem i a tedy $\overline{ia} = \infty$, $\overline{ia_1} = \overline{ii} = 0$, čímž rovnice předchozí pro tyto hodnoty promění se v rovnici:

$$h = 0.$$

Rovnice definující involuci nabývá tedy tvaru:

$$k \,.\, \overline{ia} \,.\, \overline{ia_1} + n = 0,$$

čili

$$\overline{ia} \,.\, \overline{ia_1} = K, \qquad (\alpha)$$

při čemž $K = -\dfrac{n}{k}$ značí určitou veličinu konstantní.

Tím dospíváme k této důležité větě:

Jestli v řadách involučních bodu nekonečně vzdálenému odpovídá bod i, pak součin vzdáleností příslušných bodů a a a_1 *od bodu centrálního i musí býti stálý.* Jinak řečeno: Značí-li a, a_1, b, b_1, c, c_1 a t. d. dvojice příslušných bodů, musí vždy platiti:

$$\overline{ia} \,.\, \overline{ia_1} = \overline{ib} \,.\, \overline{ib_1} = \overline{ic} \,.\, \overline{ic_1} \text{ a t. d.}$$

Nyní možno se tázati, zdali v řadách involučních existují body takové, které samy k sobě patří. Pro bod takový, označme ho r, musí platiti $r \equiv r_1$; polohu jeho určíme dle rovnice (α), z níž plyne:

$$\overline{ir}^2 = K$$

t. j.

$$\overline{ir} = \pm \sqrt{K}.$$

Je-li tedy veličina K kladná, existují takové dva body a jich vzdálenost od centrálního bodu jest stejná rovnajíc se střední měřické úměrné délek $\overline{ia}$ a $\overline{ia_1}$, při čemž a a a_1 značí kterékoli dva body involucí k sobě příslušné. Body takové nazývají se dvojnými body řad involučních. Je-li K záporné, pak body takové neexistují, nejsou reálné, nýbrž imaginární. Veličina K jest kladná, jsou-li body a a a_1 na téže straně od bodu i, záporná, jsou-li na opačných stranách od bodu i, ježto v prvém případě ia a ia_1 jsou smyslu stejného, v druhém protivného. Leží-li tedy dva body involucí k sobě patřící na téže straně od bodu i, jsou dvojné body reálné, leží-li však na různých stranách od bodu i, jsou dvojné body imaginární.

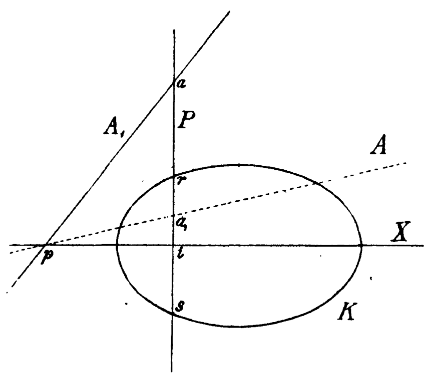
Vrátíme-li se k příkladu dřívějšímu, vidíme, že centrálný bod i, bod to harmonický, k úběžnému bodu osy x jest uprostřed mezi r a s a že tyto body jsou dvojnými body řad involučních; platí tedy

$$\overline{ia} \,.\, \overline{ia_1} = \overline{ir}^2 = \overline{is}^2,$$

kterážto vlastnost již z theorie harmonických bodů jest známa. Z příkladu tohoto naopak plyne důležitá vlastnost involučních řad s reálnými body dvojnými. Body involucí k sobě patřící jsou harmonicky sdružené hledíc k bodům dvojným aneb jinak řečeno:

body dvojné jsou harmonicky sdružené hledíc ku kterékoli dvojici involucí sobě příslušných bodů.

Rovnici (α) vyvinuli jsme pro případ, že bod centrální i nepadne do vzdálenosti nekonečné, nýbrž že jest v konečnu. Rovnice I. platí patrně pro bod i v konečnu, neboť jen od bodu v konečnu jsoucího můžeme stanoviti vzdálenosti $\overline{ia}$ a $\overline{ia_1}$. Padne-li bod i do nekonečna, pak ovšem pro involuční řady nemůžeme použíti rovnice (α); však vzpomeneme-li si na vlastnost dvojných bodů, ihned můžeme případ ten objasniti geometricky.



Obr. 2.

Bod v nekonečnu odpovídá tu opět sám sobě a jest proto dvojným bodem řad involučních; druhý dvojný bod s musí ku prvému býti harmonickým, hledíc ku kterékoli dvojici involucí k sobě patřících bodů; t. j. padne do středu vzdálenosti dvou involucí k sobě příslušných bodů.

Involuce v tomto případě definuje souměrnost. Body k sobě patřící jsou souměrné vzhledem ku středu symetrie s. Střed symetrie jest dvojným bodem involuce a druhý dvojný bod padne do vzdálenosti nekonečně velké.

Ještě jiné extremní případy již jaksi degenerovaných involucí mohly by se vyskytnouti; ty však nemají pro nás důležitosti, pročež o nich se nezmiňujeme.

Uveďme ještě jeden příklad involuce pro další úvahu velice důležitý. Budiž dána (obr. 2.) kuželosečka K a přímka P kolmá k ose X kuželosečky.

Na přímce P zvolme libovolný bod a a stanovme jeho poláru A hledíc ke kuželosečce, která nechť protne přímku P v bodě a_1, který přiřaďme bodu a. Pohybuje-li se bod a na P, pak pohybuje se i bod a_1 na P; k danému bodu a patří jediný bod a_1 a naopak. Tak dostáváme dvě řady projektivní, o nichž snadno dokážeme, že tvoří řady involuční.

To dokážeme, ukážeme-li, že k bodu a_1, považujeme li ho za bod řady prvé, patří bod a řady druhé. To ale plyne okamžitě, neboť polára A_1 bodu a_1, který leží na A prochází pólem a této přímky. K bodu a_1 prvé řady patří tedy opět bod a. Centrální bod i těchto řad určíme, stanovíme-li průsečík poláry úběžného bodu přímky P s přímkou P. Polárou tohoto úběžného bodu jest však osa X. Průsečík i přímky P s osou x jest tedy centrálním bodem.

Platí tedy o bodech a a a_1 rovnice (α)

$$\overline{ia} \cdot \overline{ia_1} = k,$$

kdež k značí konstantu, pohybuje-li se bod a na přímce P. Je-li pól p přímky P vně kuželosečky, jak v našem případě naznačeno, pak dvojné body těchto involučních řad jsou reálné a jsou to dotyčné body tečen z bodu m ke kuželosečce vedených aneb což totéž jest, průsečíky r a s přímky P s kuželosečkou; neboť poláry bodu r a s procházejí opět body r a s. Je li bod p uvnitř kuželosečky a tedy P neseče kuželosečku, pak ovšem platí opět relace:

$$\overline{ia} \cdot \overline{ia_1} = k,$$

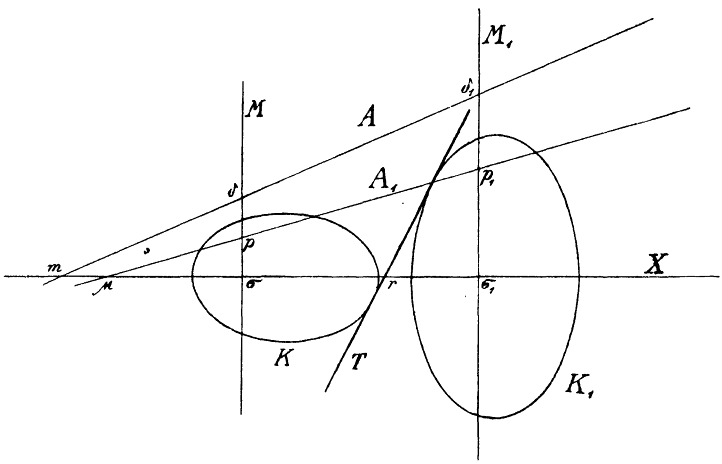
dvojné body však jsou imaginární; jsou to dotyčné body imaginárních tečen z bodu p ke kuželosečce vedených aneb což opět totéž jest, imaginární průsečíky přímky P s kuželosečkou.

Po této stručné úvaze možno přistoupiti k řešení předložené úlohy, t. j. stanoviti společné tečny dvěma kuželosečkám o společné ose.

II.

Strojení společných tečen dvou kuželoseček o společné ose.

Nechť jsou dány kuželosečky K a K_1, ku př. dvě ellipsy (obr. 3.), jichž společná osa budiž X.



Obr. 3.

Na ose X zvolme libovolný bod m, veďme jím libovolnou přímku A a stanovme póly její hledíc k oběma kuželosečkám. Pól přímky A hledíc ku K budiž p, hledíc ku K_1, p_1. Spojnice $pp_1 \equiv A_1$ protne osu X v bodě μ. Bodu m budeme moci přiřaditi jednoznačně bod μ, ukážeme-li že k libovolné přímce A bodem m procházející patří vždy taková přímka A_1, že prochází pokaždé týmž bodem μ na ose. To dokážeme takto:

Poláru bodu m hledíc ke kuželosečce K označme M, hledíc ke kuželosečce K_1, M_1. Průsečík přímky A s M budiž δ, přímky A s M_1, δ_1. Přímka M nechť protíná osu X v bodě σ, přímka M_1 v bodě σ_1.

Pol p jest patrně na poláře M a pol p_1 na M_1.

Body p a δ tvoří involuci na M, jejíž centrální bod jest σ, body p_1 a δ_1 tvoří involuci na M_1, jejíž centrální bod jest σ_1.

Dle dřívějšího platí tedy:

$$\overline{\sigma p} \,.\, \overline{\sigma \delta} = k,$$

$$\overline{\sigma_1 p_1} \,.\, \overline{\sigma_1 \delta_1} = k_1,$$

při čemž k a k_1 značí konstanty, otáčí-li se přímka A kol bodu m.

Z rovnic těchto plyne:

$$\frac{\overline{\sigma p}}{\overline{\sigma_1 p_1}} = \frac{k}{k_1} \frac{\overline{\sigma_1 \delta_1}}{\overline{\sigma \delta}}.$$

Poněvadž

$$\frac{\overline{\sigma \delta}}{\overline{\sigma_1 \delta_1}} = \frac{\overline{m\sigma}}{\overline{m\sigma_1}},$$

$$\frac{\overline{\sigma p}}{\overline{\sigma_1 p_1}} = \frac{\overline{\sigma \mu}}{\overline{\sigma_1 \mu}},$$

jest i:

$$\frac{\overline{\sigma \mu}}{\overline{\sigma_1 \mu}} = \frac{k}{k_1} \cdot \frac{\overline{\sigma_1 m}}{\overline{\sigma m}}. \qquad (\beta)$$

Dělící poměr $\frac{\overline{\sigma \mu}}{\overline{\sigma_1 \mu}}$ bodu μ vzhledem k stálým bodům σ a σ_1 jest týž, ať směr přímky A bodem m jdoucí jest jakýkoli; t. j. spojnice pp_1 prochází vždy týmž bodem μ.

Možno tedy přisouditi dle naší konstrukce ku libovolnému bodu m osy X jen jediný bod μ téže osy a naopak a sice dle zákona, který ještě jednou opakujme:

Libovolným bodem m osy společné veďme libovolnou přímku A, k té stanovme póly hledíc k oběma kuželosečkám, spojme je přímkou A_1, kteráž protne osu v bodě μ, jejž přiřaďme bodu m. Tím způsobem dostaneme na ose X dvě řady bodů m, n, a t. d. μ, ν, a t. d., o nichž okamžitě plyne, že jsou involuční.

Považujeme li totiž bod μ za bod řady prvé a vedeme-li bodem tím libovolnou přímku, ku př. A_1 (obr. 3.), pak pól její hledíc ku K_1, poněvadž prochází bodem p_1, jest na přímce A a poněvadž prochází bodem p, jest pol její hledíc ku K taktéž na přímce A, t. j. počítáme li bod μ ku řadě prvé patří k němu opět bod m řady druhé. Řady bodů m a μ jsou tedy involuční.

Přímky A a A_1, z nichž každá prochází póly druhé hledíc k oběma kuželosečkám, zovou se konjugované přímky hledíc k oběma kuželosečkám.

Označme dvojné body těchto řad r a s. Veďme jedním z nich, ku př. bodem r, tečnu k jedné z kuželoseček ku př. ku K. Konjugovaná přímka k této tečně prochází opět bodem r a pólem jejím vzhledem ku K, t. j. dotyčným bodem tečny, čili jest sama k sobě konjugovaná a poněvadž obsahuje i pól hledíc ke kuželosečce druhé, musí býti i tečnou ke kuželosečce druhé. Jinak řečeno: Dvojné body r a s hořejších řad involučních jsou body, jimiž procházejí společné tečny k oběma kuželosečkám. Poněvadž existují dva dvojné body, lze obecně stanoviti čtyry tečny společné. Tyto dvojné body nalezneme dle dřívějšího snadno; třeba napřed k úběžnému bodu osy X nalézti příslušný centrální bod i. Ten nalezneme, vedeme-li k ose X libovolnou rovnoběžku R a stanovíme póly této přímky hledíc k oběma kuželosečkám, jimiž proložíme přímku R_1, která protne osu X v hledaném bodě i. Dvojné body r a s nalezneme, vyhledáme li ještě v daných řadách dva sobě příslušné body m a μ. Narýsujeme tedy libovolnou přímku A, která protne osu X v bodě m a stanovíme současně póly této přímky hledíc k oběma kuželosečkám. Spojnice A_1 těchto bodů protne osu X v bodě μ.

Body r a s určíme pak z podmínky:

$$\overline{im} \cdot \overline{i\mu} = \overline{ir}^2 = \overline{is}^2,$$

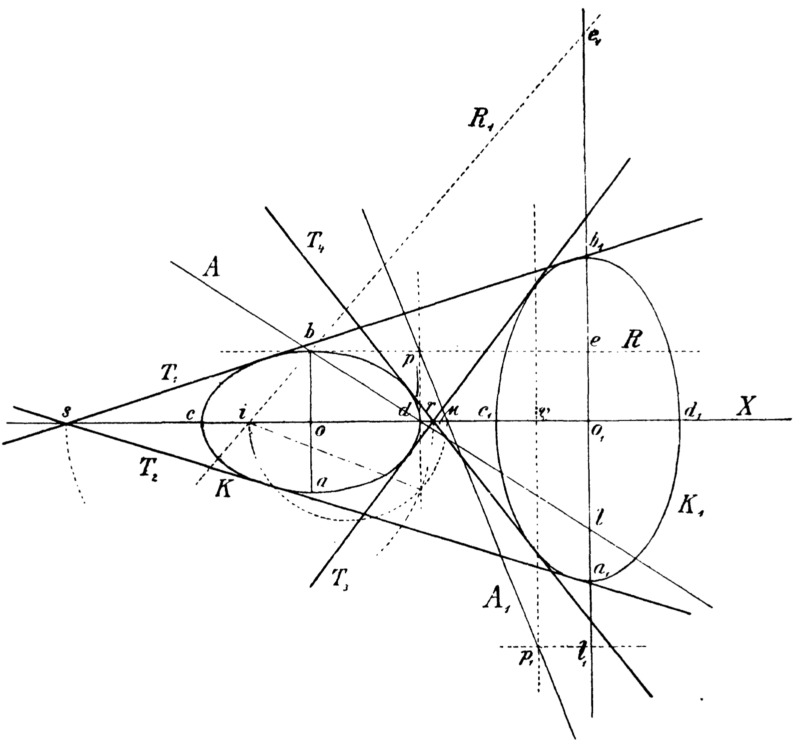
t. j.

$$\overline{iv} = \sqrt{\overline{im} \cdot \overline{i\mu}}\,,$$

$$is = -\sqrt{i\mu \cdot im}.$$

Sestrojíme tedy střední geometricky úměrnou mezi $\overline{im}$ a $\overline{i\mu}$ a tu naneseme v obou směrech od bodu i, čímž nalezneme body r a s a jimi vedeme tečny k jedné z obou kuželoseček.

Mají-li býti body r a s reálné, nutno, aby body m a μ ležely na téže straně od bodu i. Však nemusí existovati reálné tečny i když dvojné body jsou reálné. Padne-li ku př. dvojný bod dovnitř kuželosečky, pak ovšem tečny tímto bodem vedené nejsou reálné, avšak bod dvojný má i v tomto případě důležitý význam. Jest to průsečík imaginárných konjugovaných tečen, které, ač jsou imaginarné, mají přece průsečík reálný. Jsou-li m a μ na různých stranách od bodu i, pak i body r a s jsou imaginárné. Tečny reálné v tomto případě vůbec nemohou existovati a i reálné průsečíky konjugovaných imaginárných tečen neleží na společné ose. Průsečíky imaginárných tečen konjugovaných mohli bychom také zvláštní úvahou kvadraticky určiti,



Obr. 4.

než upouštíme od toho, poněvadž úlohou naší je stanoviti, zdali tečny reálné existují a narýsovati tyto, když skutečně existují. Tuto úlohu však jsme úplně rozřešili.

Proveďme řešení úlohy této pro dvě ellipsy K a K_1 o společné ose X (obr. 4.).

Koncové body os splývajících nechť jsou u prvé c, d, u druhé c_1, d_1, koncové body os na nich kolmo stojících u prvé a a b, u druhé a_1 a b_1. Za přímku R volme tečnu ku K v bodě b. Pól této přímky hledíc ku K_1 ustanovíme, jestli ku průsečíku R a a_1b_1, t. j. k bodu e, určíme harmonický bod e_1 hledíc ku bodům a_1, b_1, aneb sestrojíme $\overline{o_1e_1}$ dle rovnice $\overline{o_1e} \cdot \overline{o_1e_1} = \overline{o_1b_1}^2$. Pól přímky R hledíc ku K jest dotyčný bod b. Přímka $R_1 \equiv be_1$ protne osu X v centrálním bodě i.

Za přímku A volme spojnici bd. Pól této přímky hledíc ku K jest bod p, průsečík to přímky R s přímkou bodem d kolmo ku ose X vedenou; bod d jest tedy bod, který jsme si dříve označili m. Zbývá určiti pól přímky A hledíc ku K_1. Ten určíme jako průsečík polár dvou bodů přímky A a sice nejpohodlněji těch bodů, v nichž přímka A protíná osy kuželosečky K_1, t. j. bodů d a l. Stanovíme k bodu d harmonický bod v hledíc ku c_1 a d_1 a k bodu l harmonický bod l_1 hledíc ku a_1 a b_1; bodem v a l_1 vedené rovnoběžky s osami a_1b_1 a c_1d_1 stanoví pól p_1 přímky A hledíc ku ellipse K_1. Spojnice $pp_1 \equiv A_1$ protne osu X v bodě u. Stanovíme-li nyní mezi $\overline{id}$ a $\overline{i\mu}$ střední měřicky úměrnou $\overline{i\varrho} = \sqrt{\overline{im} \cdot \overline{i\mu}}$ a naneseme-li nyní na přímku X od bodu i vzdálenost $\overline{i\varrho}$ na obě strany, obdržíme body r a s, jimiž společné tečny k oběma kuželosečkám procházejí. Vedeme tedy bodem r a s k jedné z kuželoseček tečny, čímž obdržíme hledané tečny T_1, T_2, T_3, T_4.

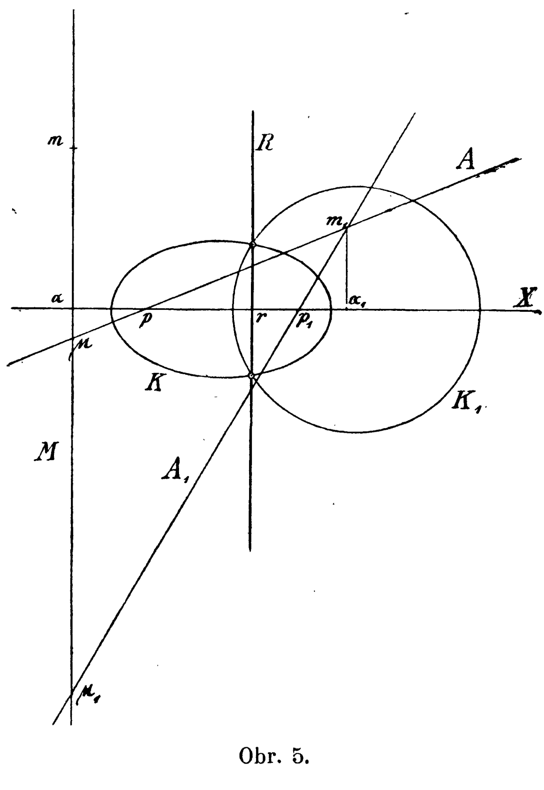
Jsou-li osy $\overline{ab}$ a $\overline{a_1b_1}$ sobě rovny, pak spojnice bb_1 a aa_1 jsou zajisté dvě z hledaných společných tečen. Jak druhé nalezneme, snadno uhodneme, uvážíme-li, že involuční řady na ose X jsou takové, že jejich centrální bod padne do vzdálenosti nekonečné velké. Setkáváme se případem, který jsme na začátku úvahy o řadách involučních objasnili a není proto třeba znovu poukazovati, jak druhý dvojný bod řad involučních, jimž druhé dvě tečny procházejí, nalezneme.

Docela stejným způsobem při jiném druhu dvou kuželoseček postupujeme. Vyhledání pólů přímky R a A neposkytuje žádných obtíží, jest vždy jednoduché. Pouze tolik podotýkáme, že za přímku A možno při hyperbole voliti asymptotu, neboť pól její k hyperbole jest přímo dán. Za přímku A nehodí se voliti přímku kolmou ku ose X, neboť konjugovaná přímka k této jest osa X. Za přímku R nehodí se ovšem také osa X, neboť konjugovaná k ní jest kterákoli přímka kolmá na osu X.

III.

Strojení průsečíků dvou kuželoseček o společné ose.

Přistupme nyní ku řešení úlohy duálné, nalézti totiž průsečíky dvou kuželoseček o společné ose.



Obr. 5.

Nechť jsou dány kuželosečky K a K_1 o společné ose X (obr. 5.).

Libovolným bodem m položme přímku M kolmo k ose X, jejíž pata budiž α. Stanovme poláru A bodu m hledíc ku K a poláru A_1 téhož bodu hledíc ku K_1. Poláry ty nechť protnou přímku am v bodech μ a μ_1 a osu X v bodech p a p_1, kdež ovšem p a p_1 značí póly přímky M hledíc ku K a K_1. Průsečík přímek A a A_1 budiž m_1 a tím položme kolmici k ose X, jejíž patu označme α_1. Body m a m_1 slují body konjugované hledíc k oběma kuželosečkám.

Touto konstrukcí možno libovolnému bodu α osy přisouditi jediný bod α_1 a naopak, ukážeme-li, že poloha bodu α_1 zůstává táž, ať bod m na přímce M zaujme polohu jakoukoli.

To dokážeme takto:

Dle věty již několikrát použité platí:

$$\overline{\alpha m} \,.\, \overline{\alpha \mu} = k,$$
$$\overline{\alpha m} \,.\, \overline{\alpha \mu_1} = k_1,$$

při čemž k a k_1 značí konstanty, pohybuje-li se bod m na přímce M.

Z rovnic předchozích plyne:

$$\frac{\overline{\alpha\mu}}{\overline{\alpha\mu_1}} = \frac{k}{k_1}.$$

Z obrazce dále plyne:

$$\frac{\overline{\alpha\mu}}{\overline{\alpha_1 m_1}} = \frac{\overline{\alpha p}}{\overline{\alpha_1 p}},$$
$$\frac{\overline{\alpha\mu_1}}{\overline{\alpha_1 m_1}} = \frac{\overline{\alpha p_1}}{\overline{\alpha_1 p_1}};$$

z rovnic těchto dělením a porovnáním s předchozí rovnicí následuje:

$$\frac{\overline{p\alpha_1}}{\overline{p_1\alpha_1}} = \frac{k_1}{k}\,\frac{\overline{p\alpha}}{\overline{p_1\alpha}}. \qquad (\gamma)$$

Dělicí poměr bodu α_1 vzhledem k bodům p a p_1 jest tedy konstantní, zůstává-li α konstantní, t. j. nezávislý na bodu m, pohybuje-li se tento na přímce kolmé ku X jdoucí bodem α. Tím tvrzení naše dokázáno.

Opakujme výsledek tento ještě jednou:

Dán-li na přímce M kolmé ku společné ose a jdoucí bodem α této osy libovolný bod m a stanovíme-li poláry tohoto bodu k oběma kuželosečkám, pak průsečíkem jich m_1 vedená kolmice k ose společné protne tuto vždy v témž bodě α_1, ať bod m na přímce M zaujme polohu jakoukoli. Patří tedy touto konstrukcí k libovolnému bodu α osy X jediný bod α_1 a naopak. Řadě bodů α patří tedy řada bodů α_1 a o řadách těchto snadno lze ukázati, že jsou involuční. Volíme-li totiž bod α_1 jakožto bod řady prvé a vyvolíme li na kolmici jdoucí bodem α_1 bod libovolný ku př. m_1, pak polára jeho hledíc ku K, poněvadž leží na A, jde pólem této přímky, t. j. bodem m, a polára jeho vzhledem ku K_1, poněvadž leží na A_1, jde taktéž bodem m. To jest k bodu α_1, počítáme-li ho k prvé řadě, patří opět bod α řady druhé, čili řady jsou involuční.

Stanovme dvojné body r a s těchto řad involučních. Vedeme-li jedním neb druhým z těchto bodů kolmice R a S ku společné ose, pak kolmice ty jsou společnými tečnami obou kuželoseček, t. j. procházejí tyto společnými průsečíky obou kuželoseček.

Stanovíme-li totiž k libovolnému bodu m přímky R (aneb S) konjugovaný bod m_1 hledíc k oběma kuželosečkám, pak tento bod nachází se opět na sečně R. Body m a m_1 tvoří dle dřívějšího involuci na přímce R, jejíž centrálný bod jest r a jejíž dvojné body jsou průsečíky kuželosečky s přímkou R. Poněvadž pro obě kuželosečky máme na R tytéž involuční řady, jsou i jejich dvojné body společny, t. j. na přímce R leží společné průsečíky obou kuželoseček.

Konstrukce společných bodů dvou daných kuželoseček jest tedy následující.

Vedeme libovolnou přímku A (ne kolmou k ose ani rovnoběžnou s osou) a stanovíme poláry úběžného bodu této přímky hledíc k oběma kuželosečkám. Jich průsečíkem vedeme kolmici na společnou osu X; pata této kolmice jest centrálním bodem i řad involučních na ose X. Dále vyhledáme dva k sobě příslušné body α a α_1. Z té příčiny vyvolíme si libovolný bod m a proložíme jím kolmici na osu X, jejíž patu označme α. Stanovíme-li poláry bodu m hledíc k oběma kuželosečkám a spustíme-li z jich průsečíků kolmici na osu X, pak pata této kolmice jest bod α_1 příslušný bodu α. Určíme-li dále střední měřicky úměrnou mezi $\overline{i\alpha}$ a $\overline{i\alpha_1}$ t. j. délku

$$\sqrt{\overline{i\alpha} \cdot \overline{i\alpha_1}},$$

a naneseme-li délku tu od bodu i na osu X na obě strany, obdržíme tak dvojné body r a s, jimiž procházejí společné sečny R a S kolmo k ose X. Průsečíky přímek R a S s kuželosečkou možno již elementárně stanoviti, aneb stanovíme tyto užitím involuce, která vznikne, když k libovolnému bodu n sečny ku př. R stanovíme vzhledem k jedné kuželosečce poláru, která protne sečnu v bodě n_1. Body n a n_1 tvoří involuci, jejíž centrální bod jest průsečík sečny R s osou X, t. j. bod r. Střední měřicky úměrná mezi $\overline{rn}$ a $\overline{rn_1}$ od bodu r nanesena na R po obou stranách, určuje společné průsečíky, jež leží na R. Podobně si počínáme i se sečnou S.

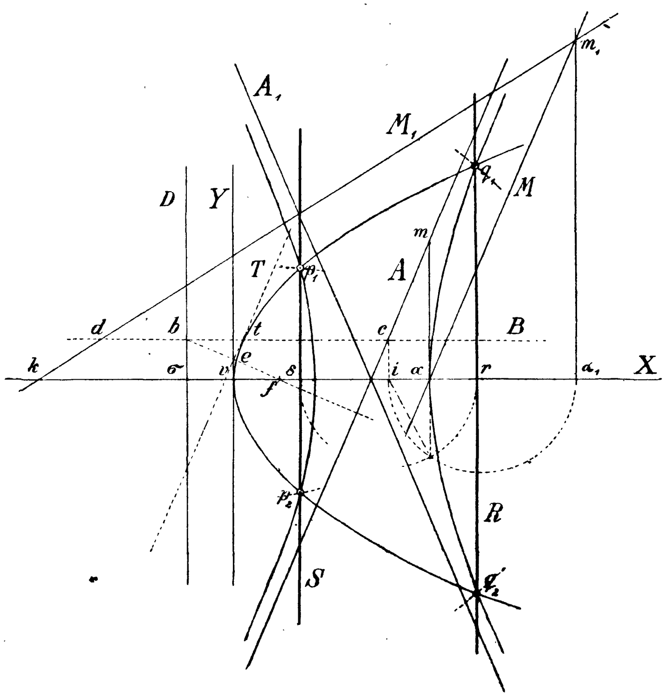
Jsou-li body r a s reálné, pak nemusí býti i průsečíky kuželoseček reálné. Padne-li ku př. dvojný bod vně kuželosečky, pak průsečíky kuželoseček nejsou reálné, avšak přímka kolmá k ose jdoucí dvojným bodem má opět význam. Jest to spojnice dvou imaginárných konjugovaných bodů průsečných, které sice nejsou reálné, avšak spojnice jich jest reálná.

Pakli body r a s jsou imaginárné, pak ovšem vůbec nemohou existovati společné průsečíky obou kuželoseček reálné a ani spojnice reálné dvou konjugovaných imaginárných bodů, (které existují), nejsou kolmé k ose X. Ty ovšem mohli bychom opět kvadraticky stanoviti, ale upouštíme od úlohy té z příčin, které jsme uvedli při stanovení společných tečen.

Jakožto applikaci uveďme řešení úlohy, stanoviti společné průsečíky hyperboly a paraboly o společných osách.

Budiž dána hyperbola asymptotami A a A_1 vrcholem α a parabola ohniskem f a řídicí přímkou D, která osu X nechť protíná v bodě σ. Vrchol paraboly budiž v a vrcholová tečna Y. (obr. 6.). Vytkněme si úběžný bod asymptoty A a stanovme poláru jeho hledíc k hyperbole a parabole. Hledíc k hyperbole jest to asymptota A, hledíc k parabole obdržíme ji jakožto sdružený průměr paraboly ku sečně A. Průměr ten určíme dle známé věty, že prochází dotyčným bodem tečny T rovnoběžné s přímkou A. Spustíme tedy s ohniska f kolmici na A, kteráž protne řídicí přímku D v bodě b; tímto bodem vedená rovnoběžka B k ose X jest příslušná polára a průsek její s přímkou A t. j. bod c konjugovaný bod úběžného bodu přímky A hledíc k oběma kuželosečkám. Pata i kolmice s bodu c na osu X spuštěné jest centrálním bodem involučních řad na ose X.

Hledejme dále konjugovaný bod k bodu m, průsečíku to vrcholové tečny bodem α ku hyperbole vedené a asymptoty A.



Obr. 6.

Polára bodu m hledíc k hyperbole bude rovnoběžná s asymptotou A, poněvadž m leží na asymptotě a mimo to bude procházeti bodem α, pólem to přímky $m\alpha$; označme ji M. Poláru bodu m, hledíc k parabole, určíme opět jakožto spojnici pólů přímek A a $m\alpha$. Pól přímky A jest dle známých vlastností paraboly na průměru B a sice jest to souměrný bod k bodu c, hledíc ku středu t, v němž paraboly dotýká se tečna T rovnoběžná ku A. Tečna T prochází bodem e, v němž bf protne vrcholovou tečnu Y. Vedeme-li tedy bodem e rovnoběžku ku A, dostáváme tečnu T a průsek její s přímkou B jest dotyčný bod t. Učiníme-li nyní $\overline{dt} = \overline{tc}$, jest bod d pólem přímky A, hledíc ku parabole.

Pól k přímky $m\alpha$ nachází se na ose X, takže $\overline{kv} = v\alpha$. Přímka $kd \equiv M_1$ jest tedy polára bodu m, hledíc ku parabole. Průsečík m_1 přímek M a M_1 jest tedy konjugovaný s bodem m, hledíc k oběma křivkám, a pata kolmice s tohoto bodu m na osu X spuštěné bod α_1, patřící v involučních řadách k bodu α. Určíme-li nyní na ose X body r a s tak, že

$$\overline{ir} = \sqrt{\overline{i\alpha} \,.\, \overline{i\alpha_1}},$$

$$\overline{is} = -\sqrt{\overline{i\alpha} \,.\, \overline{i\alpha_1}},$$

dostaneme dvojné body řad, jimiž procházejí společné sečny R a S kolmo ku ose X a zbývá pouze určiti průsečíky těchto přímek s jednou z kuželoseček, ku př. s parabolou. Ty nalezneme, opíšeme-li s ohniska f kružnice poloměry $r\sigma$ a $s\sigma$, kteréž protnou sečny R a S v hledaných společných průsečících q_1, q_2 a p_1, p_2.

Úloha, stanoviti společné tečny resp. společné průsečíky dvou kuželoseček, jsou-li v poloze obecné, jest totožná s úlohou nalézti společný polární trojúhelník obou kuželoseček. Úloha tedy vyžaduje nalézti tři veličiny, ku př. strany, neb vrcholy společného polárního trojúhelníka a vede tedy obecně na rovnici stupně třetího. Známe-li však jeden kořen rovnice stupně třetího, pak ostatní lze nalézti kvadraticky. Známe-li tedy jednu stranu společného polárního trojúhelníka, pak úloha vždy jest kvadratickou a tato podmínka jest při naší předložené úloze skutečně vyplněna, neboť společná osa daných kuželoseček jest pro obě kuželosečky společnou polárou úběžného bodu kolmice na osu společnou vztyčené.

Poznámka. **Předloženou úlohu mohli bychom řešiti v podstatě stejným způsobem i bez theorie involučních řad; bylo by jen třeba příslušné rovnice (β) a (γ) upraviti, jak by se změnily, kdybychom polohu jednotlivých bodů v těchto rovnicích se vyskytujících určili vzhledem k bodu i. Vztahy ty ovšem by se zredukovaly na rovnici (α). Upravování těchto vztahů není ale vlastně ničím jiným než zjednáváním si rovnice (α) z rovnice I. v theorii řad involučních uvedené, kterážto redukce, probere-li**

si v theorii involučních řad napřed, nemusí se znovu při řešení podobných úloh opakovati. Mimo to poznání základních vlastností involučních řad jest velkou pomůckou při řešení jiných úloh kvadratických, takže i z té příčiny při řešení předložené úlohy, rozhodli jsme se použíti řad involučních.

O předpovídání povětrnosti.

Se stanoviska historického zpracoval **Jos. Krkoška**, prof. v Pelhřimově.

(Pokračování.)

Jest nepochybno, že mnoho úkazů přírodních jest v souvislosti s prvky povětrnostními, na př. vzhled oblohy, mraky, červánky, mlha a její pohyb vzhůru nebo dolů, větší neb menší průhlednost ovzduší, barevnost vzdálených hor, slyšitelnost zvuku do dáli, vlhnutí různých předmětů a j., nicméně nepodařilo se ani odborným kruhům spolehlivých pravidel pro předpovídání povětrnosti z nich odvoditi; povětrnostní pravidla, jichž vzhledem k těmto úkazům se užívá, mohou sice potkati se sem tam se zdarem, avšak obecně postrádají žádoucí zaručenosti a jistoty, vyjma snad předpovědi do blízké budoucnosti několika hodin. Do jisté míry bezpečnější znaky skýtají pohyb a vzhled oblak ve vyšších vrstvách se vznášejících a atmosférické děje v těchto vysokých končinách posuzujících.

Důležitého obohacení dostalo se nauce povětrnostní, když r. 1642 objevil Torricelli tlak ovzduší a vynalezl hned na to přístroj, *tlakoměr* (barometr), jímž lze jej měřiti; odhalen nejvlivnější prvek povětrnostní, jejž možno jest k tomu jednoduchým způsobem do podrobností a nepřetržitě sledovati. Tlakoměr záhy uveden do služeb povětrnostních, na prvním místě od Otty z Guericke, jenž postavil za tím účelem při zdi svého domu v Děvíně pověstný tlakoměr vodou plněný, na 10 *m* vysoký; vlivem jeho autority došel tlakoměr brzy obecného uznání za přístroj povětrnostní (Wetterglas), zvláště když r. 1660 dostavila se veliká bouře, od něho z náhlého klesnutí jeho tlakoměru předpověděná. Jak známo, užívá se tlakoměru dodnes velmi hojně k předpovídání povětrnosti, a v různých spiscích