Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Viktor Trkal

Analog funkce Lagrangeovy pro Hamiltonovu funkci, závisející jedině na „účinnostních konstantách“

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 55 (1926), No. 4, 343--351

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121963`

Analogon funkce Lagrangeovy pro Hamiltonovu funkci, závisející jedině na „účinnostních konstantách“.

Napsal *V. Trkal.*

Rovnice

$$\sum_j p_j \dot{q}_j - L = H, \tag{1}$$

kde $L = L(q_i, \dot{q}_i)$ značí Lagrangeovu funkci [rozdíl kinetické a potenciální energie] a $H(q_k, p_k)$ znamená Hamitonovu funkci nazávisející explicite na čase (součet obou energií t. j. úhrnnou energii), platná pro libovolné obecné souřadnice q_k (a příslušné k nim rychlosti $\dot{q}_i$ resp. impulsy p_j) pozbývá platnosti v případě, jenž se vyskytuje v problémech dynamiky atomu, totiž v tom případě, že se Hamiltonova funkce dá vyjádřiti jako funkce „účinnostních konstant“ J_j, které hrají úlohu impulsů, k nimž příslušejí jakožto kanonicky sdružené souřadnice t. zv. „úhlové proměnné“ $w_j = \nu_j t + \delta_j$ s periodou rovnou 1.

V tom případě nastupuje místo rovnice (1) rovnice

$$\sum_j J_j \dot{w}_j - \mathrm{L}(\dot{w}_i) = \mathrm{H}(J_k), \tag{2}$$

čili

$$\sum_j J_j \nu_j - \mathrm{L}(\nu_i) = \mathrm{H}(J_k), \tag{2'}$$

kde $\mathrm{H}(J_k)$ značí Hamiltonovu funkci rovnou energii uvažovaného problému $\mathrm{L}(\nu_i)$ jest časový střed $\bar{L}$ Lagrangeovy funkce L uvažovaného problému, t. j.

$$\mathrm{L}(\nu_i) = \overline{L(q_i, \dot{q}_i)} = \bar{L}. \tag{3}$$

Pak zcela podobně jako rovnici (1) přísluší vztah

$$p_k = \frac{\partial L(q_i, \dot{q}_i)}{\partial \dot{q}_k},$$

tak rovnici (2') náleží relace [1])

$$J_k = \frac{\partial \bar{L}(\nu_i)}{\partial \nu_k}, \tag{4}$$

[1]) Tento vztah odvodil jsem již dříve ve zvláštním případě (pro případ Coulombova silového pole) v práci „Příspěvek k dynamice neutrálního atomu heliového“, (Rozpravy České akademie věd a umění za r. 1926), jež brzo vyjde tiskem. — Viz též V. Trkal: „Zur Dynamik des Heliumatoms“ ZS. f. Phys., 36, 144, (1926).

Důkaz tohoto vztahu v obecném případě podávám nyní. Pokud se relace (2') a (3) týče, viz též moji práci „Časopis pro pěst. mat. a fys.“ *51*, 101, (1922) a v kratší formě v Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, *21*, 80, (1922.)

jež tvoří jakýsi protějšek ke známé rovnici[2])

$$\nu_k = \frac{\partial H(J_j)}{\partial J_k}.$$

Odtud snadno plynou vztahy

$$\frac{\partial \nu_k}{\partial J_l} = \frac{\partial \nu_l}{\partial J_k}, \qquad \frac{\partial J_k}{\partial \nu_l} = \frac{\partial J_k}{\partial \nu_k}.$$

Důkaz tvrzení (2'), (3) a (4) podávám v následujících řádcích (§ 3, § 4). Pro lepší porozumění uvádím v § 1. přechod od Hamiltonových rovnic k Lagrangeovým obráceným postupem než přechází na př. Carathéodory[3]) od rovnic Lagrangeových k Hamiltonovým a v § 2 podávám interpretaci veličin L a H způsobem, jaký zvolil na př. Born.[4])

§ 1. *Přechod od Hamiltonových rovnic k Lagrangeovým.* Budiž dána Hamiltonova funkce $H(q_1, p_1, q_2, p_2, \ldots, q_n, p_n)$, anebo v kratším označení $H(q_i, p_i)$, jakožto analytická funkce obecných souřadnic q_i a kanonicky k nim sdružených obecných impulsů p_i, $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$, nezávisející explicite na čase t a vyhovující požadavku, že determinant

$$\left| \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \, \partial p_j} \right| \neq 0. \tag{5}$$

Tato funkce splňuje podle definice kanonický systém

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \tag{6}$$

$$(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{7}$$

Vzhledem k tomu, že jest splněna podmínka (5), můžeme vypočítati z rovnic (6) veličiny $p_1, p_2, \ldots, p_n$ a obdržíme

$$p_k = f_k(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2, \ldots, q_n, \dot{q}_n), \quad (k = 1, 2, 3, \ldots, n),$$

což budeme psáti kratšeji ve tvaru

$$p_k = f_k(q_i, \dot{q}_i). \tag{8}$$

Nyní zavedeme ve funkci $L(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n, q_n)$ anebo v kratším označení $L(q_i, \dot{q}_i)$ pomocí specialisované Legendreovy transformace tohoto tvaru:

$$L(q_i, \dot{q}_i) = -H(q_k, f_k) + \sum_j f_j \dot{q}_j. \tag{9}$$

---

[2]) M. Born, Vorlesungen über Atommechanik, I., Berlin, 1925, p. 9., form. (15).

[3]) C. Carathéodory v novém vydání knihy *Riemann-Weber's* Differentialgleichungen der Physik, I, Braunschweig, 1925, p. 186.

[4]) M. Born, l. c. p. 19 a 20.

Derivujeme-li tuto rovnici parcielně podle $\dot{q}_i$, obdržíme

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} - \sum_j \left(\frac{\partial H}{\partial p_j} - \dot{q}_j\right) \frac{\partial f_j}{\partial q_i}, \tag{10}$$

anebo vzhledem k rovnici (6):

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{11}$$

Derivujeme-li však rovnici (9) parcielně dle $\dot{q}_i$, obdržíme

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = -\sum_j \left(\frac{\partial H}{\partial f_j} - \dot{q}_j\right) \frac{\partial f_j}{\partial \dot{q}_i} + f_i, \tag{12}$$

což vzhledem k rovnicím (6) a (8) dá

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \tag{13}$$

Derivováním podle času t rovnice (13) obdržíme vzhledem k rovnicím (7) a (11) rovnici

$$\dot{p}_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \tag{14}$$

odkudž plyne systém Lagrangeových rovnic

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{15}$$

Rovnici (9) lze psáti symetričtěji ve tvaru

$$L + H = \sum_j p_j \dot{q}_j; \tag{16}$$

jest patrno, že soustava rovnic (6), (11), (13), (16) zůstane beze změny, vyměníme-li v těchto rovnicích H za L a $\dot{q}_j$ za p_j.

Z podmínky (1) plyne analogická podmínka, že determinant

$$\left|\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\right| \neq 0. \tag{17}$$

Abychom to dokázali, derivujme identitu

$$\dot{q}_i = \frac{\partial}{\partial p_i} H\left(q_k, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right),$$

jež plyne z rovnic (6) a (13), parcielně podle $\dot{q}_j$; jestliže ε_{ij} značí číslo, které pro $i = j$, jest rovno jednotce a pro $i \neq j$ rovná se nule, bude

$$\varepsilon_{ij} = \sum_k \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_k} \cdot \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_j}, \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n). \tag{18}$$

Z tohoto systému rovnic plyne pak pomocí poučky o násobení determinantů vztah

$$1 = \left| \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \, \partial p_k} \right| \cdot \left| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_k \, \partial \dot{q}_j} \right|, \tag{19}$$

čímž jest dokázáno, že podmínky (5) a (17) vyplývají jedna z druhé.

§ 2. *Interpretace funkcí L a H.* — Lagrangeovy rovnice plynou však také, jak známo, jako nutné podmínky z Hamiltonova variačního principu

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i)\, dt = \text{extremum}; \tag{20}$$

jsou nezávislé, jak rovněž známo, na volbě obecných souřadnic q_i.

Tážeme-li se po interpretaci funkce L, stačí vyšetřiti význam funce L jakožto funce pravoúhlých souřadnic, v nichž budou rovnice Lagrangeovy míti tvar

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_k} &= 0, \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial y_k} &= 0, \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial z_k} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Tyto rovnice musí souhlasiti s pohybovými rovnicemi Newtonovými

$$\frac{d}{dt}(m_k \mathfrak{v}_k) = \mathfrak{F}_k, \tag{22}$$

kde m_k jest hmota k-tého bodu, $\mathfrak{v}_k$ jeho rychlost a $\mathfrak{F}_k$ síla na něj působící.

Zavedeme-li nyní funkci T složek rychlostí tak, že

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_k} &= m_k \dot{x}_k, \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_k} &= m_k \dot{y}_k, \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_k} &= m_k \dot{z}_k, \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

a dají li se síly $\mathfrak{F}_k$ derivovati z potenciální energie V, jež závisí jen na souřadnicích, t. j.

$$\mathfrak{F}_{kx} = -\frac{\partial V}{\partial x_k}, \text{ atd.}, \tag{24}$$

pak rovnice (22) jest možno psáti ve tvaru

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_k}\right)-\frac{\partial(-V)}{\partial x_k}=0,$$

čili

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(T-V)}{\partial \dot{x}_k}-\frac{\partial(T-V)}{\partial x_k}=0, \tag{25}$$

takže porovnáním rovnic (21) a (25) najdeme

$$L=T-V. \tag{26}$$

Z rovnic (23) plyne

$$T=\frac{1}{2}\sum_k m_k(\dot{x}^2_k+\dot{y}^2_k+\dot{z}^2_k)$$

jakožto kinetická energie. Tudíž Lagrangeova funkce $L=T-V$ jest representována rozdílem kinetické a potenciální energie.

Význam funkce H vyplyne takto:

Ježto H nezávisí explicite na čase, platí vzhledem k rovnicím (6) a (7)

$$\frac{dH}{dt}=\sum_i\left[\frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i\right]=0,$$

tudíž

$$H=(q_i,p_i)=\text{Const.}$$

V libovolných souřadnicích klidné soustavy souřadné jest kinetická energie kvadratickou homogenní funkcí T v rychlostech $\dot{q}_i$. Podle Eulerovy věty platí tedy

$$2T=\sum_i\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i=\sum_i p_i\dot{q}_i \tag{27}$$

a tudíž

$$H=\sum_i p_i\dot{q}_i-L=2T-(T-V)=T+V \tag{28}$$

jest úhrnná energie uvažovaného systému.

§ 3. *Přechod od Hamiltonovy funkce* H (J_j), *jež závisí toliko na „účinnostních konstantách“* J_j, *k funkci* L (w_i), *která závisí jen na derivacích „úhlových proměnných“ podle času.* — Rovnice (16)

$$L(q_i\dot{q}_i)+H(q_k,p_k)=\sum_j p_j\dot{q}_j,$$

kde L je rozdíl kinetické a potenciální energie a H jest úhrnná energie uvažované soustavy, platí jistě v případě, kdy H obsahuje kromě veličin p_k aspoň jednu z veličin q_k explicite. V případě, že H neobsahuje ani jednu z veličin q_k explicite, jsou, jak z rovnice (7) patrno, všechna p_k konstantní, a tudíž, jak plyne z rovnice (6), také všechna $\dot{q}_k$ jsou konstantní; tedy všechna q_k jsou lineárními funkcemi času.

V poslední rovnici jest pak $L(q_i, \dot{q}_i)$ nutně konstantou, jak ukazuje též rovnice (11), a může představovati rozdíl kinetické a potenciální energie jen v tom případě, když je tento rozdíl obou energií konstantní. Poněvadž však součet obou energií dává úhrnnou energii, která jest konstantní, musí býti každá z obou energií pro sebe konstantou.

V problémech dynamiky atomu snažíme se vyjádřiti úhrnnou energii atomu jakožto funkci $\mathrm{H}(J_j)$ jedině veličin J_j, t. zv. „účinnostních konstant", jež hrají úlohu obecných impulsů, k nimž kanonicky sdružené obecné souřadnice w_j, t. zv. „úhlové proměnné" mají periodu rovnou jednotce. Pohybové rovnice Hamiltonovy znějí v tom případě

$$\dot{J}_j = -\frac{\partial \mathrm{H}(J_j)}{\partial w_i} = 0; \qquad \dot{w}_i = \frac{d}{dt}(\nu_i t + \delta_i) = \nu_i = \frac{\partial \mathrm{H}(J_j)}{\partial J_i} = \text{konst.} \tag{29}$$

Postup vylíčený v § 1. redukuje se nyní na toto:

Za předpokladu, že determinant

$$\left| \frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial J_i \partial J_j} \right| \neq 0, \tag{30}$$

lze vypočítati z rovnic

$$\dot{w}_i = \nu_i = \frac{\partial \mathrm{H}(J_j)}{\partial J_i} \tag{29'}$$

veličiny $J_1, J_2, \ldots, J_n$; obdržíme

$$J_k = F_k(\dot{w}_i). \tag{31}$$

Nyní zavedeme funkci $\mathrm{L}(\dot{w}_i)$ rovnicí

$$\mathrm{L}(\dot{w}_i) = -\mathrm{H}(J_k) + \sum_j F_j \dot{w}_j. \tag{32}$$

Derivujeme-li tuto rovnici parcielně podle $\dot{w}_i$, obdržíme

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{w}_i} = -\sum_j \left(\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial F_j} - \dot{w}_j \right) \frac{\partial F_j}{\partial \dot{w}} + F_i, \tag{33}$$

což vzhledem k rovnici (29')

$$\dot{w}_i = \frac{\partial \mathrm{H}(J_j)}{\partial J_i}$$

dá

$$J_i = \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{w}_i} = \frac{\partial \mathrm{L}(\nu_j)}{\partial \nu_i}. \tag{34}$$

Nyní běží o interpretaci veličiny $\mathrm{L}(\dot{w}_j) = \mathrm{L}(\nu_j)$. Poněvadž je to veličina konstantní a, obecně vzato, problém, jenž se podařilo charakterisovati funkcí $\mathrm{H}(J_j)$, má Lagrangeovu funkci $L = T - V$ na čase závislou, nemůže to býti v obecném případě funkce Lagrangeova, která by byla rozdílem kinetické a potenciální energie.

§ 4. *Interpretace funkce* L. Na případ, který zde uvažujeme, totiž ten, kdy se dá Hamiltonova funkce $\mathrm{H}(J_j)$ vyjádřiti jedině pomocí „účinnostních konstant", lze převésti daný dynamický problém vždy, když se dá Hamilton-Jacobiho parciální rovnice diferenciální, příslušná k Hamiltonově funkci $H(q_i\, p_i)$, řešiti separací proměnných, t. j. když se dá položiti

$$p_i = \frac{\partial S_i(q_i)}{\partial q_i}, \tag{35}$$

kde $S_i(q_i)$ jest funkce závisející pouze na jediné proměnné q_i. Pak se dají konstantní integrály vzaté podél jedné periody

$$J_i = \oint p_i\, d q_i \tag{36}$$

zavésti jakožto konstantní impulsy pomocí kanonické transformace[5])

$$\sum_i p_i\, dq_i = \sum_i J_i\, dw_i + d\{S^*(q_j, w_j)\}, \tag{37}$$

t. j.

$$\left.\begin{aligned} J_i &= -\frac{\partial}{\partial w_i} S^*(q_j, w_j), \\ p_i &= \frac{\partial}{\partial q_i} S^*(q_j, w_j). \end{aligned}\right\} \tag{37'}$$

Podle rovnice (27) jest

$$2\,T = \sum_i p_i\, dq_i$$

a tedy střední hodnota dvojnásobné kinetické energie za časový interval $t_1 - t_2$ bude dána vzorcem

$$\left.\begin{aligned} 2\,\overline{T} &= \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} \sum_i p_i \dot{q}_i\, dt = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} \Sigma\, p_i\, dq_i = \\ &= \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} \Sigma\, J_i\, dw_i + \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} dS^*. \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

5) M. Born, l. c., p. 94.

Zvolíme-li interval časový $t_2 - t_1$ dostatečně veliký, obdržíme za časový střed kinetické energie výraz

$$2\,\overline{T} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} \sum_i J_i \nu_i\, dt$$

čili

$$2\,\overline{T} = \sum_i J_i \nu_i = \sum_i J_i \dot{w}_i. \tag{39}$$

Tedy z rovnice (32) plyne

$$\mathbf{L}(\dot{w}_i) = -\mathbf{H}(J_k) + 2\,\overline{T} = -(T + V) + 2\,\overline{T} = -(\overline{T} + \overline{V}) + \\ + 2\,\overline{T} = \overline{T} - \overline{V} = \overline{L}, \tag{40}$$

tudíž $\mathbf{L}(w_i)$ má význam časového středu Lagrangeovy funkce rovné rozdílu kinetické a potenciální energie daného dynamického systému.

Z podmínky (30) plyne jako důsledek, že determinant

$$\left|\frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial \dot{w}_i\, \partial \dot{w}_j}\right| \neq 0. \tag{41}$$

Abychom to ukázali, derivujme identitu

$$\dot{w}_i = \frac{\partial}{\partial J_i}\mathbf{H}\left(\frac{\partial \overline{L}}{\partial \dot{w}_k}\right),$$

jež plyne z rovnic (29'), (34), (40), parcielně podle $\dot{w}_j$; značí-li ε_{ij} číslo, které pro $i = j$ jest rovno jednotce a pro $i \neq j$ rovná se nule, bude

$$\varepsilon_{ij} = \sum_k \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial J_i\, \partial J_k} \cdot \frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial \nu_k\, \partial \nu_j} \quad (i, j = 1, \ldots, n), \tag{42}$$

Z tohoto systému rovnic plyne pak pomocí poučky o násobení determinantů

$$1 = \left|\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial J_i\, \partial J_k}\right| \cdot \left|\frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial \nu_k\, \partial \nu_j}\right|, \tag{44}$$

čímž důkaz proveden.

Poznámka. Z rovnice (34) vyplývá okamžitě vztah

$$\frac{\partial J_k}{\partial \nu_l} = \frac{\partial J_l}{\partial \nu_k} \tag{44}$$

a z rovnice (29') zcela podobná relace

$$\frac{\partial \nu_k}{\partial J_l} = \frac{\partial \nu_l}{\partial J_k}; \tag{45}$$

oba determinanty (30) a (41) jsou symetrické.

*

Sur une analogie de la fonction de Lagrange pour la fonction hamiltonienne ne dépendant que des „constantes d'action."

(Extrait de l'article précédent.)

L'équation

$$\sum_j p_j \dot{q}_j - L = H \tag{1}$$

où $L = L(q_i, \dot{q}_i)$ désigne la fonction de Lagrange et $H(q_k, p_k)$ la fonction hamiltonienne ne dépendant pas, explicitement, du temps, valable pour des coordonnées généralisées arbitraires, perd sa validité dans un cas qui se présente dans la théorie de la dynamique de l'atome, à savoir le cas où la fonction hamiltonienne peut être exprimée en fonction des „constantes d'action" J_j jouissant le rôle de moments, auxquels appartiennent, comme variables canoniques conjuguées, les cordonnées dites „variables angulaires" $w_j = \nu_j t + \partial_j$ à la période égale à 1. En ce cas, l'équation (1) est remplacée par l'équation

$$\sum_j J_j \dot{w}_j - \mathbf{L}_i(\dot{w}_i) = \mathbf{H}(J_k) \tag{2}$$

ou bien

$$\sum_j J_j \nu_j - \mathbf{L}(\nu_i) = \mathbf{H}(J_k) \tag{2'}$$

où $\mathbf{H}(J_k)$ désigne la fonction hamiltonienne égale à l'énergie totale du problème considéré et $\mathbf{L}(\nu_i)$ est la moyenne $\overline{L}$ de la fonction de Lagrange L du problème considéré, c. à d.

$$\mathbf{L}(\nu_i) = \overline{L(q_i, \dot{q}_i)} = \overline{L}. \tag{3}$$

A l'équation (1) se rattache, comme on sait, la relation

$$p_k = \frac{\partial L(q_i, \dot{q}_i)}{\partial q_k};$$

d'une manière analogue se rattache à l'équation (2') la relation

$$J_k = \frac{\partial \overline{L}(\nu_i)}{\partial \nu_k} \tag{4}$$

qui est, en un certain sens, le pendant de l'équation connue

$$\nu_k = \frac{\partial \mathbf{H}(J_j)}{\partial J_k}.$$

On en tire facilement les relations

$$\frac{\partial \nu_k}{\partial J_l} = \frac{\partial \nu_l}{\partial J_k}, \qquad \frac{\partial J_k}{\partial \nu_l} = \frac{\partial J_l}{\partial \nu_k}.$$