Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Řešení úloh

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 11 (1882), No. 4, 294--301

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121926

Budiž ABC libovolný oblouk kruhový, po němž hmota rovnoměrně rozdělena, A, C jeho body mezní, B bod uprostřed mezi oběma, O pak středem kružnice, jíž oblouk náleží. Oblouk AC se skládá ze samých hmotných bodů, jež si můžeme jakkoli spojeny mysliti. Těchto bodů hmotných je na obou polovicích oblouku týž počet a my můžeme spojiti vždy dva z nich, které mají od sebe vzdálenosť $=$ AB; těžiště jejich nalezá se uprostřed tětivy jimi stanovené a vyplňuje kruhový oblouk, jehož poloměr je $r \cos \frac{\alpha}{2}$, značí-li r poloměr OA daného oblouku a $2\alpha = \widehat{AOC}$ středový jeho úhel, — a jehož středový úhel je dvakráte menší. Těžiště takto vzniklého oblouku je zároveň těžištěm oblouku daného.

Podobným spůsobem lze nahraditi tento oblouk jiným, jehož poloměr je patrně $r \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{4}$ a jehož středový úhel je $\frac{1}{4} \widehat{AOC}$.

Pokračujeme-li tímto spůsobem, nalezáme vždy nové a nové oblouky, jichž úhly středové stále klesají a blíží se nulle.

V mezním případě, kdy úhel tento mizí, redukuje se oblouk na jediný bod, jenž je hledaným těžištěm daného oblouku. Bod ten nalezá se patrně na přímce OB u vzdálenosti

$$r \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{4} \cdot \cos \frac{\alpha}{8} \ldots . = r \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

od bodu O, kterážto veličina patrně se rovná poměru $\frac{\overline{AC}}{arc\overline{AC}}$, jakož odjinud známo.

Úlohy.

Řešení úlohy 1.

Dle známé formule

$$\cos 5\varphi = \cos^5 \varphi - 10 \cos^3 \varphi \sin^2 \varphi + 5 \cos \varphi \sin^4 \varphi,$$

máme, položivše

$$5\varphi = \alpha, \quad \cos\alpha = \mathrm{A}, \quad \cos\frac{\alpha}{5} = x,$$

$$\mathrm{A} = x^5 - 10x^3(1 - x^2) + 5x(1 - x^2)^2,$$

čili

$$16x^5 - 20x^3 + 5x - \mathrm{A} = 0.$$

Kořeny této rovnice podávají hodnoty $\cos\frac{\alpha}{5}$, značí-li A hodnotu $\cos\alpha$. Je-li α jeden z oblouků, jejichž cosinus jest A, pak má x pět hodnot

$$x = \cos\frac{\alpha}{5}; \ \cos\left(\frac{2\pi}{5} + \frac{\alpha}{5}\right); \ \cos\left(\frac{4\pi}{5} + \frac{\alpha}{5}\right); \ \cos\left(\frac{6\pi}{6} + \frac{\alpha}{5}\right);$$

$$\cos\left(\frac{8\pi}{5} + \frac{\alpha}{5}\right).\text{*)}$$

A) V případu kdy $a = 0$, $\cos a = \mathrm{A} = 1$, lze vzíti $\alpha = 0$, tedy má rovnice

$$f(x) = 16x^5 - 20x^2 + 5x - 1 = 0$$

tyto kořeny:

$$\cos 0, \ \cos\frac{2\pi}{5}, \ \cos\frac{4\pi}{5}, \ \cos\frac{6\pi}{5}, \ \cos\frac{8\pi}{5},$$

aneb:

$$1, \cos\frac{2\pi}{5}, \ \cos\frac{4\pi}{5}, \ \cos\frac{2\pi}{5}, \ \cos\frac{4\pi}{5}.$$

Má tedy ona rovnice dva dvojnásobné kořeny, pročež má její levá strana s derivací

$$f'(x) = 5(16x^4 - 12x^2 + 1)$$

společný dělitel druhého stupně.**) Divise $f(x) : \frac{1}{5}f'(x)$ dá zbytek $-(8x^3 - 4x + 1)$, divise $\frac{1}{5}f'(x) : (8x^3 - 4x + 1)$ dá zbytek $-(4x^2 + 2x - 1)$ a konečně divise $(8x^3 - 4x + 1) : (4x^2 + 2x - 1)$ dá zbytek $-(4x^2 + 2x - 1)$, pročež jest $4x^2 + 2x - 1$ společný onen dělitel. Kořeny rovnice

$$4x^2 + 2x - 1 = 0,$$

t. j. hodnoty $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$ jsou ony dvojnásobné kořeny t. j. máme

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}; \quad \cos\frac{4\pi}{5} = -\frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$

*) V. *Serret*, Traité de Trigonométrie, 5. éd. pag. 206.

**) V. *M. Pokorný*, Determinanty a vyšší rovnice, str 96.

B) V případu $a = \pi$ máme $A = -1$, tedy rovnice

$$16x^5 - 20x^3 + 5x + 1 = 0.$$

Učinivše $x = -y$, máme dřívější rovnici

$$16y^5 - 20y^3 + 5y - 1 = 0,$$

jejíž kořeny jsme právě vypočtli. Máme tedy jeden kořen $x = -1$, a dva dvojnásobné kořeny

$$x = -\frac{-1+\sqrt{5}}{4}, \quad x = \frac{1+\sqrt{5}}{4},$$

jež značí $-\cos\frac{2\pi}{5}$ a $-\cos\frac{4\pi}{5}$ aneb resp. $\cos\frac{3\pi}{5}$, $\cos\frac{\pi}{5}$, poněvadž se cosinusy úhlů suplementárných různí jen znamením.

C) Mějme $a = \frac{\pi}{2}$, $\cos a = A = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$; kořeny příslušné rovnice

$$16x^5 - 20x^3 + 5x = 0,$$

jsou pak cosinusy úhlů:

$$\frac{\pi}{2}, \quad \frac{2\pi}{5} + \frac{\pi}{2}, \quad \frac{4\pi}{5} + \frac{\pi}{5}, \quad \frac{6\pi}{5} + \frac{\pi}{5}, \quad \frac{8\pi}{5} + \frac{\pi}{2}.$$

Značme cosinusy ty po sobě x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Pak odstranivše kořen $x_1 = 0$, máme pro x_2, x_3, x_4, x_5 rovnici bikvadratickou

$$16x^4 - 20x^2 + 5 = 0.$$

Položivše $x^2 = y$, nalezneme

$$y = \frac{10 \pm 2\sqrt{5}}{16},$$

tedy

$$x = \pm\tfrac{1}{4}\sqrt{10 \pm 2\sqrt{5}}.$$

Dle goniometrického významu kořenů x_2, x_3, x_4, x_5 jest patrné, že x_2 a x_3 jsou hodnoty záporné a x_4, x_5 kladné; dále že co do absolutní hodnoty jest x_2 větší než x_3 a x_5 větší než x_4, pročež máme

$$x_2 = \cos\left(\frac{2\pi}{5} + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{2\pi}{5} = -\frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}},$$

$$x_3 = \cos\left(\frac{4\pi}{5} + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{\pi}{5} = -\frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}};$$

$$x_4 = \cos\left(\frac{6\pi}{5} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{5} = \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}};$$

$$x_5 = \cos\left(\frac{8\pi}{5} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

D) Mějme $a = \frac{\pi}{3}$, $A = \frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{\pi}{3}$; kořeny příslušné rovnice

$$16x^5 - 20x^3 + 5x - \tfrac{1}{2} = 0,$$

jsou cosinusy úhlů

$$\frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{5} + \frac{\pi}{3},\ \frac{4\pi}{5} + \frac{\pi}{3},\ \frac{6\pi}{5} + \frac{\pi}{3},\ \frac{8\pi}{5} + \frac{\pi}{3}.$$

Tyto hodnoty lze snadno vypočísti, poněvadž známe již cosinusy a sinusy částí; tedy na př.

$$x_1 = \cos\frac{\pi}{5} = \frac{1}{2};$$

$$x_2 = \cos\left(\frac{2\pi}{5} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{5}\sin\frac{\pi}{3} =$$

$$= \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}\,\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

atd. atd.

Zcela podobně se počítá při $a = \frac{\pi}{6}$, $a = \frac{\pi}{12}$, poněvadž sinus a cosinus těchto úhlů snadno lze ustanoviti půlením ze sinusu a cosinusu úhlu $\frac{\pi}{3}$.

Přihlédněme k obdobným úkolům vůči funkci sinus. Ze známé formule

$$\sin^5\varphi = 5\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^2\varphi\sin^3\varphi + \sin^5\varphi$$

nalezneme, položivše

$$5\varphi = a,\quad \sin a = A,\quad \sin\frac{a}{5} = x,$$

$$A = 5(1 - x^2)^2 x - 10(1 - x^2)x^3 + x^5,$$

t. j.

$$16x^5 - 20x^3 + 5x - A = 0. \tag{2}$$

Ve specialných případech $a = 0$, π, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{12}$ lze rovnici tuto právě tak řešiti, jak jsme řešili obdobné dřívější rovnice, i zůstavujeme to čtenáři, podotýkajíce, že kořeny jsou sinusy úhlů

$$\frac{\alpha}{5}, \frac{2\pi}{5}+\frac{\alpha}{5}, \frac{4\pi}{5}+\frac{\alpha}{5}, \frac{6\pi}{5}+\frac{\alpha}{5}, \frac{8\pi}{5}+\frac{\alpha}{5},$$

je-li α kterýkoli oblouk, jehož sinus jest A.

Rovnice (2) co do tvaru se s rovnicí (1) úplně shoduje, t. j. $\cos\frac{a}{5}$ závisí na $\cos a$ právě tak jako $\sin\frac{a}{5}$ na $\sin a$. To se mohlo předvídati, poněvadž formule pro $\cos 5\varphi$ jest složena ze $\cos\varphi$ a $\sin\varphi$ zrovna tak, jak je složena formule pro $\sin 5\varphi$ z hodnot $\sin\varphi$ a $\cos\varphi$. *W.*

Řešení úlohy 2.

(První část zaslal p. **Střebský Vilém**, VII. real. školy v Pardubicích.)

V první relaci nahraďme tangenty podíly $\frac{\sin}{\cos}$ a odstraňme jmenovatele, i máme:

$$\sin a\cos b\cos c+\sin b\cos a\cos c+\sin c\cos a\cos b=\sin a\sin b\sin c,$$

čili

$$\sin a\cos b\cos c+\cos a\sin(b+c)=\sin a\sin b\sin c,$$

aneb

$$\sin a\cos(b+c)+\cos a\sin(b+c)=0,$$

čili

$$\sin(a+b+c)=0,$$

z čehož

$$a+b+c=k\pi,$$

kdež k značí celistvé číslo, hledaná relace.

Chtějíce odpověděti k druhé otázce v této úloze položené, napišme danou relaci ve tvaru

$$\frac{1+\cos 2a}{2}+\frac{1+\cos 2b}{2}+\frac{1+\cos 2c}{2}+2\cos a\cos b\cos c=1,$$

t. j. položivše $2a=\alpha$, $2b=\beta$, $2c=\gamma$,

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}+1=0.$$

Učiňme dále $\alpha=\pi-\alpha'$, $\beta=\pi-\beta'$, $\gamma=\pi-\gamma'$ i bude platiti

$$\cos\alpha'+\cos\beta'+\cos\gamma'=1+4\sin\frac{\alpha'}{2}\sin\frac{\beta'}{2}\sin\frac{\gamma'}{2}.$$

Toť ale relace, kterou nahražuje *Serret* ve své trigonometrii (5. vyd., str. 51.) relací algebraickou mezi oblouky a to následujícím způsobem. Nahraďme $\cos\alpha' + \cos\beta'$ součinem $2\cos\frac{\alpha'+\beta'}{2}\cos\frac{\alpha'-\beta'}{2}$ aneb $2\cos^2\frac{\alpha'}{2}\cos^2\frac{\beta'}{2} - 2\sin^2\frac{\alpha'}{2}\sin^2\frac{\beta'}{2}$; a dále $\cos\gamma$ výrazem $1 - 2\sin^2\frac{\gamma'}{2}$, i obdržíme

$$\left(\sin\frac{\gamma'}{2} + \sin\frac{\alpha'}{2}\sin\frac{\beta'}{2}\right)^2 - \cos^2\frac{\alpha'}{2}\cos^2\frac{\beta'}{2} = 0,$$

aneb

$$\left(\sin\frac{\gamma'}{2} + \cos\frac{\alpha'-\beta'}{2}\right)\left(\sin\frac{\gamma'}{2} - \cos\frac{\alpha'+\beta'}{2}\right) = 0,$$

tedy vyjádřivše oba součty co součiny:

$$\sin\frac{\alpha'+\beta'+\gamma'-\pi}{4}\sin\frac{-\alpha'+\beta'+\gamma'+\pi}{4}$$
$$\times\sin\frac{\alpha'-\beta'+\gamma'+\pi}{4}\sin\frac{\alpha'+\beta'-\gamma'+\pi}{4} = 0.$$

Jest tedy za dané relace nutné a postačí, aby jeden z oblouků za znamením sin se rovnal násobku π t. j. aby platila jedna z relac

$$\alpha'+\beta'+\gamma' = (4n+1)\pi; \quad -\alpha'+\beta'+\gamma' = (4n-1)\pi;$$
$$\alpha'-\beta'+\gamma' = (4n-1)\pi; \quad \alpha'+\beta'-\gamma' = (4n-1)\pi.$$

Vraťíme-li se k hodnotám α, β, γ a pak ku a, b, c, obdržíme hledané relace:

$$a+b+c = (2k+1)\pi; \quad -a+b+c = (2k+1)\pi;$$
$$a-b+c = (2k+1)\pi; \quad a+b-c = (2k+1)\pi,$$

z nichž jedna platiti musí, aby daná relace byla vyplněna a naopak; k značí libovolné celistvé číslo. *W.*

Řešení úlohy 11.

(Zaslal p. *K. Lukáš*, VII. g. malostr. ob. real. gymn.)

Dané těleso jest dvojkuželem a jeho krychlový obsah 125, 815 kr. m.

Tutéž úlohu řešili pp.: *F. L. Bayer*, VII. r. tř. ob. real. gymn. malostr., *M. Grossmann*, VII. real. tř. v Litomyšli, *V. Střebský*, VII. real. tř. v Pardubicích, *J. Papežík* v Hruškách.

Řešení úlohy 15.

Je-li v rychlost hmoty, r délka vlákna, g urychlení volného pádu, jest

$$v = \sqrt{gr} = \sqrt{2g \cdot \frac{r}{2}};$$

hledaná rychlost rovná se rychlosti, kterou by hmota při volném pádu nabyla, proběhnuvši polovinu délky vlákna.

Řešení, však ne zcela správné, zaslali pp.: *T. Hájek*, VII. tř. č. gymn. v Budějovicích, *A. Žeglitz*, VIII. tř. gymn. v Ml. Boleslavi.

Řešení úlohy 16.

(Řešil p. *J. Papežík* v Hruškách.)

Hledaný střed sil jest průsečíkem přímek půlících vnitřní úhly trojúhelníka a tudíž i střed vepsané kružnice.

Řešení zaslali též pp.: *T. Hájek*, VII. tř. č. g. v Budějovicích, *M. Grossmann*, VII. tř. r. v Litomyšli.

Řešení úlohy 17.

(Do této úlohy vloudila se tisková chyba; „místo hmotám" stůjž v druhé řádce „plochám". Hledaný střed jest středem koule do čtyrstěnu vepsané).

Řešení úlohy 18.

(Řešil p. *V. Střebský*, VII. tř. r. v Pardubicích.)

Hledaná místa nalézají se na stranách tvořících roh nepodepřený; vzdálenosti jejich od tohoto rohu obnášejí třetinu délek příslušných stran.

Řešil též p. *M. Grossmann*, VII. tř. r. v Litomyšli.

Řešení úlohy 19.

(Řešil p. *M. Grossmann*, VII. tř. r. v Litomyšli.)

Hledaná místa leží v půlících bodech stran uzavírajících roh, jenž leží naproti rohu podepřenému.

Řešení úlohy 20.

(Řešil p. *M. Grossmann*, VII. real. tř. v Litomyšli.)

Vzdálenosti stejně položených hran karet po sobě následujících, vyjádřené polovinou délky jedné karty, jsou

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \frac{1}{n-1}.$$

Řešení zaslal též p. *A. Žeglitz*, VIII. tř. g. v Ml. Boleslavi.

Řešení úlohy 21.

Buďtež A, B, C úhly, a, b, c protilehlé strany trojúhelníku; známe-li úhly, jest tím trojúhelník, mající stranu pevné délky $\overline{AB} = c$, určen. Budiž $2s$ známý součet stran a, b, c, α úhel, jejž tvoří strana AB s obzorem; obdržíme rovnice:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{s-c}{s},$$

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2} - \operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{Pc - (2s - c)(P + p)\sin\alpha}{s(P + p)\cos'\alpha},$$

kterými jsou určeny úhly A, B.

Řešení úlohy 22.

(Řešil p. *V. Střebský*, VII. tř. r. v Pardubicích.)

Laplace-ova sekunda obnáší $\frac{1}{100000}$ jednoho dne. Míra ta jest vzata ze soustavy decimalní, upotřebené tehdy (zároveň se zavedením republikánského kalendáře a metrické soustavy) při rozdělení dne a kruhu. Den rozdělen na 10 hodin po 100 minutách, minuta na 100 sekund; podobně čtvrtkruh (kvadrant) na 100 stupňů, stupeň na 100 minut, minuta na 100 sekund.

Řešili též pp. *M. Grossmann*, VII. třída real. v Litomyšli a *A. Żeglitz*, VIII. tř. g. v Ml. Boleslavi.

Řešení úlohy 8. zaslal též pan *Č. Hlavinka*, VII. tř. real. v Prostějově.

Drobnosti.

Abiturientům středních škol podává **Č. Jarolímek.**

1. Abiturientům bývá s nesnází, pamatovati si bezpečně vzorce pro tělesný obsah kulového úseku a kulové vrstvy. Zajisté snáze utkvějí v paměti jednoduchá pravidla tato:

a) Kulový úsek (skrojek) rovná se co do tělesného obsahu vepsané kouli, zvětšené o válec, jenž má s úsekem společnou podstavu a poloviční výšku (obr. 1.).

b) Kulová vrstva rovná se co do tělesného obsahu vepsané kouli zvětšené o součet dvou válců, z nichž jeden sestrojen nad spodní, druhý pak pod svrchní kruhovou stěnou vrstvy; výška každého válce rovná se polovině výšky vrstvy (obr. 2.)

2. Buďtež rovnice tří přímek v soustavě pravoúhlých souřadnic