Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Bedřich Procházka

Fotogrametrické konstrukce. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 27 (1898), No. 2, 101--112

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121919

Fotogrammetrické konstrukce.

Napsal

B. Procházka,
ředitel realky v Náchodě.

(Dokončení.)

5. *Pokračování ve vztazích průmětů přímky.*

Souhrnem centralně promítajících přímek příslušných jednotlivým bodům přímky P určena jest rovina promítající této přímky. Její stopa v rovině základní jest průmětem P_3 a její průsečnice s rovinou R jest průmětem P_2. Je-li přímka P určena, budou i její průměty P_2, P_3 zcela určity, a dá se jeden i druhý průmět, jak v dřívějších konstrukcích bylo uvedeno, odvoditi z dané přímky P.

Je-li dán jeden průmět, jest tím určen i druhý, nikoliv však přímka v prostoru, protože všechny přímky promítající roviny, určené středem promítání s a jedním průmětem, mají v téže přímce svůj centralný průmět druhý. Následkem toho z jednoho průmětu na polohu přímky souditi nemůžeme.

Je-li však mimo průmět P_2 nebo P_3 ještě dána jiná podmínka, pak možno z průmětu polohu přímky stanoviti. Jsou-li v průmětu centralném v rovině R dva body kotovány, t. j. je-li známa výška jejich nad rovinou základní, pak můžeme polohu přímky stanoviti; jest to táž úloha, která se již vyskytla při konstrukci bodu z jeho kotovaného perspektivního průmětu v rovině R.

Také možno polohu přímky P určiti, je-li vedle průmětu P_2 nebo P_3 dán její průmět orthogonalný P_1; neboť pak jest přímka P stanovena jakožto průsečnice rovin centralně a orthogonalně promítající. Velmi důležitými jsou pro rekonstrukci přímky P ony důležité body, o nichž bylo již v obou předcházejících článcích jednáno.

Předpokládejme, že jest opět přímka M stopou průmětny R k rovině základní nakloněné, M_s pak stopou roviny $R_s \parallel R$,

s_1 průmět orthogonalný středu promítání a (s) jeho průmět klinogonalný v pravém tvaru do roviny základní.

Budiž dále (P_2) klinogonalný průmět v pravém tvaru průmětu P_2 nějaké přímky P. Tento průmět protíná stopu M v bodu t_2, v němž protíná průmět P_2 rovinu základní. Jelikož jest stopa M osou kollineace mezi oběma průměty centralnými přímky P, prochází průmět P_3 také tímto bodem $t_2 \equiv t_3 \equiv t_{2_1}$.

Průmět centralný w_3 bodu, jehož w_2 jest úběžným bodem průmětu P_2 dostaneme v průsečíku kollinearného paprsku $(s)w_3 \parallel (P_2)$ se stopou M'. Přímka spojující bod tento w_3 s průmětem t_3, jest průmětem P_3. Spojnice $w_3 s_1$ udává nám zároveň směr bodu úběžného průmětu P_{2_1}, který tedy obdržíme, vedeme-li bodem $t_{2_1} \equiv t_2$ rovnoběžku ku této spojnici.

Ještě nám bude možno stanoviti průmět centralný v_2 bodu v, jehož průmět v_3 jest bodem úběžným průmětu P_3. Sestrojme průmětem (s) rovnoběžku ku P_3, která průmět (P_2) v průmětu (v_2) protíná. Patrno jest, že průmět (v_2) jest zároveň průsečíkem průmětů (P_2) s (R_{s_2}). Z průmětu (v_2) odvodíme pak snadno průmět v_{2_1}.

Má-li však býti určena poloha přímky P, musí býti dána ještě jedna podmínka, jak již bylo uvedeno. Na př. budiž dán průmět orthogonalný P_1. Pak v průsečíku průmětu P_1 a P_3 máme bezprostředně stopu m přímky P v základní rovině.

Jeho průmět (m_2) obdržíme pomocí kollinearného paprsku $(s)m_3$ a průmět m_{2_1} pomocí průmětu $s_1 m_3$ paprsku promítajícího sm.

Průsečík průmětů P_1 a P_{2_1} jest průmětem r_1 průsečíku r přímky P s průmětnou centralnou R. Z průmětu $r_1 \equiv r_{2_1}$ odvodíme (r_2) pomocí přímky $r_{2_1}(r_2) \perp M$, kteráž (P_2) v hledaném bodě protíná. Konečně průmět r_3 obdržíme v průmětu P_3 pomocí průmětu $s_1 r_1$.

Průměty posledního bodu zvláštního u přímky P, t. j. úběžného bodu této přímky obdržíme následovně. Průmět u_3 obdržíme, vedeme-li průmět $s_1 u_1 \parallel P_1$. Z tohoto průmětu u_3 odvodíme (u_2) pomocí centraly $(s)u_3$ a učiníme-li $(u_2)\ u_{2_1} \perp M$, obdržíme v průmětu P_{2_1} průmět u_{2_1}.

Rozeznáváme tedy v přímce šest zvláštních bodů, a to ve skupení prvním:

1. Průsečík t průmětu P_2 s rovinou základní. V tomto bodě protíná také průmět P_2 průmět P_{2_1} a průmět P_3.

2. Bod w, jehož w_2 jest úběžným bodem průmětu P_2, jemuž přísluší w_3 jakožto průsečík průmětu P_3 s přímkou M', kdežto bod w_{2_1} jest taktéž úběžným bodem průmětu P_{2_1}.

3. Konečně máme ještě bod v, kterému přísluší průmět v_3 jakožto úběžný bod průmětu P_3.

Jest to onen bod v, jemuž přísluší centralně promítající paprsek sv rovnoběžný s rovinou základní; průmět v_{2_1} obdržíme, vedeme-li $s_1v_3 \parallel P_3$ a průmět (v_2), sestrojíme-li kollinearný paprsek $(s)v_3 \parallel P_3$.

Tyto tři body přímky P jsou závisly pouze na poloze promítající roviny této přímky, a nemožno z nich na polohu přímky P v prostoru souditi.

Ostatní tři zvláštní body z poměru přímky P k průmětnám vyplývající tvoří druhou skupinu:

4. Jest to především bod m, ve kterém přímka P protíná rovinu základní, a ve kterém se zároveň průměty P_1 a P_3 protínají.

5. Dále bod r, ve kterém přímka P protíná průmětnu R, a jehož průmět r_1 jest průsečíkem průmětů P_{2_1} a P_1. Jeho příslušný průmět r_3 nalézá se v průsečíku průmětu s_1r_1 s P_3. Průmět (r_2) dostaneme buď vedením kollinearného paprsku $(s)r_3$ aneb přímky $r_{2_1}(r_2)$ kolmé ku M.

Výšku ζ_r bodu r nad rovinou základní dostaneme, vztyčíme-li v bodě r_1 kolmici r_1r ku $r_1(r_2)$ čili vedeme-li bodem r_1 rovnoběžku se stopou M a zároveň z průsečíku této stopy n s přímkou $(r_2)r_1$ opíšeme poloměrem $n(r_2)$ oblouk kruhový, který protne onu kolmici v bodě r, takže $r_1r = \zeta r$.

Učiňme dále úsečku $r_1r' \perp P_1$ a zároveň rovnou výšce ζ_r, pak spojnice bodu r' s m jest sklopenou přímkou P do roviny základní kolem jejího průmětu P_1.

Tuto sklopenou přímku mohli jsme také obdržeti tím způsobem, že bychom si sestrojili průmět v_1 bodu v, jehož v_3 jest úběžným bodem průmětu P_3, jemuž tedy náleží centralně promítající paprsek sv rovnoběžný s rovinou základní a tudíž jest

$\zeta_v = \zeta_s$. Za tím účelem vedeme průmětem s_1 přímku $s_1 v_1 \parallel P_3$, kteráž průmět P_1 protíná v bodu v_1. Vztyčíme-li ve v_1 kolmici ku P_1 a naneseme-li na ni $\zeta_v = \zeta_s$, obdržíme bod v, který spojen s m nám taktéž podává sklopenou přímku P.

Bod m má výšku $\zeta m = 0$.

Abychom stanovili ještě výšky bodů t a w, stanovíme jejich t_1 a w_1 a sklopíme je s přímkou P do roviny základní. Veďme průmět $s_1 t_{2_1}$, který průmět P_1 protíná v průmětu t_1, a pak průmět $s_1 w_3$, který průmět P_1 protíná v průmětu w_1.

6. Konečně průmět u_3 úběžného bodu u přímky P obdržíme, vedeme-li průmět $s_1 u_3 \parallel P_1$, který průmět P_3 v bodu u_3 protíná; jeho výška jest nekonečně veliká.

6. *Vztahy průmětů přímky ve zvláštních polohách při obecné poloze průmětny.*

a) Přímka jest rovnoběžna s rovinou základní.

V tomto případě bude průmět $P_3 \parallel P_1$ a bod m jest tudíž úběžným bodem přímky P.

Body t_2 a w_3, v nichž průmět P_3 protíná stopu M roviny R a stopu M' roviny $R_s \parallel R$, nijak svou polohu nemění, taktéž poloha průmětů P_2 a P_{2_1} zůstává takovou jako v případě obecném. Budiž M opět stopou roviny R, nakloněné ku rovině základní, M' stopou roviny $R_s \parallel R$, s_1 průmětem středu promítání, dále (s) klinogonalným průmětem v pravém tvaru středu s do roviny základní.

Dále buďtež dány spolu rovnoběžné průměty P_1 a P_3 přímky $P \parallel M$. Průmět P_3 protíná stopu M v bodu $t_{2_1} \equiv t_2$ a M' v bodu w_3. V bodu t_2 protínají se rovina základní i rovina centralně promítající přímky P, a zároveň jím procházejí průměty P_3 a P_{2_1}. Průmět t_1 obdržíme v průsečíku průmětu paprsku $s_1 t_2$ s průmětem P_1.

Tak i w_3 jest průsečík roviny základní s rovinou R_s a rovinou centralně promítající přímky P. Průměty w_2 a w_{2_1} jsou body úběžné průmětů P_2 a P_{2_1} a průmět w_1 obdržíme v průsečíku průmětu P_1 s průmětem $s_1 w_3$ paprsku sw.

Vedeme-li bodem $t_2 = t_{2_1}$ rovnoběžky s přímkami $w_3(s)$ a $w_3 s_1$, obdržíme průměty (P_2) respekt. P_{2_1}. Poněvadž se bod v_3 stotožňuje s bodem m, bude i bod v totožný s tímto bodem. Sestrojíme-li průměty s_1 a (s) přímky rovnoběžné ku P_{2_1} resp.

ku P_2, obdržíme v průmětech P_{2_1} a P_2 průměty v_{2_1} a (v_2) totožné s m_{2_1} a m_2.

Bod r, v němž protíná přímka P průmětnu R, má svůj průmět r_1 v průseku P_1 a P_{2_1}. Průmět r_3 obdržíme v průsečíku přímky P_3 s průmětem $s_1 r_1$. A spojíme-li r_3 s (s), protne nám tato spojnice jakožto kollinearný paprsek průmět (P_2) v průmětu (r_2). Bod úběžný u stotožňuje se v tomto případě s body m a v.

b) Přímka jest kolma ku rovině základní.

Budiž opět M stopou roviny R, nakloněné ku rovině základní, M' stopou roviny $R_s \| R$, dále s_1 průmět středu promítání, a $s_1 s$ výška ζ_s středu promítání vzhledem ku rovině základní; (s) jest pak odvozený klinogonalný průmět v pravém tvaru tohoto středu promítání do roviny základní. Přímka $P \perp$ M má svůj průmět v bodu P_1; průmět P_3 jest v přímce $s_1 P_1$, v jejíchž průsečíkách $t_2 \equiv t_{2_1} \equiv t_3$ a w_3 se stopami M M_s máme průměty zvláštních bodů t a w přímky P. Bod t jest opět průsečík průmětu P_2 s rovinou základní.

Abychom sestrojili průmět (P_2), spojíme průmět w_3 s průmětem (s) a vedeme s touto spojnicí průmětem (t_2) rovnoběžku. Anebo můžeme také vytknouti libovolný bod na průmětu P_3 jakožto průmět x_3 nějakého bodu x na přímce P, a vésti tímto průmětem libovolnou přímku L_3, která protíná stopy M a M' v bodech l a l'. Rovnoběžka vedená bodem l ku spojnici bodů l' a (s) protíná kollinearný paprsek (s) x_3 v průmětu (x_2), který určuje s bodem (t_2) průmět (P_2), který se shoduje s oným z konstrukce prvé vyplývajícím.

Abychom stanovili výšky jednotlivých bodů přímky P nad rovinou základní, sklopíme do této roviny její centralně promítající rovinu. Za tím účelem sestrojíme v průmětu s_1 kolmici ku s_1 P_1 a učiníme $\overline{s_1 s'} = \zeta_s$; v bodu P_1 k témuž průmětu $s_1 P_1$ vztyčená kolmice bude sklopenou přímkou P. Spojíme-li bod s' s průmětem w_3, a vedeme bodem t_2 rovnoběžku s touto spojnicí, obdržíme kolem průmětu P_3 sklopený průmět P_2 do roviny základní. Kdybychom nyní hledali k libovolnému průmětu x_3 bod x_2 a jeho ostatní průměty, tu bychom spojili s' s x_3 přímkou, kteráž protíná sklopenou přímku P_2 v bodu x_2. Spustíme-li kolmici s bodu x_2 na průmět $P_3 \equiv s_1 P_1$, obdržíme jeho průmět x_{2_1}, v délce $\overline{x_{2_1}x_2}$ pak jeho výšku vzhledem ku rovině základní. Průmět (x_2) můžeme pak známým způsobem odvoditi.

Jiný významný bod přímky máme v bodu v, jehož průmětem v_3 jest úběžný bod průmětu P_3. Jeho průmět (v_2) obdržíme, vedeme-li bodem (s) rovnoběžku s průmětem (P_3) jakožto kollinearný paprsek, který průmět (P_2) protíná v průmětu hledaném. Nebo také vedeme libovolnou rovnoběžku H_3 ku P_3, která protíná stopy M a M' v bodech h a h'.

Rovnoběžka bodem h ku spojnici bodů h' a (s) vedená protíná průmět (P_2) v bodě (v_2).

Také pomocí sklopené roviny centralně promítající přímky P do roviny základní obdržíme tyto průměty bodu v. Vedeme-li bodem s rovnoběžku ku průmětu $s_1P_1 \equiv P_3$, protíná tato přímku P_2 v bodu v_2, z kterého odvodíme průmět v_{2_1} kolmicí spuštěnou s bodu v_2 na P_3. V průsečíku téže rovnoběžky s přímkou P máme bod v.

Bodu m příslušící průmět (m_2) můžeme sestrojiti buď samostatně dle konstrukce ve článku prvém uvedené, aneb, poněvadž průmět (P_2) již známe, sestrojíme kollinearný paprsek $m(s)$, který protíná průmět (P_2) v průmětu (m_2). Průmět m_{2_1} sestrojíme v průmětu $P_{2_1} \equiv P_3$, když sestrojíme $(m_2)\, m_{2_1} \perp$ ku M. Jest-liže ve sklopené rovině promítající přímky P sestrojíme promítající paprsek ms, protne tento průmět P_2 ve sklopeném bodu m_2. Spustíme-li s m_2 kolmici na průmět $P_{2_1} \equiv P_3$, obdržíme v patě její dříve již sestrojený průmět m_{2_1}.

V tomto sklopení centralně promítající roviny přímky P protíná se tato přímka s P_2 v bodu r, jehož průmět r_3 obdržíme v průsečíku paprsku promítajícího rs' s průmětem P_3. Ku průmětu r_3 nalezneme příslušný průmět (r_2) pomocí kollinearného paprsku $(s)r_3$, který se s průmětem (P_2) v bodu (r_2) protíná. Poněvadž se $r_{2_1} \equiv r_1$ nalézá v bodě P_1, musí bod (r_2) s P_1 býti v téže přímce kolmé ku stopě M.

Nebo vedeme-li bodem r_3 libovolnou přímku J, protne nám tato stopy M a M' v bodech j a j'; spojíme-li j' s (s) a vedeme s touto spojnicí bodem j rovnoběžku, protne tata kollinearný paprsek $(s)r_3$ v bodě (r_2). Souřadnici toho bodu máme ve sklopené centralně promítající rovině přímky P. Jestliže v této rovině spojíme s' s t_{2_1}, protne tato spojnice přímku P v bodu t a v délce $\overline{P_1 t}$ máme zároveň souřadnici toho bodu.

Poslední bod zvláštní t. j. úběžný bod u přímky P má promítající paprsek kolmý na rovině základní. Průmět s_1 jest tedy průmětem tohoto celého paprsku, tedy také průmětem u_{2_1} jakož i u_3. Proto musí se nalézati průmět (u_2) v průseku průmětu O_1 osy O s průmětem (P_2).

Tento bod (u_2) také bychom mohli sestrojiti jakožto kollinearně sdružený k $u_3 \equiv s_1$. Užijeme-li sklopené roviny promítající přímky P, obdržíme v průsečíku promítajícího paprsku bodu u s průmětem P_2 bod u_2; spustíme-li s u_2 kolmici na P_3, obdržíme v patě kolmice této průmět u_{2_1} a v délce $\overline{u_2 u_{2_1}}$ výšku ζu_2 průmětu u_2.

7. *Vztahy průmětů přímky ve zvláštních polohách se nalézající při svislé poloze průmětny perspektivné.*

a) Přímka jest v poloze vodorovné.

Budiž opět M stopou roviny $\mathrm{R} \perp \mathrm{M}$, M' stopou roviny $\mathrm{R}_s \parallel \mathrm{R}$, s_1 průmětem středu a délka $\overline{s_1 s} = \zeta_s$. P_3 jest průmětem přímky $P \parallel \mathrm{M}$ a průmět $P_1 \parallel P_3$.

Průsečíky P_3 s M a M' jsou průměty $t_2 \equiv t_{2_1} \equiv t_3$ a w_3. Abychom sestrojili průmět (v_2), vedeme průmětem (s) centralu $(s)v \parallel P_3$; pak vedeme libovolnou přímku H_3 rovnoběžnou ku P_3, která stopy M a M' protíná v bodech h a h'. Spojíme-li bod h' s průmětem (s) a bodem h vedeme se spojnicí tou rovnoběžku, protíná tato kollinearnou přímku $(s)v_3$ v hledaném průmětu (v_2). Spojnice bodů t_2 a (v_2) jest pak průmětem (P_2).

Kratčeji přijdeme k průmětu (P_2), jestliže spojíme bod w_3 s průmětem (s) a vedeme s touto spojnicí bodem t_2 rovnoběžku.

Průmět v_{2_1} obdržíme, když vedeme průmět $s_1 v_\infty \parallel P_3$, který přímku $M \equiv P_{2_1}$ v tomto bodě protíná.

Mimo to musí přímka $(v_2)\, v_{2_1}$ býti kolma ku stopě M. Průmět t_1 obdržíme v průmětu P_1 pomocí průmětu $s_1 t_2$ paprsku promítajícího st. Bodu w příslušný průmět w_1 máme v průsečíku stopy M' s průmětem P_1. Bod $m = v = u$.

Bod r, průsečík přímky P s rovinou R nebo průsečík této přímky s jejím průmětem P_2, má svůj průmět r_1 v průsečíku průmětu P_1 s $P_{2_1} \equiv M$. Průmět $s_1 r_1$ paprsku sr protíná P_3 v r_3

a kollinearný paprsek $(s)r_3$ protíná (P_2) v průmětu (r_2) Při tom průměty (r_2) a (r_{2_1}) jsou v přímce kolmé ku M.

Chtěli bychom ještě určiti výšku přímky nad rovinou základní. Za tím účelem sklopíme rovinu orthogonalně promítající paprsku centralně promítajícího jednoho z bodů přímky P na př. bodu t. Sestrojíme proto $s_1s \perp s_1t_1$ a $s_1s = \zeta_s$, pak vztyčíme také v bodu t kolmici ku s_1t_1, která spojnici st_{2_1} v bodu t protíná; pak $t_1t = \zeta_t$ jest výškou všech bodů přímky $P \parallel M$.

b) Vztah mezi průměty přímky, je-li $P \perp$ M *při svislé poloze průmětny perspektivné.*

Budiž opět dáno $M \equiv$ R$_1$, $M' \equiv$ R$_1'$ $\parallel$ R$_1$, s_1 jakožto průmět středu promítání a $s_1s = \zeta_s$.

Bod P_1 jest orthogonalným průmětem přímky P. Ve spojnici s_1 s P_1 máme průmět P_3; v průsečíku $t_{2_1} \equiv t_3$ průmětu P_3 s M máme průmět P_{2_1}. Kolmice v bodu t_2 ku stopě vztyčená jest průmětem (P_2). Průmět $t_1 \equiv P_1$. Abychom souřadnici ζ_t stanovili, sklopíme centralně promítající rovinu přímky P kolem stopy její $\equiv P_3$ do roviny základní. Pak bude přímka P po sklopení v přímce kolmé ku P_3 v bodu P_1 a bod s přijde do polohy takové, že $s_1s \perp P_3$ a zároveň $s_1s = \zeta_s$. Paprsek st_2 protíná pak P v bodu t a $t_1t = \zeta_t$.

Průsečík M' s P_3 jest průmět $w_3 \equiv s_1$, z něhož odvodíme ve sklopené rovině promítající bod w jakožto úběžný bod přímky P, takže $w = u$. Bod v, jehož průmět v_3 jest úběžným bodem průmětu P_3, obdržíme pohodlně ve sklopené rovině promítající přímky P, když bodem s vedeme rovnoběžku ku P_3, která protne P v bodu v, jehož $v_1 \equiv P_1$, v průsečíku s průmětem P_2 jest průmět v_2 a $v_{2_1} \equiv P_{2_1}$; průmět (v_2) jest určen tím, že délka $v_{2_1}(v_2) = \zeta v$. Průmět (v_2) lze také sestrojiti tím, že (v_2) se nalézá na kollinearném paprsku $(s)v_3 \parallel P_3$.

Konečně průměty stopy m: $m_1 \equiv m_3$; dále $m_{2_1} \equiv P_{2_1}$; pomocí sklopené roviny promítající lze odvoditi $m_{2_1}m_2 = \zeta m_2$.

8. *Vztahy mezi průměty přímky rovnoběžné se stopou perspektivné průmětny mající polohu obecnou.*

Jelikož přímka P jest rovnoběžna s oběma rovinami: M i R, jest $P_3 \parallel P_1$. Bod $t_2 \equiv t_{2_1} \equiv t_3$ jest bodem úběžným ve stopě M a proto i (P_2) jakož i P_{2_1} jsou rovnoběžny se stopou M. Průmět P_3 obdržíme, jestliže sklopíme rovinu orthogonalně promítající promítajícího paprsku jednoho z bodů přímky P, na př. bodu x, kolem stopy její $s_1 x_1$.

Sestrojíme $s_1 s \perp s_1 x_1$ a $\overline{s_1 s} = \zeta_s$; dále $x_1 x \perp s_1 x_1$ a $\overline{x_1 x} = \zeta_x$, pak spojnice sx protíná $s_1 x_1$ v bodu x_3, kterým prochází $P_3 \parallel P_1$. Abychom sestrojili průmět (x_2), vedeme paprsek $(s) x_3$; pak vedeme bodem x_3 libovolnou přímku H_3, pomocí které tak jako v předcházejících článcích sestrojíme průmět (x_2), kterým prochází průmět $(P_2) \parallel P_1 \parallel M$. Stejně odvodíme x_{2_1} a P_{2_1}.

Co se týče zvláštních bodů m, t, r, u, v, w přímky P v této poloze, jest zřejmo, že v tomto případě jsou všechny tyto body stotožněny s úběžným bodem přímky této. —

9. *Vztahy mezi průměty útvaru rovinného při obecné poloze průmětny.*

Předpokládejme, že rovina D určena třemi body abc, kteréž jsou dány svými orthogonalnými průměty a_1, b_1, c_1 a příslušnými centralnými průměty a_3, b_3, c_3 do roviny základní M vzhledem ku danému středu promítání s, jehož orthogonalný průmět s_1 a výšku ζ_s známe. Budiž naším úkolem sestrojiti průměty (a_2), (b_2), (c_2) při zvolené centralné průmětně R, určené stopou její M a stopou M' roviny $R_s \parallel R$, jakož i odvoditi průměty každého jiného útvaru ležícího v rovině D, hlavně oněch, jež vyplývají ze vzájemného poměru této roviny s rovinou základní M, s centralnou rovinou R a se středem promítání s.

K sestrojení průmětů (a_2), (b_2), (c_2) použijeme konstrukcí uvedených ve článku 1., sestrojujíce zároveň průměty a_{2_1}, b_{2_1}, c_{2_1}. Těmito průměty těchto tří bodů jest úplně rovina D dána a proto budeme moci souditi o poloze každého bodu neb přímky, jejichž kterýkoliv průmět orthogonalný neb jeden z obou průmětů centralných si zvolíme.

Kdybychom zvolili ku př. průmět orthogonalný d_1 nějakého libovolného bodu d roviny D, tu určíme jeho příslušné průměty d_3, (d_2) neb d_{2_1} na př. následovně:

Bodem a a b určena jest přímka C v rovině D ležící, jejíž průměty určeny budou příslušnými průměty těchto bodů. Přímka E bodem d a c určená, ležíc v rovině D protíná přímku C v bodu e, jehož průmět orthogonalný e_1 obdržíme v průsečíku průmětů C_1 a E_1, určeného orthogonalnými průměty c_1 a d_1. Určíme-li ku průmětu e_1 příslušný průmět e_3 na průmětu C_3 pomocí orthogonalného průmětu $s_1 e_1$ centralně promítajícího paprsku se, pak spojnice $c_3 e_3$ jest centralným průmětem přímky E. V průsečíku E_3 s průmětem $s_1 d_1$ máme pak průmět d_3, z něhož i další průměty (d_2) a (d_{2_1}) lze odvoditi.

Kdybychom měli ku danému orthogonalnému průmětu nějaké přímky P roviny D stanoviti další průměty této přímky, použijeme průsečíků f a g této přímky s přímkami C a E tak, jako dříve bodu e k určení přímky E.

Při určování průmětů bodů nějaké přímky přihlíželi jsme ku zvláštním bodům, jež vyplývaly z poměru jejího ku rovinám průmětným a středu promítání. Tak i zde zabývati se budeme takovými zvláštními přímkami roviny D, jichž opět budeme šest rozeznávati a to:

1. stopu M_D této roviny v rovině základní,
2. stopu R v průmětně centralné R,
3. přímku T, jejíž průmět T_2 se stotožňuje se stopou M průmětny R,
4. úběžnou přímku U roviny D,
5. přímku V, jejíž centralný průmět V_3 jest úběžnou přímkou roviny základní,
6. přímku W, jejíž centralný průmět W_2 jest úběžnou přímkou roviny R.

Stopu M_D roviny D v rovině základní obdržíme, sestrojíme-li způsobem ve článku 3. uvedeným stopy dvou přímek této roviny, na př. stopy m_C a m_E již určených přímek C a E. Odvodíme-li další průměty těchto stop, obdržíme i průměty (M_2^D) a $M_{2_1}^D$.

Průmět R_1 stopy R roviny D v průmětně R určíme pomocí bodů r_C a r_E, jichž průměty $r_1^C \equiv r_{2_1}^C$, $r_1^E \equiv r_{2_1}^E$ jsou průsečíky průmětů C_1, C_{2_1} respekt. E_1, E_{2_1}. Z tohoto průmětu R_1 přímky P_1 odvodíme pak průměty ostatní pomocí bodů (r_2^C), (r_2^E) a r_3^C, r_3^E.

Ze stopy M jakožto průmětu T_2 odvodíme ostatní průměty přímky T užitím průmětů t_2^C, t_2^E, v nichž průměty (C_2), (E_2) protínají stopu M.

Úběžná přímka U bude míti svůj průmět centralný U_3 ve spojnici bodů u_3^C, u_3^E. Jelikož paprsky su_C, su_D jsou rovnoběžny ku přímkám C a D, jest i rovina oněmi přímkami určená rovnoběžna s rovinou D a proto $U_3 \parallel M_D$. Pomocí dalších průmětů bodů u_C, u_E odvodíme další průměty úběžné přímky U. Jest patrno, že bude průmět U_2 rovnoběžný se stopou R roviny D v rovině R.

Přímka V, jejíž centralný průmět V_3 jest úběžná přímka roviny M, jest průsečnicí roviny D s rovinou centralně promítající rovnoběžnou s rovinou M. Zároveň patrno, že průmět V_2 jest totožný s přímkou R' takto ve článku 3. příp. *e* označenou. Ostatní průměty lze snadno odvoditi, při tom musí býti $V_{2_1} \parallel (V_2)$ a $V_1 \parallel M_1^D$.

Přímka W, jejíž průmět W_2 jest úběžná přímka v průmětně R, jest průsečnicí roviny centralné rovnoběžné ku rovině R s rovinou D. Následkem toho jest průmět W_3 totožný se stopou M' roviny R_s (článek 1.). Ostatní průměty sestrojíme pomocí průmětů w_3^C a w_3^E, v nichž průměty C_3 a E_3 protínají stopu M'.

Stanovení pravého tvaru útvaru v rovině D.

10. Pravý tvar nějakého útvaru v rovině D stanovíme tím, že sklopíme rovinu tuto kol stopy její M_D do roviny základní. Odvození pravého tvaru útvaru v rovině D z klinogonalného průmětu v pravém tvaru jeho centralného průmětu do roviny R lze tedy provésti, sklopíme-li rovinu D kol stopy M_D do průmětny pomocí vztahů, v jakých se postupně nalezají klinogonalný průmět v pravém tvaru centralného průmětu do roviny R s centralným průmětem do roviny M, dále průmět tento s orthogonalným průmětem do roviny téže, a konečně průmět tento se sklopeným útvarem v rovině D taktéž do roviny základní.

Jedná-li se o direktní odvození pravého tvaru útvaru v rovině D, můžeme uvésti klinogonalný průmět centralného průmětu roviny D do roviny R s pravým tvarem rovinného útvaru v jednoduchou souvislost tím způsobem, že sklopíme rovinu D místo do roviny M do roviny R kol příslušné stopy R, a pak si myslíme teprve rovinu R s oběma rovinnými útvary promítnutou klinogonalně v pravém tvaru do roviny M. Tím obdržíme v rovině R dva kollinearné útvary; osou kollineace jest průsečnice R a středem kollineace střed promítání s, sklopený kol průsečnice R'_D roviny $D_s \parallel D$ s rovinou R.

Abychom tuto průsečnici R'_D, totožnou dle předcházejícího článku s průmětem U_2, stanovili samostatně, vedeme rovinu D_s, jejíž stopa M'_D v rovině základní jest rovnoběžna se stopou roviny D, takže vzdálenost stopy M'_D od průmětu s_1 jest rovna vzdálenosti stopy M_D od průmětu V_1, dříve již sestrojeného. Průmět $R_1^{\prime D} \equiv U_1$ jakož i $(R_2^{\prime D}) \equiv (U_2)$ bude rovnoběžný ku průmětům R_1 respekt. (R_2) a bude procházeti průsečíkem stopy M'_D se stopou M roviny R.

Abychom provedli sklopení roviny $D_s \,||\, D$ a středu s do roviny R kolem stopy $R'_D \equiv U_2$, spustíme s bodu s kolmici ku rovině R t. j. již dříve sestrojenou optickou osu O (článek 1.) a stanovíme vzdálenost středu s od paty o této kolmice. Z průmětu (o) spustíme pak kolmici $(o)\,(k)$ ku průmětu $(R'_D) \equiv (U_2)$ a v bodu (o) vztyčíme ku $(o)\,(k)$ kolmici, na kterou naneseme vzdálenost $\overline{so}$; přeponu $\overline{s(k)}$ pravoúhlého trojúhelníka $s(o)(k)$ naneseme pak na prodlouženou kolmici $(o)(k)$ od bodu (k) na jednu neb druhou stranu a obdržíme střed (s') kollineace, v níž se nalézají klinogonalné průměty obou soumístných útvarů. Osami centralnými této kollineace jest přímka $(R'_D) \equiv (U_2)$ a pak kolem přímky R do roviny R sklopená průsečnice D' roviny $R'_s \,||\, R$ s rovinou D. (Jest patrno, že vzdálenosti $\overline{(s')(R')}$ a $\overline{(D')\,R}$ budou sobě rovny.)

Těmito útvary t. j. středem kollineace (s'), osou kollineace (R) a jednou z obou os centralných (R') nebo (D') jest dán kollinearný vztah mezi oběma útvary v rovině (R) a můžeme bezprostředně sestrojiti ku každému průmětu (p_2) nějakého libovolného bodu p roviny D příslušný bod ve sklopení roviny D do roviny R, jakož i naopak ku každému bodu ve sklopení tomto příslušný průmět centralný v rovině R.

Ostatně i orthogonalný průmět útvaru v rovině D ležícího je s centralným průmětem jeho do roviny R v kollineaci, kterou lze také uvésti bez použití centralného průmětu do roviny R do perspektivné polohy známým způsobem. Osami centralnými při této kollineaci jsou průmět V_2 pro rovinu R a U_3 pro rovinu základní. —