Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Martin Jašek

Funkce Bolzanova

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 51 (1922), No. 2, 69--76

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121916`

Funkce Bolzanova.

Z neznámých jeho rukopisů v bývalé dvorní knihovně vídeňské.

Dr.' M. Jašek v Plzni.

1. Všeobecně má se za to, že teprve práce Riemannovy, Hanklovy, zvláště pak ovšem Weierstrassovy z let šedesátých a sedmdesátých minulého století zasadily funkcím spojitým onu „žalostnou ránu“ (cette plaie lamentable), o níž mluví Hermite, zmiňuje se o dojmu, jakým působily tehdy funkce spojité, nemající derivací).*) Paul Du Bois Reymond nazývá to právem *„jednou z nejdalekosáhlejších událostí v poznání matematickém“*.

Podávaje v dalším (k lask. podnětu p. prof. Petra) první předběžnou zprávu o rukopise Bolzanově „Functionenlehre“ (v bývalé dvorní knihovně vídeňské), definuji funkci, obsaženou v druhé části tohoto díla, o níž tvrdí Bolzano a dokazuje — více než *třicet let před* Riemannem, Hanklem a Weierstrassem, že jsouc *spojitá* v celém uzavřeném intervalu (a, b), *„nemá derivací pro tolik hodnot svého argumentu, že mezi každé dvě z nich lze vložiti třetí, pro niž opět nemá derivace“*.**)

Domnívaje se, že tím nejstručněji charakterisuji vysokou úroveň tohoto neznámého dosud díla Bolzanova, rozšiřuji jen o málo předmět, o němž pojednávám: předesílám†) několik slov o pojmu derivace u Bolzana vůbec, uvádím základní věty jeho, týkající se differenciability funkcí spojitých, a připojuji poznámku, k níž dal podnět prof. Dr. K. Rychlík, upozorniv vhodně na jistou neshodu „Paradoxií“ s tímto rukopisem Bolzanovým. Odkazuje jinak k dotčené své zprávě německé, uzavírám pak toto sdělení.††)

---

*) „Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions continues qui n'ont pas derivées“. (Darboux, La vie et l'oeuvre d'Hermite, Paříž 1906.)

**) Doslova: „dasz (sie)... keine abgeleitete hat für so viele Werthe ihrer Veränderlichen, dasz zwischen je zwey derselben sich noch ein dritter, für welchen sie abermahls keine abgeleitete hat, nachweisen läszt.“ (Arch. 19., str. 2.)

†) v souhlase s obšírnější svou zprávou německou ve „Věstníku král. Č Spol. Nauk“, podle níž upravuji tento článek.

††) O rukopisech Bolzanových vůbec pojednám v obšírnější své práci o tomto rukopise Bolzanově. Zde překládám ze zmíněné své zprávy německé:

a) Již vydavatel „Parodoxií“ Fr. Příhonský zmiňuje se o tom, že práce Bolzanovy, pokud vyšly tiskem, jsou jen „jakoby ukázkami větších děl matematických“, uložených v jeho pozůstalosti. (Dr. Fr. Příhonský: „Drei philosophische Abhandlungen ...'. Aus Dr. B. Bolzanos Nachlasse“, Lipsko 1851, p. 129.). Vskutku pak také záhy po smrti Bolzanově oddaný jeho žák Jos. Michael Fesl, rovněž kněz a podobným osudem stíhaný jako jeho učitel, činil horlivé a obětavé pokusy, aby zachránil a odevzdal tisku, čeho cenu spíše předpokládal než dovedl odhadnouti. Dosáhl však jen toho, že pozůstalost nezmizela beze stopy. Jest uložena (nyní) z části v knihovně Českého zemského (Národního) Musea v Praze, z části — vědecky daleko významnější —

2. K předmětu, o nějž se zajímáme, přistupuje Bolzano v třetí části svého rukopisu těmito větami:

a) Derivace funkce v některém bodě x — a to derivace buď z prava nebo z leva — předpokládá spojitost funkce na téže straně bodu.

[Do slova, arch 17. strana 6.: „Wenn eine Function Fx für den bestimmten Werth x in Hinsicht auf einen gewissen positiven oder negativen Zuwachs eine

v bývalé dvorní (nyní Národní) knihovně ve Vídni, kamž byla odevzdána svou dobou z Akademie.

b) Staly se i později pokusy, aby obsah těchto památek přešel do veřejnosti. Tak „Filosofická společnost na universitě ve Vídni" zamýšlela již před dvaceti lety vydati tyto rukopisy (XVI. Jahresb. d. Philos. Ges. an der Univ. In Wien, 1902 3.) a ve stejném smyslu apeloval A. Korselt r. 1905 na Jednotu německých matematiků. (Jahresb. d. d. Math.-Vereinigung XIV. [1905]. Bohužel v žádném z těchto případů nedošlo k uskutečnění myšlenky.

c) Dosáhl jsem před časem svolení k prohlédnutí této pozůstalosti; jest na obou místech ohromná, ač ceny — rozmanité: důležité rukopisy vedle papírů celkem bezvýznamných, zlomky různých prací, náběhy a koncepty z ruzných dob, ojedinělé listy atd. — vše promícháno navzájem i s jinými listinami, toť asi obraz toho, co se zachovalo po Bolzanovi. Jeť pozůstalost uchována dosud tak, jak svou dobou jednotlivé její součástky přicházely od dárců. Počet listů jde do tisíců.

d) Z té příčiny nelze zatím podati přesného obrazu celku. Vskutku pak také všechny zprávy, jaké kdy pronikly o tom do literatury, jsou zhola bez ceny. Mám na mysli hlavně zprávu Zeithammerovu (O. Stelzer, B. Bolzano a Řehoř, Zeithammer, Č. Mysl XII., str. 337), jež nevystihuje ani v nejmenším obsahu těchto listin. Skutečně pak vyžádá si pouhé uspořádání jejich ještě dosti času a práce, jež ostatně předpokládá i jistou průpravu: znalost tištěných spisů Bolzanových i literatury o něm, jeho korespondence a jeho života vůbec, tehdejších poměrů kulturních a literárních vztahů Bolzanových k různým osobnostem, hlavně však jeho způsobu práce a — písma. Vždyť i Přihonský, jenž byl v denním styku s Bolzanem a znal jeho zkratky (jakými jsou vždy psány první náčrtky) shledal rukopis „Paradoxií" „nicht immer sehr lesbar" (Parad., 1851, str. V.). Co se týká zvláštností slohu a němčiny Bolzanovy, srov. Höfler, dodatek k novotisku „Wissenschaftslehre" B. I. (Lipsko 1914): „Sprachliches". — Nicméně obraz velikého díla matematického (matematicko-filosofického), o jakém se Bolzano nejednou zmiňuje ve své korespondenci a jež má na mysli také asi Přihonský, rýsuje se celkem z trosek, a lze se nadíti, že bude objeveno celé i s příslušnými doplňky. (Za ochotu, s jakou mi přispěli při čtení některých rukopisů v prvé době: p. dr. V. Řezníček, zást. ředit. knihovny Narodního Musea v Praze, později p. dr. O. Stelzer, knihovník okresní knihovny v Plzni, vyslovuji dík.)

e) Pokud se týká rukopisu „Functionenlehre" uchoval se ve dvou exemplářích, z nichž jeden jest originál, vlastní rukou Bolzanovou psaný, druhý opis, Bolzanem prohlédnutý a vlastnoručně opravený. Oba jsou v Národní knihovně vídeňské. (Dle tohoto „druhého vydání", úhledně přepsaného a shodného s prvým [až na některá menší nedopatření opisovače, jež přehlédl i Bolzano při korektuře] níže cituji.) Bohužel rukopis není stránkován, ani §§ nejsou označeny číslicemi. Uvádím tedy vždy číslo archu a v něm příslušnou stranu (1—8).

abgeleitete hat: so musz sie für eben diesen Werth von x und hinsichtlich auf denselben Zuwachs auch stetig sein."]

b) Nemá však naopak spojitost funkce za následek existenci derivace:

[Do slova, arch 17. strana 6.: „Nicht aber umgekehrt folgt aus der Stetigkeit einer Function für einen bestimmten Werth ihrer Veränderlichen und hinsichtlich auf ein gewisses Vorzeichen, dasz sie auch eine abgeleitete in dieser Beziehung habe."]

3. Zastavuje se na okamžik u těchto vět, nepodávám důkazů (Bolzanových, k nim připojených), ježto obě tyto věty obsaženy jsou, jak ukáži, vlastně již předem v jeho pojetí derivace. Přecházeje totiž k třetí části svého díla, nadepsané „Die Ableitung" (arch 16 32), shrnuje — jak u něho pravidlem — obsah předcházejících částí díla, uváděje zároveň čtenáře k tomuto pojmu *skoro doslova* takto:*)

a) Úkolem mého díla jest vyšetřovati vlastnosti funkcí, jaké projevují tyto při změnách svého argumentu. Zvláštní zřetel věnoval jsem ovšem tomu případu, kdy nejen Δx, nýbrž i $\Delta f(x)$ konvergovaly k nule. O tom — jakož i důsledcích z toho — bylo pojednáno v části věnované větám o spojitosti.**)

Leč — pokračuje Bolzano dále (vyvozuje svým zvláštním způsobem pojem derivace) — nelze se omeziti na to, abychom tyto přírůstky Δx a $\Delta f(x)$ pozorovali jen s toho hlediska: čtyři základní operace početní nutně vedou k tomu, abychom Δx a $\Delta f(x)$ uvedli ještě v jiné další vztahy.

Ježto však i součet obou těchto proměnných i jejich rozdíl a součin obecně konvergují k nule, jestliže i $\Delta f(x)$ i Δx samy konvergují k nule, t. j. ježto

$$\lim_{\triangle y = 0,\, \triangle x = 0} (\triangle y \pm \triangle x) = \lim \triangle y \pm \lim \triangle x = 0$$

$$\lim_{\triangle y = 0,\, \triangle x = 0} (\triangle y \,.\, \triangle x) = \lim \triangle y \,.\, \lim \triangle x = 0,$$

neposkytují tyto případy nic zajímavého pro analysu i nezbývá než podíl těchto proměnných:

$$\frac{\triangle f(x)}{\triangle x}$$

pro případ, že i $\triangle x$ i $\triangle f(x)$ — a to třeba zdůrazniti (vzhledem k tomu, co výše tvrdíme) — konvergují k nule.

*) Arch. 17, str. 6 a n. — Vyhýbám se v tomto českém článku častým německým citátům, zejména jsou-li delší a nemusím-li klásti zvláštní váhy na slovné znění. Jinak děje se v dotčene zprávě německé, kde i toto místo rukopisu jest uvedeno doslova.

**) Viz o nich pozn. v něm. zprávě.

Jest z toho patrno, že toto pojetí derivace uzavírá v sobě skutečně již předem předpoklad spojitosti funkce, i není třeba uváděti Bolzanova důkazu oné věty.

Jest tím však zároveň naznačen i zvláštní, svérázný způsob Bolzanův, jakým dochází k tomuto pojmu a v němž úmyslně pomíjí to, co historicky vedlo k jeho vytvoření: jest to jeden z dokladů aritmetisující tendence tohoto rukopisu, strachu z geometrie, jenž ostatně i na jiných místech rukopisu proniká.

b) Leč i druhá z obou uvedených vět obsažena jest v tomto pojetí derivace, jak vyplývá z pokračování dotčené úvahy:

„Takovýto kvocient $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$" — pokračuje Bolzano*) — „má tu zvlášnost (hat das Eigene), že může nabýti nejrozmanitějších hodnot, jsa někdy číslem neproměnným, jindy hodnotou proměnnou, kterážto roste někdy do nekonečna, jindy blíží se s libovolnou přesností (so sehr als man nur will) nějakému číslu realnému a konečnému, jindy nečiní ani tohoto ani onoho" — tedy úvaha, která zajisté potvrzuje výše uvedený můj výrok.

c) Leč konečně i třetí další větu domnívám se spatřovati v této quasi-definici, větu, jež vyslovuje známý fakt,**) že — pokud se týká derivací funkcí spojitých (z leva nebo z prava) — jsou možny jen tyto tři případy: buď jest derivace konečná a určitá, nebo nekonečná (leč určitého znamení), anebo neurčitá.

Věta toho se týkající obsažena jest v rukopise v archu 17, strana 7 a zní do slova:

[Arch 17., str. 7.: „Wenn es wahr seyn soll, dasz eine Function Fx für den Werth x und hinsichtlich auf einen gewissen positiven oder negativen Zuwachs keine abgeleitete hat, während sie in eben dieser Hinsicht Stetigkeit hat: so kann nur Einer von folgenden zwey Fällen Statt finden:

1. entweder der Quotient $\frac{\Delta Fx}{\Delta x}$ wächst bei der unendlichen Abnahme von Δx in das Unendliche; oder

2. es gibt wohl eine gewisse meszbare Zahl M, der dieser Unterschied so nahe gebracht werden kann, als man nur immer will, aber er bleibt nicht bey dieser Annäherung, sondern es gibt zu jedem Δx ein kleineres, dabey der Unterschied $\frac{\Delta Fx}{\Delta x} - M$ abermahls $> \frac{1}{N}$ wird."]

*) Překládám zde doslova, vynechávaje — s auktorem — to, co podle něho patrně samo sebou se rozumí, t. j. že čitatel i jmenovatel uvedeného podílu probíhají posloupnostmi, k nule sbíhajícími.

**) Dini (Dini-Lüroth), Fondamenti § 72.

4. Nerozšiřuje se dále o těchto větách, jež pokládal jsem za vhodno uvésti, abych poněkud aspoň naznačil ráz úvah Bolzanových a postup jeho myšlenek, přikročuji k jádru svého sdělení: **definici funkce**, o níž se zmiňuji v úvodu.

Bolzano užívá ji, aby odůvodnil větu:

Doslova, arch 18, str. 7: „Wie eine Function eine abgeleitete haben kann für Beydes, sowohl für gewisse vereinzelt stehende Werthe als auch für einen ganzen Inbegriff von Werthen ihrer Veränderlichen, so viele innerhalb gewisser Grenzen a und b liegen oder auch durchgängig für alle Werthe von x: so kann auch umgekehrt eine Function einer abgeleiteten *ermangeln* sowoh, für einen gewissen vereinzelt stehenden Werth als auch für einen ganzen Inbegriff von Werthen ihrer Veränderlichen, so viel innerhalb gewisser Grenzen a und b liegen, ja auch wohl durchgängig für alle ihre Werthe."

Věta tato, která ovšem v zásadě odpírá tomu, co uvedeno jest v „Paradoxiích",*) *opatřena jest dodatkem*, jejž uvedli jsme již na počátku a v němž tvrdí Bolzano:

„*dasz eine Function sogar stetig sein kann und doch keine abgeleitete hat, für so viele Werthe ihrer Veränderlichen, dasz zwischen je zwey derselben sich noch ein dritter, für welchen sie abermahls keine abgeleitete hat, nachweisen läszt*".

Aby dokázal tento dodatek dovolává se funkce, kterou konstruoval v druhé části *druhého oddílu* svého rukopisu, jednající o funkcích s *nekonečným počtem oscilací* a kterou definuje tam takto (Arch 13, str. 1 a n.):

I. Intervall (a, b), $a < b$, rozdělme na 4 díly:

1)

$$\left(a, a+\frac{3}{8}(b-a)\right), \left(\frac{3}{8}(b-a), \frac{a+b}{2}\right), \left(\frac{a+b}{2}, a+\frac{7}{8}(b-a)\right),$$

$$\left(a+\frac{7}{8}(b-a), b\right),$$

přiřazujíce úsečkám:

$$a, a+\frac{3}{8}(b-a), \frac{a+b}{2}, a+\frac{7}{8}(b-a), b$$

pořadnice:

$$A, A+\frac{5}{8}(B-A), \frac{A+B}{2}, A+\frac{9}{8}(B+A), B,$$

*) str. 66 původ. vyd. (v poznámce).

a definujme v něm funkci f_1 dle předpisu:

(2)

$$\begin{aligned}
f_1 &= A + \frac{5}{3}(x-a)\frac{B-A}{b-a} && \text{pro } a \leq x \leq a+\frac{3}{8}(b-a),\\
&= \frac{A+B}{2} + \left(\frac{a+b}{2} - x\right)\cdot\frac{B-A}{b-a} && \text{„ } a+\frac{3}{8}(b-a) \leq x \leq \frac{a+b}{2},\\
&= \frac{A+B}{2} + \frac{5}{3}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\frac{B-A}{b-a} && \text{„ } \frac{a+b}{2} \leq x \leq a+\frac{7}{8}(b-a),\\
&= B + (b-x)\cdot\frac{B-A}{b-a} && \text{„ } a+\frac{7}{8}(b-a) \leq x \leq b,
\end{aligned}$$

t. j. ve zvláštním případě (kdy n. př. $a=0$, $b=1$, $A=0$, $B=c$)

$$(3)\quad \left|\begin{aligned}
f_1(x) &= \tfrac{5}{3}\,c\,x && \text{pro } 0 \leq x \leq \tfrac{3}{8}\\
&= \tfrac{1}{2}c + c\left(\tfrac{1}{2} - x\right) && \text{„ } \tfrac{3}{8} \leq x \leq \tfrac{1}{2}\\
&= \tfrac{1}{2}c + c\,\tfrac{5}{3}\left(x - \tfrac{1}{2}\right) && \text{„ } \tfrac{1}{2} \leq x \leq \tfrac{7}{8}\\
&= 1\,c + c\,(1 - x) && \text{„ } \tfrac{7}{8} \leq x \leq 1
\end{aligned}\right.$$

II. Číníce krok další, prohlašme každý ze 4 intervalů (3) za (a, b), t. j. rozdělme každý z nich opět na 4 díly dle předpisu (1) a pomocí 4^2 rovnic tvořených v duchu předpisu (2), definujme druhou funkci $f_2(x)$ v intervalu $(0, 1)$; v zásadě týmž způsobem — t. j. zobecňujíce předpis (1) a (2) a aplikujíce jej postupně na každý ze 4^2 intervalů dělení druhého, potom na každý ze 4^3 intervalů dělení třetího, atd. — definujme pomocí 4^3 rovnic, plynoucích z téhož zákona (2), funkci $f_3(x)$ v témže intervalu $(0, 1)$, pomocí 4^4 rovnic funkci $f_4(x)$, atd . . . , dělení $0^{\text{té}}$ a z něho vyplývající funkci $f_0(x) = x$ nevylučujíce. Dospíváme tím

III. d e f i n i c e f u n k c e $f(x)$ v intervalu $(0, 1)$, resp. — mutatis mutandis — v libovolném intervalu (a, b), o níž lze tvrditi dle Bolzana:

a) ž e j e s t v s k u t k u d e f i n o v á n a p r o k a ž d é x ř e č e n é h o i n t e r v a l u,

b) ž e j e s t v n ě m s p o j i t á,

c) ž e v š a k p ř e s t o v y z n a č u j e s e v l a s t n o s t í, u v e d e n o u v c i t o v a n é m d o d a t k u.

[Doslova, arch 13, str. 4: „Ich werde erst darthun müssen, dasz eine solche Function (... die wir erhalten, wie ich behaupte, wenn wir die Function $F\,x$ nach einem solchen Gesetze von der Veränderlichen x abhängen lassen, dasz jeder zu x gehörige Werth der $F\,x$ die Grenze vorstellt, der sich zu demselben x gehörigen Werthe der

Function $\overset{n}{y}$ bey der unendlichen Vermehrung von n in das Unendliche nahen, sofern nicht beyde Werthe einander vollkommenn gleich sind) in der That möglich sey, dann wird sich leicht erweisen lassen, dasz sie auch dem Gesetze der Stetigkeit gehorche, und die Beschafenheit habe, welche im Lehrsatze vorausgesagt wird."]

5. Naznačené úkoly sub *a)*, *b)*, *c)* splňuje Bolzano takto:

Ad *a)*: I. Označujte: a_n, b_n hranice kteréhokoli ze 4^n intervalů n-tého dělení ($n = 0, 1, 2, 3 \ldots$); jest patrno, že každé $f_n(a)$ jest zároveň $f(a)$, každé $f_n(b)$ zároveň $f(b)$ čili:

$$f(x') = f_n(x') \text{ pro } x' = a_n, b_n.$$

II. Ježto maximum funkce $f_n(x)$ v intervalu (0, 1) dáno jest výrazem $$M_n = c + \tfrac{c}{8}\left(1 + \tfrac{5}{8} + \left(\tfrac{5}{8}\right)^2 + \cdots + \left(\tfrac{5}{8}\right)^{n-1}\right)$$
vyplývá z toho, co uvedeno sub I. a II. v odst. 4., že oscilace funkce $f(x)$ v kterémkoli částečném intervalu δ_n, vzniklém při n-tém dělení původniho intervalu (0, 1):

$$\delta_n = \frac{3^{n-r}}{8^n} \qquad r = 0, 1, 2, \ldots n,$$

dána jest (v absol. své hodnotě) výrazem:

$$|\Delta_n| < \left|\frac{\Delta_n}{8}\sum_{r=0}^{n}\left(\frac{5}{8}\right)^r = \frac{4}{3}\right|\Delta_n,$$

v němž Δ_n značí absol. hodnotu oscilace funkce $f_n(x)$ v kterémkoli z hořejších intervalů δ_n, jest patrno, že označíme-li x'' kteroukoliv z hodnot intervalu (0, 1), jež nebyla vzata v úvahu sub 5. I:

$$|f(x'') - f_n(x'')| < \frac{4}{3}\Delta_n$$

kterýžto rozdíl — končí Bolzano — „s rostoucím n zmenšuje se do nekonečna" (Arch 13, str. 7.).

Ad *b)*: „Auch zeigt sich" — citujeme tentokrát doslova — „dasz diese Function dem Gesetze der Stetigkeit folge; denn weil die f_n*) dem Gesetze der Stetigkeit folgt, so nimmt der Unterschied der beyden Werthe von $f_n(x)$, welche zu x und $x + \triangle x$ gehören, mit $\triangle x$ in das Unendliche ab, also musz auch der Unterschied der Werthe fx und $f(x + \triangle x)$, denen die ersteren unendlich nahe treten, in das Unendliche abnehmen."

Ad *c)* [Arch 19, str. 1—3, v doslovném překladu]: „Funkce $f(x)$, jižto pozorujeme a při niž stoupání a klesání tolikrát

*) Bolzano piše: $\overset{n}{y}$

se střídá, že pro žádné x nelze udati ω tak malé, že by $f(x)$ uvnitř intervallu x a $x+\omega$ buď stále rostlo nebo stále ubývalo, jest dokladem toho, že funkce může býti dokonce spojitá a přece nemíti derivace pro tolik hodnot své proměnné, že mezi každými dvěma z nich lze prokázati existenci třetí, pro niž rovněž nemá derivace.... Ke každému totiž Δx lze udati n tak veliké, že $(\frac{3}{8})^n < \Delta x$. Označíme-li tedy $(\frac{3}{8})^n$ krátce α, rozdíl pak, o nějž hodnota funkce $f_n(x)$ jest větší než k témuž x náležející hodnota funkce $f(x)$, jakožto β: tu víme, že k hodnotě $x+(\frac{3}{8})\,\alpha$ náleží přírůstek funkce $f_n(x)$ rovný $\frac{5}{8}\beta$, k $x+(\frac{3}{8})^2\alpha$ přírůstek $(\frac{5}{8})^2\beta$ a vůbec k $x+(\frac{3}{8})^r\alpha$ přírůstek $(\frac{5}{8})^r\beta$. Ježto však všechny jmenované hodnoty a přírůstky funkce $f_n(x)$ jsou zároveň hodnoty nebo přírůstky funkce $f(x)$, jest patrno, že poměr $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ probíhá s ubývajícím Δx tuto řadu hodnot:

$$\frac{5}{3}\frac{\beta}{\alpha},\ \left(\frac{5}{3}\right)^2\frac{\beta}{\alpha},\ \left(\frac{5}{3}\right)^3\frac{\beta}{\alpha},\ \ldots,\ \left(\frac{5}{3}\right)^r\frac{\beta}{\alpha}.$$

Ježto pak $(\frac{5}{3})^r$ roste do nekonečna, není pochyby, že také podíl $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ roste do nekonečna.“

* * *

6. V tomto tedy asi postupu myšlénkovém béře se Bolzano při důkaze své věty.

Podotýkám výslovně, že reprodukuji zde **jen myšlenky Bolzanovy**, vlastních dodatků zatím úmyslně se vystříhaje; nepokládámť to ani za nutno ani za **vhodno** v tomto **sdělení** pouze **předběžném**.

Zde akcentuji spíše **myšlenku** samu, jež jest na onu dobu překvapující a kterou předstihuje Bolzano svou dobu o několik desítiletí: vždyť „Functionenlehre“ hotova byla a **k tisku připravena** již r. 1834 a tudíž **pracována v době dřívější** — před r. 1830.

Tento fakt jest na věci **nejvýznamnější**.

Zbývá několik slov o jisté poznámce v „Paradoxiích“ Bolzanových, obsahující větu, jež zhola odporuje větám zde citovaným a zvláště dodatku, uvedenému v odst. 4.

Poznámka ona (Paradoxie, str. 66 původní vyd. z r. 1851) **jest falsum** vydavatelů.

Dovozuji to obšírněji v dotčené své zprávě německé, k níž i v té příčině odkazuji.