Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Bedřich Pospíšil

Eine Bemerkung über stetige Verteilungen

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 70 (1941), No. 2, 68--72

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121890

Eine Bemerkung über stetige Verteilungen.

Von **Bedřich Pospíšil**, Brünn.

(Eingegangen den 18. Dezember 1940.)

Dieser Aufsatz ist eine ergänzende Zusatzbemerkung zu meinen zwei letzten Abhandlungen,[1]) woraus ich alle Bezeichnungen übernehme. Insbesondere ist A ein fester Boolescher Ring mit Einselement e, Φ die Gesamtheit aller beschränkten stetigen Verteilungen auf A (vgl. MF. Einleitung). Mit φ (mit etwaigen Indizes) werden immer Elemente von Φ bezeichnet. Laut MF. II, Bemerkung 2 auf S. 332 sind die Summen und Produkte und allgemeiner alle stetigen Funktionen endlich vieler φ im Bereiche Φ eindeutig bestimmt, so daß man statt $\varphi \in \varphi_1 + \varphi_2$ bzw. $\varphi \in \varphi_1\varphi_2$ und allgemeiner statt $\varphi \in g(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ für jede stetige (reelle) Funktion g von n reellen Veränderlichen ganz einfach $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ bzw. $\varphi = \varphi_1\varphi_2$ und allgemeiner $\varphi = g(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ schreiben darf.

1. Eine reelle Homomorphie von Φ ist eine auf Φ erklärte (nicht identisch verschwindende reelle) Funktion h, die den Bedingungen $h(\varphi_1 + \varphi_2) = h\varphi_1 + h\varphi_2$ und $h(\varphi_1\varphi_2) = h\varphi_1 \,.\, h\varphi_2$ genügt; mit h (mit etw. Indizes) bezeichne ich immer reelle Homomorphien von Φ. Der Stetigkeitsbegriff für h wurde in Vert. I erklärt. Es gilt nun folgendes:

h ist immer stetig.

(Ich weiß nicht, ob Entsprechendes unter allgemeineren Voraussetzungen über Φ, wie z. B. in Vert., gilt.)

Beweis. Es genügt zu zeigen: Ist $|\varphi| \leqq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ rational, so ist $|h\varphi| \leqq \varepsilon$. Also sei $g(x) = x + \varepsilon$, $v(x) = +\sqrt{x}$ für $x > 0$ und sonst $v(x) = x$. Dann verschwindet $\varphi_g(j) = \varphi(g^{-1}(j))$ für jedes Intervall j, das lauter negative Zahlen enthält. Wir schreiben

[1]) Die erste (Über die meßbaren Funktionen) ist in den Math. Annalen **117** (1940), S. 327 erschienen; zitiert: MF. Die zweite (Von den Verteilungen auf Booleschen Ringen) soll gleichzeitig mit dem vorliegenden Aufsatze in den Math. Annalen **117** oder **118** erscheinen; zitiert: Vert.

ferner $\varphi^* = (\varphi_g)_v$ (vgl. den Anfang des Beweises von Satz 1 in Vert.). Laut Vert. (a) sind φ_g und φ^* Elemente von Φ und man sieht ohne Mühe, daß $\varphi_g = \varphi^* . \varphi^*$ ist. (Denn $\varphi^*(j_1) . \varphi^*(j_2) = \varphi^*(j)$, wo j die Gesamtheit aller nicht negativen Zahlen in $j_1 j_2$ bezeichnet. Und man hat ja $\varphi^*(j) = \varphi_g(v^{-1}(j)) \subset \varphi_g(j^*)$, wo j^* das Intervall aller xy mit $x \in j_1$ und $y \in j_2$ ist.) Also ist nach Vert. (b) und (d): $0 \leqq (h\varphi^*)^2 = h\varphi_g = h\varphi + h\varphi_\varepsilon = h\varphi + \varepsilon$, d. h. $-\varepsilon \leqq h\varphi$.

Setzt man zweitens $g(x) = -x + \varepsilon$, so sieht man ebenso: $h\varphi \leqq \varepsilon$.

2. Wenn man nun in den Beweisen von Vert. Satz 1 und MF. II Satz Φ wie im vorliegenden Aufsatze erklärt, so sieht man, daß alle in diesen Beweisen vorkommenden φ immer in Φ bleiben. Also:

Vert. Satz 1 und MF. II Satz gilt auch für unser Φ.

Daraus folgt:

h ist immer ein Charakter von Φ im Sinne von MF. S. 333.

3. Man kann nun in Φ die Norm $\| \varphi \|$ als die untere Grenze aller $M > 0$ mit $| \varphi | \leqq M$ einführen. Laut Vert. (j) ist $\| \varphi \|$ die obere Grenze aller $h\varphi$, wo h alle Charaktere, oder was nach 2 auf dasselbe hinauskommt, alle reellen Homomorphien von Φ durchläuft. Also:

Die Norm in Φ ist durch die Algebra in Φ vollständig bestimmt. Dabei verstehe ich unter der Algebra in Φ die Regel, die gewissen Paaren φ_1, φ_2 eine Summe $\varphi_1 + \varphi_2$ und ein Produkt $\varphi_1\varphi_2$ in Φ zuordnet. (Allgemein kann es Paare geben, denen keine Summe oder kein Produkt im Sinne von MF. S. 332 entspricht.)

Man kann nun Φ als einen metrischen Raum auffassen. Unter der Entfernung $\varrho(\varphi_1, \varphi_2)$ von φ_1 und φ_2 wollen wir die obere Grenze aller $| h\varphi_1 - h\varphi_2 |$ verstehen. Ist $\varrho(\varphi_1, \varphi_2) = 0$, so hat man immer $h\varphi_1 = h\varphi_2$. Da nun die h_π (MF. I) zu unseren h zu zählen sind (MF. I Hilfssatz 3) und φ laut MF. I Hilfssatz 2 durch die Angabe sämtlicher $h_\pi\varphi$ eindeutig bestimmt ist, so folgt daraus $\varphi_1 = \varphi_2$. Also sieht man, daß ϱ wirklich eine Metrik ist.

Ist insbesondere $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, so ist $\| \varphi \| = \varrho(\varphi_1, \varphi_2)$, also ist unsere Metrik zur oben erklärten Norm vollkommen passend eingeführt worden.

Die Metrik von Φ ist durch die Algebra in Φ völlig bestimmt.

4. Unser nächstes Ziel ist zu zeigen, daß auch umgekehrt unsere Metrik die Algebra in Φ eindeutig bestimmt. Dazu wollen wir uns eines topologischen Modells bedienen. e sei das Stonesche Modell von A, d. h. der (bis auf Homöomorphien völlig bestimmte) bikompakte Hausdorffsche Raum, in dem jede offene Menge Vereinigung von Bausteinen (d. h. gleichzeitig offenen und abgeschlossenen Mengen) ist, A (bis auf Isomorphien) dem Ringe aller Bausteine in e gleich. Für Punkte π von e nehme man die Prim-

ideale π in A und zwar derart, daß $\pi \in a$ mit a non $\in \pi$ gleichbedeutend ist. Ferner sei K der Mengenkörper aller $b + i$, wo b ein Baustein und i eine Menge der ersten Kategorie in e ist. Laut 2 und MF. II Satz nebst Zusatz entsprechen unsere h den Punkten π von e eineindeutig; man schreibe $h = h_\pi$. Schreiben wir nun $f_\varphi(\pi) = h_\pi \varphi$, so haben wir der Verteilung φ eine Funktion f_φ zugeordnet. Aus MF. VI Satz 1 (nebst Beweis und Zusatz 2) und Vert. (i) folgt:

f_φ ist auf e stetig und in K meßbar.

Und umgekehrt:

Ist f auf e stetig und in K meßbar, so gilt $f = f_\varphi$ für eine (und nur eine) Verteilung φ.

Kraft MF. VI Satz 1 ist nämlich unserer Funktion f eine Verteilung φ zugeordnet; und man hat $f = f_\varphi$. Denn laut l. c. ist die auf e stetige Funktion $f - f_\varphi$ bis auf eine Menge der ersten Kategorie gleich Null. Nach dem zweiten Abschnitte von l. c. Beweis ist das Komplement einer Menge der ersten Kategorie in e dicht, also verschwindet $f - f_\varphi$ überall.

φ ist durch $f = f_\varphi$ laut MF. I Hilfssatz 2 eindeutig bestimmt.

5. Ein Ring, in dem eine Metrik erklärt ist, heiße ein *metrischer Ring*, wenn die Summen und Produkte stetige Funktionen der Paare ihrer Glieder sind.

Die vollständige Hülle H des Raumes Φ kann (in einer einzigen Weise) als ein metrischer Ring aufgefaßt werden.

Dabei ist natürlich die Algebra von Φ in die von H eingebettet.

Beweis. Nach dem Obigen entsprechen die φ gewissen stetigen Funktionen f_φ auf e. Alles wird gezeigt, wenn wir beweisen, daß die Gesamtheit aller stetigen f auf e die vollständige Hülle des Raumes aller f_φ ist. Ist eine solche f mit $\| f \| < M$ gegeben, so möge das Intervall $-M, +M$ durch die Punkte

$$p_1 = -M < p_2 < \ldots < p_n < p_{n+1} = +M$$

in n gleiche Intervalle eingeteilt werden. j_k sei das abgeschlossene Intervall p_k, p_{k+1}. Die Länge aller j_k ist $l = 2M/n$. Ferner sei j^k das mit j_k konzentrische offene Intervall von der Länge $2l$ und c_k der Mittelpunkt davon.

Nun ist $F_k = f^{-1}(j_k)$ eine abgeschlossene und $G_k = f^{-1}(j^k)$ eine offene Menge in e, $F_k \subset G_k$. Also kann man F_k durch Bausteine $\subset G_k$ überdecken. Wegen der Bikompaktheit kann man mit einer endlichen Überdeckung ausreichen und die Vereinigung v_k dieser Überdeckung ist ein Baustein, $F_k \subset v_k \subset G_k$. Da die Mengen F_k ganz e erschöpfen, so ist auch die Vereinigung unserer v_k ganz e gleich. Man kann nun Teilbausteine o_k von v_k derart wählen, daß e noch von den o_k überdeckt wird, dabei aber unsere o_k zu je zwei punktfremd ausfallen.

Man setze $f_n(x) = c_k$, falls $x \in o_k$. f_k ist auf e stetig und in K meßbar und man hat $\| f - f_n \| < l$. Also ist f der gleichmäßige Limes der Folge f_n und laut 4 kann man $f_n = f_\varphi$ für ein passendes (von n abhängiges) φ schreiben. Damit ist alles bewiesen. Man hat sogar folgenden Zusatz:

Der Raum H ist normiert und dem Raume $\mathfrak{F}$ aller stetigen Funktionen auf e in allen Hinsichten isomorph.

D. h. es gibt eine eineindeutige Abbildung von $\mathfrak{F}$ auf H, die alles (Norm, Algebra und auch stetige Operationen) ungeändert läßt. Auf H können nämlich nicht nur Summen und Produkte, sondern auch für jede stetige Funktion g von N reellen Veränderlichen die Elemente $s = g(s_1, \ldots, s_N) \in H$, $s_k \in H$, erklärt werden und zwar auf eine einzige Weise, wenn sie auf Φ gleich den früher eingeführten und als Operationen auf H stetig (in der ganzen Argumentengruppe) ausfallen sollen.

6. Und nun sehen wir schon, daß die Algebra in Φ durch die Metrik in Φ völlig bestimmt ist. Durch Φ ist nämlich die vollständige Hülle H gegeben und man hat:

Die Metrik von H bestimmt den Ring A eindeutig.

Denn die Metrik von H bestimmt nach 5 diejenige von $\mathfrak{F}$. Und dadurch wird nach M. H. Stone[2]) der Raum e, also auch der Ring A aller Bausteine in e völlig bestimmt. Ich behaupte noch:

Die Algebra von H bestimmt den Ring A eindeutig.

Denn die Algebra von H bestimmt nach 5 die Algebra von $\mathfrak{F}$. Und dadurch wird die Metrik von $\mathfrak{F}$, also alles bestimmt.

Man kann dies in wenig Worten herleiten. Vor allem kann man die Überlegungen von 1 und Vert. Beweis von Satz 1 von Φ auf $\mathfrak{F}$ übertragen. Aus 4 in Vert. Satz 1 sieht man, daß für jede reelle Homomorphie h von $\mathfrak{F}$ immer $w = hf$ ein Häufungspunkt der Werte, also (da e bikompakt ist) ein Wert von f ist. Also ist $f^{-1}(w)$ nicht leer, abgeschlossen. (Und nun vgl. Sto. S. 465:) Für die Funktion

$$f = | f_1 - w_1 | + \ldots + | f_N - w_N |$$

gilt nach 5 in Vert. Satz 1: $hf = 0$. Also ist 0 ein Wert von f, d. h. die endlich vielen Mengen $f_k^{-1}(w_k)$ haben einen nicht leeren Durchschnitt. Da nun e bikompakt ist, enthält der Durchschnitt aller $f^{-1}(w)$ einen Punkt π und man hat immer $hf = f(\pi)$. Also sind die Werte der Funktionen f, also auch die Metrik in $\mathfrak{F}$, durch die Algebra von $\mathfrak{F}$ vollständig bestimmt.

Aus dem Obigen folgt, daß die reellen Homomorphien h von $\mathfrak{F}$ mit den Punkten π von e in einer eineindeutigen Korrespondenz sind: $h_\pi f = f(\pi)$. Also nach 5:

---

[2]) Trans. Amer. Math. Soc. **41** (1937), S. 469; zitiert: Sto.

Die reellen Homomorphien h von H entsprechen den Primidealen π in A eineindeutig derart, daß $h = h_\pi$ auf Φ mit der ursprünglichen Auffassung übereinstimmt. Für die zu $s \in H$ gehörende Funktion $f_s \in \mathfrak{F}$ ist $f_s(\pi) = h_\pi s$.

7. Jetzt lassen wir alle Verabredungen von Vert. III (Anfang) gelten. Nur muß keineswegs R ein Ring sein. Die Funktionen, die nur auf einer Nullmenge abweichen, werden ganz identifiziert. Man kann reelle Homomorphien k von R definieren und alles Obige bleibt für R (an Stelle von Φ) bestehen. Insbesondere wird unter der Entfernung $\varrho(r_1, r_2)$ in R die obere Grenze aller $| kr_1 - kr_2 |$ verstanden. Wenn man nun diejenigen r, deren Entfernung verschwindet, identifiziert und wie in Vert. die Identifizierungen etwa mittels Klammern andeutet, so kann man vom Raume (R) alles wie von Φ aussagen. Unsere Identifizierungen sind ganz natürlich, da im Falle, wo R ein Modul ist, $\varrho(r_1, r_2) = 0$ mit $r_1 \equiv r_2$ im Sinne von l. c. gleichbedeutend ist. Ist insbesondere $A = \mathfrak{F}/\mathfrak{e}$, so zieht man aus 5:

Die vollständige Hülle von (R) ist dem Raume H in allen Hinsichten isomorph.

Bemerkung. In 4 kann man im Falle meßbarer Funktionen r nichts von der Meßbarkeit von f_r in K aussagen. (Statt e wird ja der Raum ε genommen!) Dies schadet aber gar nichts. Denn zu jeder (auf ε erklärten) f_n in 5, die ja nur endlich viele Werte c_k annimt, kann man (laut MF. VII Hilfssatz 1) zu je zwei fremde Mengen a_k aus $\mathfrak{F}$, $la_k = f_n^{-1}(c_k)$ angeben, $f_n = f_r$, $r(x) = c_k$ für $x \in a_k$ und sonst $r(x) = 0$.

8. Nun ist es leicht, aus Relationen zwischen zwei Booleschen Ringen A und A' auf H und H' zu schließen und umgekehrt. Z. B. besagt die Homomorphie $A \to A'$ (Sto. S. 383): e' kann in e eingebettet werden. Daraus folgt eine Homomorphie $\mathfrak{F} \to \mathfrak{F}'$, also laut 5 auch $H \to H'$. Ist umgekehrt H' ein Homomorph des Ringes H, so ergibt jede reelle Homomorphie von H' eine solche von H. Laut 6 (Ende) kann also e' als eine Untermenge von e angesehen werden. Aber auch die Topologie von e' ist in e eingebettet. Denn $\mathfrak{F}'$ besteht aus partiellen Funktionen von $\mathfrak{F}$ und durch diese ist (laut Sto. S. 469) die Topologie von e' passend bestimmt. Also:

Aus jeder Homomorphie $A \to A'$ folgt eine Homomorphie $H \to H'$ und umgekehrt.

*

Poznámka o spojitých distribucích.

(Obsah předešlého článku.)

Jde o souvislost Booleova okruhu s množinou t. zv. spojitých distribucí (Verteilungen) na tom okruhu.