František Rádl

O zbytku řady Taylorovy a Lagrange-Laplaceovy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 39 (1910), No. 2, 144--146

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121884

O zbytku řady Taylorovy a Lagrange-Laplaceovy.

Napsal Dr. Fr. Rádl.

Z řady Taylorovy při jedné proměnné přejdeme substitucí k všeobecnější řadě Lagrangeově udávající rozvoj funkce $f(x)$ dle mocnin libovolné jiné funkce $\varphi(x)$, při dvou proměnných k řadě Lagrange-Laplaceově, totiž k rozvoji funkce $f(x, y)$ dle funkcí $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$. Týmž způsobem obdržíme i zbytky ve formě s neurčitými koefficienty ϑ.

Nemá však smyslu zaváděti tuto substituci do výrazu pro zbytek ve formě omezeného integrálu. V praxi totiž vyjadřují se těmito rozvoji kořeny $x = \Phi(a)$ rovnice $\varphi(x) = a$, při dvou proměnných kořeny $x = \Phi(a, b)$, $y = \Psi(a, b)$ systému rovnic $\varphi(x, y) = a$, $\psi(x, y) = b$. Výraz integrální pro zbytek těchto řad, který obdržíme pouhou substitucí, je bezcenný, poněvadž se v něm vyskytují inversní funkce Φ, resp. Φ, Ψ, které tedy při praktické applikaci jsou neznámy.

V XVI. ročníku „Rozprav Akademie cís. Frant. Jos.“ (II. tř. č. 9.) odvodil nadepsaný autor zbytek řady Lagrangeovy ve tvaru omezeného integrálu při jedné proměnné. Při dvou proměnných nutno nejdříve udati vhodnou formu pro integrální zbytek řady Taylorovy.

Pokládejme x, y za dvě daná čísla, s, t za dvě proměnné a $f(x - s, y - t)$ za funkci, která i se svými partiálními derivacemi dle s, t a do řádu n-ho v jistém okolí bodu (x, y) jest spojitá.

Pak udává relace

$$\int_{0,0}^{h,k} \frac{\partial f(x + h - s, y + k - t)}{\partial z} ds + \frac{\partial f(\ldots)}{\partial y} dt$$

$$= f(x + h, y + k) - f(x, y)$$

výraz pro větu o střední hodnotě ve formě křivkového integrálu při funkci o dvou neodvisle proměnných.

Zbytek řady Taylorovy obdržíme postupnou integrací per partes analogicky jako se děje známou methodou Laplaceovou při jedné proměnné. Přechod k dvěma proměnným jeví se zde tím způsobem, že z integrálu obyčejného, v přímce, přejdeme k integrálu křivkovému, tedy v rovině.

Položme za tím účelem křivkový integrál

$$\int_{0,0}^{s,t} \frac{\partial f(x-s,\, y-t)}{\partial s}\, ds + \frac{\partial f(x-s,\, y-t)}{\partial t}\, dt$$

jednak rovným hodnotě

$$-\Big/_{0,0}^{s,t} f(x-s,\, y-t) = f(x,\, y) - f(x-s,\, y-t), \qquad (1)$$

jednak integrujme per partes, tak že obdržíme

$$\int_{0,0}^{s,t} \ldots = s\frac{\partial f}{\partial s} + t\frac{\partial f}{\partial t} + \int_{0,0}^{s,t} \left(s\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} + t\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}\right) ds$$

$$+ \left(t\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + s\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}\right) dt.$$

Integrujeme-li integrál na pravé straně obdržený opět částečně, můžeme ho položiti rovným, jak následuje:

$$\int_{0,0}^{s,t} \ldots = \frac{1}{2!}\left(s\frac{\partial}{\partial s} + t\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 . f$$

$$+ \int_{0,0}^{s,t} \frac{1}{2!}\left[\left(s\frac{\partial}{\partial s} + t\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 \frac{\partial}{\partial s}\right] . f\, ds + \Big/_{s}^{t} .$$

Symbolické označení v prvním členu křivkového integrálu značí patrně výraz

$$\frac{1}{2!}\left(s^2\frac{\partial^3 f}{\partial s^3} + 2st\,\frac{\partial^3 f}{\partial s^2 \partial t} + t^2\frac{\partial^3 f}{\partial s \partial t^2}\right) ds;$$

druhý člen integrálu vznikne z prvního, píšeme-li t místo s, což vyjadřuje znak $\Big/^{t}$.

Opakujeme-li tuto integraci per partes $n - 1$krát, obdržíme konečně

$$\int_{0,0}^{s,t} \ldots = \frac{1}{(n-1)!}\left(s\frac{\partial}{\partial s} + t\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n-1} . f$$

$$+ \int_{0,0}^{s,t} \frac{1}{(n-1)!}\left[\left(s\frac{\partial}{\partial s} + t\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n-1}\frac{\partial}{\partial s}\right] f ds + \int_s^t .$$

Sečteme-li všech $n - 1$ rovnic, obdržíme vzhledem k (1) po substituci pro $s = x$, $t = y$ rozvoj Taylorův pro $f(x, y)$ až k členům stupně n — lho, zbytek jest pak vyjádřen ve formě *křivkového integrálu*:

$$R_n = \int_{0,0}^{x,y} \frac{1}{(n-1)!}\left[\left(s\frac{\partial}{\partial s} + t\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n-1}\frac{\partial}{\partial s}\right] f ds + \int_s^t .$$

Zavedeme-li nyní substituci nových proměnných, možno celý postup opakovat pro řadu Lagrange-Laplaceovu, čímž obdržíme zbytek ve formě omezeného integrálu, v němž inversní funkce Φ, Ψ se nevyskytují.

Rozšíření na libovolný počet proměnných jest samozřejmé.

Riemannova theorie o počtu prvočísel v daných mezích.

Napsal **Bohuslav Hostinský.**

(Pokračování.)

9. Úprava vzorce (8):

Integrací po částech dokáží se snadno rovnice:

$$\frac{1}{4}\int x^{-\frac{3}{4}} \cos\left(\frac{t}{2} \log x\right) dx = x^{\frac{1}{4}} \cos\left(\frac{t}{2} \log x\right)$$

$$+ \frac{t}{2}\int x^{-\frac{3}{4}} \sin\left(\frac{t}{2} \log x\right) dx,$$

$$\frac{t}{2}\int x^{-\frac{3}{4}} \sin\left(\frac{t}{2} \log x\right) dx = 2t\, x^{\frac{1}{4}} \sin\left(\frac{t}{2} \log x\right)$$

$$- t^2 \int x^{-\frac{3}{4}} \cos\left(\frac{t}{2} \log x\right) dx,$$