Antonín Libický

O trojúhelníku, jehož strany tvoří řadu arithmetickou. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 27 (1898), No. 3, 220--227

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121861

$$1 = \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2} + \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2},$$

takže bude

$$1 : \lambda^2 = [(a - b) \sin \beta]^2 + [(a - b) \cos \beta - c]^2$$
$$= (a - b - c)^2 + 4c\,(a - b) \sin^2 \frac{\beta}{2},$$

i máme potom

$$(9) \qquad \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{(a - b) \sin \beta}{\sqrt{(a - b - c)^2 + 4c\,(a - b) \sin^2 \frac{\beta}{2}}},$$

$$(10) \qquad \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{(a - b) \cos \beta - c}{\sqrt{(a - b - c)^2 + 4c\,(a - b) \sin^2 \frac{\beta}{2}}}.$$

Vztahy takové, ač k výpočtu nejsou způsobilé, dlužno přece znáti, neboť mohou někdy komplikované výpočty zjednodušiti.

V Praze, v srpnu 1895.

O trojúhelníku, jehož strany tvoří řadu arithmetickou.

Podává

Antonín Libický,

professor na Král. Vinohradech.

(Dokončení.)

Důležitými příčkami každého trojúhelníka jsou *těžnice;* pro náš zvláštní trojúhelník zjednoduší se vzorce, kterými se vypočítávají tyto příčky ze stran trojúhelníka, takto:

Budiž B_2 rozpolovací bod strany AC trojúhelníka ABC; těžnici BB_2 označme t_2 a ω jeden z obou úhlů vedlejších, jež tvoří u bodu B_2 tato těžnice se stranou AC a to úhel ležící proti nejmenší straně a. V $\triangle\, B_2CB$, jehož strany jsou $2m - d$, m a t_2, bude dle věty cosinové

$$(2m - d)^2 = m^2 + t_2^2 - 2\,mt_2 \cos\omega;$$

podobně v $\triangle$ AB_2B, jehož strany jsou $2m + d, m, t_2$ dle téže věty:

$$(2m + d)^2 = m^2 + t_2^2 + 2mt_2 \cos\omega.$$

Sečteme-li jednou, odečteme-li po druhé tyto rovnice, obdržíme upravivše

$$\text{(21b)} \qquad t_2^2 = 3m^2 + d^2,$$

$$\text{(22)} \qquad \cos\omega = \frac{2d}{t_2}.$$

Z poslední rovnice jde, že v trojúhelníku ABC vzdálenost rozpolovacího bodu B_2 prostřední strany od paty B_1 výšky, k té straně příslušné, čili průmět B_1B_2 prostřední těžnice BB_2 na stranu AC rovná se dvojnásobnému rozdílu řady arithmetické, již tvoří strany trojúhelníka. Tím jsme znova ukázali, že jest $\triangle$ ABC pravoúhlým, je-li $2d = m$, že jest ostroúhlým, je-li $2d < m$, a že jest tupoúhlým, je-li $2d > m$. Neboť pata B_1 výšky, na prostřední stranu spuštěné, jest v prvním případě jeden z obou krajních bodů této strany, ve druhém případě leží tato pata mezi body A a C a ve třetím vně úsečky AC.

Použijme ještě tohoto výsledku, abychom ustanovili jednoduché výrazy pro cosiny vnitřních úhlů $\triangle$ ABC. Z pravoúhlého trojúhelníka AB_1B, v němž $AB_1 = m + 2d$, plyne totiž

$$\text{(23a)} \qquad \cos\alpha = \frac{m + 2d}{c} = \frac{m + 2d}{2m + d};$$

podobně z pravoúhlého trojúhelníka B_1CB, v němž $B_1C = m - 2d$, vychází

$$\text{(23c)} \qquad \cos\gamma = \frac{m - 2d}{2m - d}.$$

Poněvadž nejdelší strana trojúhelníka ABC

$$c = b\cos\alpha + a\cos\beta,$$

můžeme psáti

$$\cos\beta = \frac{c - b\cos\alpha}{a};$$

dosadíce tu za $\cos\alpha$ a strany a, b, c hodnoty $\frac{m+2d}{c}$, $2m-d$, $2m$, $2m+d$, obdržíme

$$\cos\beta = \frac{2m^2+d^2}{4m^2-d^2}. \tag{23b}$$

V pravoúhlém trojúhelníku AB_1B, kterého jsme právě použili, jest dále

$$v_2^2 = (2m+d)^2 - (m+2d)^2$$

čili

$$v_2^2 = 3(m^2-d^2), \tag{24}$$

kterýžto vzorec ovšem souvisí s druhou rovnicí (19).

Připojme konečně na tomto místě, že na základě rovnic (23) snadno ustanovíme délky stran a_1, b_1, c_1 trojúhelníka orthického, příslušného k trojúhelníku ABC; poněvadž totiž platí pro tyto délky známé vzorce

$$a_1 = a\cos\alpha,\ b_1 = b\cos\beta,\ c_1 = c\cos\gamma,$$

nalezneme

$$a_1 = \frac{(2m-d)(m+2d)}{2m+d},\qquad b_1 = \frac{2m(2m^2+d^2)}{4m^2-d^2},$$

$$c_1 = \frac{(2m+d)(m-2d)}{2m-d}.$$

Když jsme poukázali k některým výsledkům plynoucím ze vzorce (22), vraťme se k těžnicím trojúhelníka ABC. Způsobem podobným tomu, kterým jsme ustanovili těžnici prostřední (vzorec 21b), vypočítáme též obě ostatní těžnice; i dospějeme ke vzorcům

$$t_1^2 = 3m(m+d) + \frac{d^2}{4}, \tag{21a}$$

$$t_3^2 = 3m(m-d) + \frac{d^2}{4}. \tag{21c}$$

Z těchto rovnic vyvodíme některé vztahy, jichž užijeme řešíce úlohu:

Jest vypočítati trojúhelník, jehož strany tvoří řadu arithmetickou, dány-li jsou kterékoli dvě těžnice.

Sečtouce obě strany rovnic (21a) a (21c) a znásobíce součet dvěma, obdržíme

$$\text{(a)} \qquad 2\,(t_1^2 + t_3^2) = 12m^2 + d^2;$$

odečtouce od této rovnice rovnici (21b), nalezneme

$$\text{(25)} \qquad 2\,(t_1^2 + t_3^2) - t_2^2 = 9m^2.$$

Jestliže však od čtyřnásobné rovnice (21b) odečteme rovnici (a), nabudeme

$$\text{(26)} \qquad 4t_2^2 - 2\,(t_1^2 + t_3^2) = 3d^2.$$

Kdybychom znali všechny tři těžnice, vypočítáme z rovnic (25) a (26) veličiny m a d, které nám postačí ku vyhledání všech prvků trojúhelníka ABC. Jest jen ještě třeba opatřiti si rovnici, pomocí které bychom mohli ustanoviti z kterýchkoli dvou těžnic daných těžnici třetí. Tuto rovnici vyšetříme takto:

Odečteme-li rovnice (21a) a (21c), vznikne rovnice

$$t_1^2 - t_3^2 = 6md;$$

zdvojmocníme-li a násobíme-li třemi, obdržíme

$$3t_1^4 - 6t_1^2\,t_3^2 + 3t_3^4 = 108\,m^2\,d^2 = 4\,.\,9m^2\,.\,3d^2.$$

Kladouce tu za $9m^2$ a $3d^2$ výrazy z rovnic (25) a (26), nabudeme

$$3t_1^4 - 6t_1^2\,t_3^2 + 3t_3^4 = 4\,[2\,(t_1^2 + t_3^2) - t_2^2]\,[4t_2^2 - 2\,(t_1^2 + t_3^2)];$$

roznásobíme-li pak na pravé straně a sloučíme-li, dospějeme ku hledané rovnici

$$19t_1^4 + 16t_2^4 + 19t_3^4 - 40t_1^2\,t_2^2 - 40t_2^2\,t_3^2 + 26t_1^2\,t_3^2 = 0.$$

Rovnice ta jest vzhledem ku každé těžnici stupně čtvrtého, lze ji však řešiti na základě rovnice kvadratické; obdržíme tudíž pro neznámou jen dva kořeny, jichž absolutní hodnoty jsou různé.

Poslední část našeho vyšetřování týká se *příček půlících vnitřní úhly* trojúhelníka, jehož strany tvoří řadu arihmetickou.

Příčku u_2 půlící prostřední úhel β určíme takto: Budiž B_3 bod, v němž tato příčka se stýká se stranou prostřední AC; poněvadž v každém trojúhelníku příčka, rozpolující jeden úhel, dělí protější stranu na části úměrné s přilehlými stranami, můžeme psáti úměru

$$AB_3 : B_3C = c : a.$$

Z této úměry vyhledáme snadno AB_3, uvážíme-li, že

$$(AB_3 + B_3C) : (a + c) = AB_3 : c,$$

kde $AB_3 + B_3C = AC = 2m$, $a + c = 4m$, $c = 2m + d$. Dosadivše tyto hodnoty, obdržíme

$$AB_3 = m + \frac{d}{2}.$$

V trojúhelníku AB_3B jest pak dle věty cosinové

$$u_2^2 = (2m + d)^2 + \left(m + \frac{d}{2}\right)^2 - 2\,(2m + d)\left(m + \frac{d}{2}\right)\cos\alpha$$

čili po úpravě

$$u_2^2 = (2m + d)^2 \left(\frac{5}{4} - \cos\alpha\right).$$

Přihlížejíce ku vzorci (23a), nalezneme konečně

$$u_2^2 = \frac{3}{4}\,(4m^2 - d^2). \tag{27b}$$

Můžeme tu snadno zavésti pomocný úhel φ, neboť

$$\begin{aligned} 4m^2 - d^2 &= 4m^2 \left(1 - \frac{d^2}{4m^2}\right) \\ &= 4m^2\,(1 - \cos^2\varphi) = 4m^2 \sin^2\varphi; \end{aligned}$$

tudíž

$$u_2 = m\sqrt{3}\sin\varphi.$$

Tato příčka objevuje se též v trojúhelníku rovnoramenném ACM_1, který jsme výše obdrželi promítnutím rovnostranného trojúhelníka ACM ležícího v rovině S na rovinu R trojúhelníka ABC. V $\triangle$ ACM označili jsme A′ střed strany CM; jeho průmět na R byl bod A'_1 střed ramene CM_1. O délkách přímek promítajících MM_1, $A'A'_1$ platí patrně rovnice $A'A'_1 = \frac{1}{2} MM_1$. Je-li jako výše B_2 bod půlící stranu AC, jest v pravoúhlém trojúhelníku B_2MM_1

$$\cos\psi = \frac{MM_1}{B_2M},$$

ježto úhel M_1B_2M jest odchylka $R - \psi$ obou rovin R a S. Podobně jest v pravoúhlém trojúhelníku $AA'A'_1$

$$\cos \widehat{AA'A'_1} = \frac{A'A'_1}{AA'}$$

aneb též

$$\cos \widehat{AA'A'_1} = \frac{MM_1}{2B_2M},$$

neboť jest jednak, jak řečeno, $A'A'_1 = \frac{1}{2} MM_1$, jednak $AA' = B_2M$, jakožto výšky v trojúhelníku rovnostranném ACM. Srovnáním nabudeme

$$\cos\psi = 2\cos\widehat{AA'A'_1};$$

uvážíme-li, že podmínečná rovnice o úhlech φ a ψ zní

$$\cos\psi = 2\cos\varphi,$$

poznáváme, že

$$\widehat{AA'A'_1} = \varphi.$$

Z pravoúhlého trojúhelníka $AA'A'_1$ plyne pak

$$AA'_1 = AA'\sin\varphi = m\sqrt{3}\sin\varphi,$$

tedy

$$AA'_1 = u_2.$$

Shrneme-li vše, co jsme pověděli o souvislosti mezi prvky průmětu ACM_1 s prvky $\triangle ABC$ v jedno, můžeme říci:

Sestrojíme-li na základně AC trojúhelníka ABC, jehož strany tvoří řadu arithmetickou, trojúhelník rovnoramenný ACM_1 o téže výšce, jest v něm:

1. vzdálenost těžiště od základny rovna poloměru kružnice trojúhelníku ABC vnitř vepsané;

2. výška na základnu spuštěná rovna prostřednímu poloměru kružnice $\triangle$ ABC vně vepsané;

3. úhel, který tvoří těžnice AA'_1 k rameni příslušná se základnou AC, roven polovičnímu úhlu prostřednímu;

4. tato těžnice rovna příčce trojúhelníka ABC, půlící jeho úhel prostřední.

Pozorujme ještě příčky, vycházející z bodu B trojúhelníka ABC, o kterých jsme jednali; jsouť to: výška $BB_1 = v_2$, těžnice $BB_2 = t_2$ a příčka, úhel β půlící, $BB_3 = u_2$. Pro tyto příčky odvodili jsme vzorce:

$$v_2^2 = 3m^2 - 3d^2, \tag{24}$$

$$t_2^2 = 3m^2 + d^2, \tag{21b}$$

$$u_2^2 = 3m^2 - \frac{3}{4} d^2. \tag{27b}$$

Z nich plynou tyto rovnice:

$$t_2^2 - v_2^2 = 4d^2,$$

$$u_2^2 - v_2^2 = \frac{9}{4} d^2;$$

vyloučíme-li z těchto dvou rovnic d^2, obdržíme

$$16u_2^2 = 9t_2^2 + 7v_2^2.$$

První rovnice nám praví, že $B_1B_2 = 2d$, jak jsme již jednou ukázali. Z druhé rovnice jde, že $B_1B_3 = \frac{3}{2} d$; leží tedy bod B_3 ve čtvrtině úsečky B_1B_2 blíže bodu B_2. Z rovnice třetí lze konečně jednu z délek u_2, t_2, v_2 vypočítati, dány-li jsou obě ostatní.

Postupem podobným tomu, kterým jsme vyhledali prostřední příčku u_2, ustanovíme také příčky u_1 a u_3. Výsledky nebudou však tak jednoduché; znějíť

$$u_1^2 = \frac{24m^2}{(4m+d)^2}(2m+d)(m+d), \tag{27a}$$

$$u_3^2 = \frac{24m^2}{(4m-d)^2}(2m-d)(m-d). \tag{27c}$$

Úloha. Řešiti trojúhelník, jehož strany tvoří řadu arithmetickou, dány-li jsou dvě příčky půlící vnitřní úhly, na př. u_1 a u_3.

Vzorce (27a) a (27c) pišme ve tvaru

$$u_1^2 = 24m^2 \frac{2m^2 + 3dm + d^2}{16m^2 + 8dm + d^2},$$
$$u_3^2 = 24m^2 \frac{2m^2 - 3dm + d^2}{16m^2 - 8dm + d^2};$$

dělíce čitatele a jmenovatele každého ze zlomků, na pravé straně těchto rovnic se vyskytujících, m^2 a položíce $\frac{d}{m} = \cos\psi$, obdržíme

$$u_1^2 = 24m^2 \frac{2 + 3\cos\psi + \cos^2\psi}{16 + 8\cos\psi + \cos^2\psi},$$
$$u_3^2 = 24m^2 \frac{2 - 3\cos\psi + \cos^2\psi}{16 - 8\cos\psi + \cos^2\psi}.$$

Dělením těchto dvou rovnic vznikne rovnice

$$\frac{u_1^2}{u_3^2} = \frac{(2 + 3\cos\psi + \cos^2\psi)(16 - 8\cos\psi + \cos^2\psi)}{(2 - 3\cos\psi + \cos^2\psi)(16 + 8\cos\psi + \cos^2\psi)},$$

a z té vychází pro $\cos\psi$ rovnice čtvrtého stupně tato

$$(u_3^2 - u_1^2)\cos^4\psi - 5(u_3^2 + u_1^2)\cos^3\psi - 6(u_3^2 - u_1^2)\cos^2\psi$$
$$+ 32(u_3^2 + u_1^2)\cos\psi + 32(u_3^2 - u_1^2) = 0.$$

Vyhledavše odtud $\cos\psi$, určíme z poslední rovnice pro u_1^2 neb pro u_3^2 veličinu m a pak z rovnice $\cos\psi = \frac{d}{m}$ rozdíl d.

Obdobně budeme počítati, dány-li jsou jiné dvě příčky, na př. u_1 a u_2.