Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Karel Lerl

O Laguerrově paprskové inversi

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 61 (1932), No. 7, R118--R129

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121851

je označuje desetinnou tečkou nahoře. Jen výjimkou nalézáme označení staré. Tak sešitek, vydaný v Praze u Boh. Haase synové r. 1858, píše na str. 12: 136,5 (5/10 = 50/100) a připojuje poznámku: N. B. První číslice za čárkou jest totiž zlomek desetinový. Vil. a Vinc. Matzka („Bequemste Tafeln zur wechselweisen Umrechnung des alten und neuen österreichischen Geldes", Praha, 1858, str. 3) mluví o „Decimalstrich" a „Decimalpumkt" a píše: 2.78'6 = = 2 Neugulden 78.6/10 Neukreuzer. Obšírný a instruktivní výklad o nové měně s návodem, jak počítati s desetinnými zlomky a řešiti praktické příklady z obchodního života, vydal zase Močník. Spisek byl ihned přeložen do češtiny pod názvem „Klíč k novému řádu mincovnímu", Vídeň, 1858. Zde se již důsledně užívá desetinné tečky nahoře. Stejně je tomu i u jiných podobných návodů, na př. J. Balda „Jaké budou ty nové peníze?", Praha, 1858 (německý výtah „Unser neues Geld", Praha, 1858) nebo A. Skřivan „Peníze, míry a váhy nejdůležitějších zemí v porovnání s rakouskými", Praha, 1858. Od této doby se u nás všeobecně oddělovala desetinná místa od celých desetinnou tečkou nahoře i když tu či onde ještě vzpomenuto jiného označení, jako na př. Jos. Soukup „Počty v příkladech atd." Praha, 1869, str. 4 sice praví: „Zlomky desetinové se oddělují od svých celostí tečkou nebo lépe opačnou čárkou desetinovou (Decimalpunkt, Decimalstrich) na př. 555 celých 55 setin zlatého se píše takto 555·55 nebo 555'55 zl.", avšak v dalším užívá výhradně desetinné tečky.

Z výkladů těch vidíme, že koncem XVIII. a počátkem XIX. stol. u nás jako ve většině evropské pevniny se desetinná místa od celých oddělovala desetinnou čárkou dole. Teprve v letech 30. minulého století byla k nám z Rakous zaváděna desetinná tečka nahoře, která až ve druhé polovici XIX. stol. pod vlivem centralisující školy a nové měny vytlačila označení starší.

Pozn. Výbor Jednoty požádal ministerstvo školství a národní osvěty, aby vyhlásilo používání desetinné čárky v učebnicích pro všechny druhy škol.

O Laguerrově paprskové inversi.

Karel Lerl.

Kružnice v rovině může býti vytvořena otočením bodu kolem pevného středu buďto ve smyslu kladném (proti směru pohybu ručiček hodinových) nebo záporném; pak říkáme, že je buďto kladně nebo záporně orientována a napříště po vzoru franc. matematika *Ed. Laguerra*[1]) nazveme ji *cyklem.* Neorientovaná kružnice znázorňuje vlastně dva cykly totožné protivných orientací. Poloměr kladného cyklu je kladný, v opačném případě uvažujeme jej záporným. Přímka je vytvořena translací bodu, směr pohybu udává její orientaci a napříště označíme orientovanou přímku paprskem (podle *E. Studyho*). Neorientovaná přímka představuje dva totožné paprsky protivných orientací. Zvolíme-li na paprsku m bod M, jest tento koncovým bodem polopaprsku a otočením jeho o 90^0 v kladném smyslu kolem bodu M zjistíme kladnou a zápornou část roviny, vytvořených paprskem m. Podle toho zda, libovolný bod leží v kladné či záporné části roviny, jest jeho vzdálenost kladná nebo záporná.

Tečnu cyklu budeme vždy uvažovati téže orientace jako má cykl, a rovina je cyklem dělena ve dvě části, kladnou a zápornou; podle toho, zda je cykl kladně nebo záporně orientován, je vnitřek cyklu kladný nebo záporný. Dotýká-li se paprsek cyklu a je-li orientace protivné než má cykl, mluvíme *o nevlastním dotyku.* Paprsek lze si představiti jako mezný případ cyklu, jehož střed je v nekonečnu a poloměr nekonečně veliký. Stejně body jako cykly o nulovém poloměru a zváti je budeme *nulovými cykly.* Na paprsky jdoucí bodem pak lze hledět jako na tečny k nulovému cyklu. Bod je neorientován.

Z definice orientované tečny plynou ihned věty:

Věta 1. K cyklu lze vésti toliko jedinou tečnu stejnosměrnou (t. j. rovnoběžnou a téže orientace) s daným paprskem.

Věta 2. Dva cykly mají toliko dvě tečny společné.

Konstrukce je snadná. Zmíněné tečny protínají se na centrále obou cyklů a jsou vnější, jsou-li cykly souhlasné orientace, v případě opačném pak vnitřní. Průsečík jejich pak je středem podobnosti obou cyklů. Neorientované kružnice — jak element. planimetrie učí — mají obecně čtyři tečny společné a průsečíky jejich na centrále tvoří se středy harmonickou čtveřinu. *Tři cykly, které nemají středy na jedné přímce, mají středy podobnosti a tyto leží na paprsku.* Důkaz této věty není potřebný, ježto známa je věta, která byla publikována již v klasickém spise *Mongeově*

[1]) *Ed. Laguerre* (1834—1886), franc. matematik, zasvětil svůj život vědecké práci, která mu vynesla jméno předního matematika své doby. Již jako 19tiletému studentu na l'École Polytechnique podařilo mu se udati projektivní definici úhlu. Do 30 let byl důstojníkem, pak věnoval se toliko vědě a práce jeho z matematiky byla všestranná, jak lze přehlédnouti ze souboru jeho prací (Oevres de Laguerre, Paris, 1898); byla to algebra, počet integrální, nauka o funkcích, rozvoje v řady podle polynomů atd., kde řada vět nese jeho jméno. Z geometrie pak zavedení orient. útvaru, paprsková inverse, která vedla ke zbudování nové geometrie, nesoucí jeho jméno.

(„Géométrie descriptive", kde užito bylo k důkazu prostorové konstrukce). Pro tři neorientované kružnice, kde máme celkem šest středů podobnosti (3 vnitřní a 3 vnější), určeny jsou čtyři osy podobnosti, neleží-li žádné z nich ve specielní poloze a věta ta zní: *Tři kružnice v rovině mají šest středů podobnosti, po třech na čtyřech přímkách ležících, a to vždy dva vnitřní s vnějším nebo posléze všechny tři vnější.*

Dva cykly nazýváme dotýkající se, jestliže se dotýkají jako kružnice a v dotyčném bodě jsou souhlasně orientovány. V případě opačném mluvíme o *nevlastním dotyku.*

Vzdálenost dotyčných bodů $\overline{T_1T_2}$ společné tečny dvou cyklů nazveme pro příště *tečnovou vzdáleností cyklů* a udáváme ji buď v absolutní hodnotě, anebo hledíme ke směru orientace tečny. Označme ji τ a délku centrály ϑ; pak lze psáti užitím Pythagorovy věty vztah

$$\tau^2 = \vartheta^2 - (r_1 - r_2)^2,$$

kde r_1, r_2 jsou poloměry cyklů, vzaté kladně či záporně, podle orientace cyklů. Tečnovou vzdálenost lze vždy stanoviti a jest imaginární, pokud $\vartheta^2 - (r_1 - r_2)^2 < 0$. Tedy na př. cykly znázorněné neorientovanou kružnicí mají tečnovou vzdálenost dánu $\tau^2 = -4r^2$.

Otočením paprsku kolem libovolného bodu vznikne úhel, jehož orientace je souhlasná se smyslem otáčení; otočením o úhel 360^0 stotožní se paprsek s původním, takže dva paprsky definují v rovině vždy úhel, až na celistvý násobek 360^0. Zrcadlením na přímce (t. j. sestrojením útvaru osově souměrného) získáme k úhlu protivně orientovaný úhel. Ke dvěma paprskům existuje toliko jediná přímka, na níž zrcadlením rameno jedno přejde ve druhé a naopak. Orientace musí býti souhlasná. Tuto přímku zoveme *symetrálou.* Libovolný bod A ramene a zrcadlí se do bodu B ramene b a platí $\overline{SA} = \overline{SB}$, je-li S průsečík paprsků a, b. Paprsek kolmý k symetrále nazveme *vedlejší symetrálou* daného úhlu. Geometrické místo středů cyklů dotýkajících se dvou paprsků je tedy vedlejší symetrála; tímto určením je zachován dotyk. I plyne dále:

Věta 3. Ke třem paprskům lze sestrojiti toliko jediný dotýkající se cykl.

Budiž uvedena jako aplikace známá zajímavá věta o čtyřstranu:

Věta 4. Dány jsou čtyři paprsky a všem trojicím z nich budiž vepsán cykl; středy zmíněných cyklů leží na jedné kružnici.[2])

²) Ed. Laguerre, Recherches sur la géométrie de direction. Méthodes de transformation anticaustiques. Str. 22.

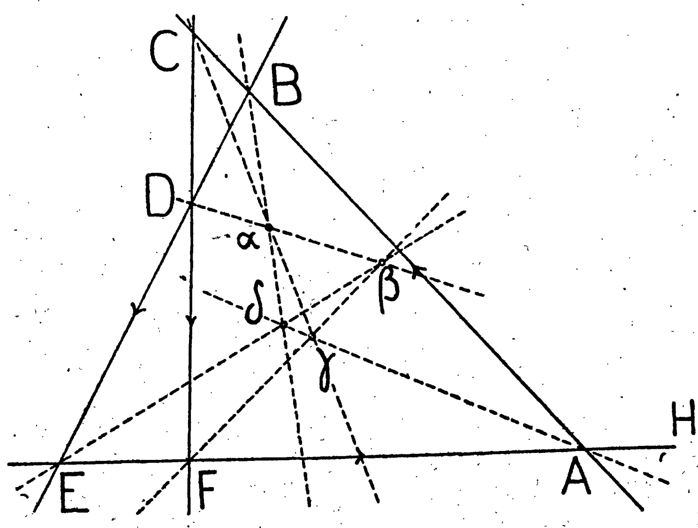
Uvažujme čtyři paprsky AB, BE, EA a CF (obr. 1). Vedlejší symetrály ΔABE se protínají v bodě δ a obdobně trojúhelníků BCD v α, EDF v β a posléze CFA v γ. K důkazu, že tyto čtyři body α, β, γ, δ leží na kružnici, postačí stvrditi, že úhel $\sphericalangle\, \alpha\delta\beta =$ $= \sphericalangle\, \alpha\gamma\beta$. Platí

$$\sphericalangle\, \alpha\delta\beta = B\widehat{E}\delta + E\widehat{B}\delta = \tfrac{1}{2}\, B\widehat{E}A + \tfrac{1}{2}\, E\widehat{B}A = \tfrac{1}{2}\, B\widehat{A}H,$$

stejně

$$\sphericalangle\, \alpha\gamma\beta = F\widehat{C}\gamma + C\widehat{F}\gamma = \tfrac{1}{2}\, F\widehat{C}A + \tfrac{1}{2}\, C\widehat{F}A = \tfrac{1}{2}\, B\widehat{A}H.$$

Oba úhly jsou nad tětivou $\overline{\alpha\beta}$, čímž uvedené tvrzení je dokázáno.



Obr. 1.

2. Jak známo, úhel dvou křivek je měřen úhlem tečen v průsečíku jejich, při čemž křivky opatřujeme též směrem. Máme orientované křivky, a tečna v dotyčném bodě je souhlasné orientace s křivkou. Pro cykly pak lze vysloviti větu:

Věta 5. Úhly, pod kterými se protínají dva cykly, jsou stejně velké, avšak opačně orientované.

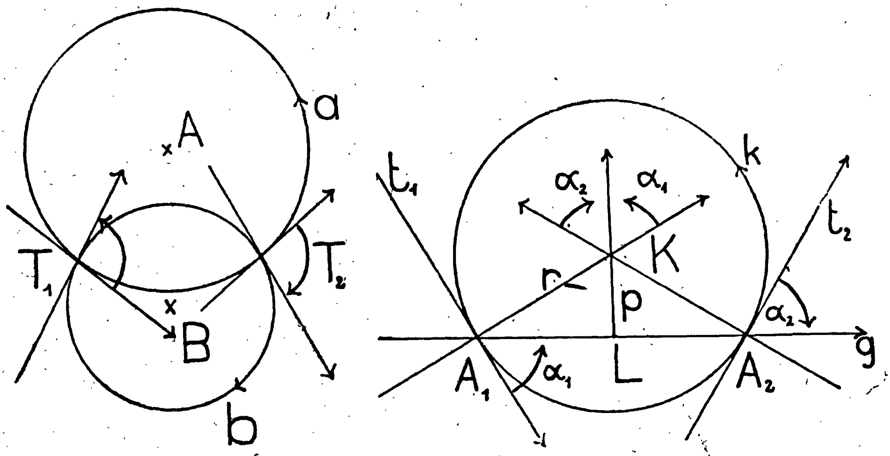
Vzhledem k souměrnosti podle centrály $\overline{AB}$ a výše uvedené větě o zrcadlení úhlu na paprsku je věta zřejmá (obr. 2a). Stejně pro cykl a paprsek z téhož důvodu platí:

Věta 6. Úhly, pod nimiž paprsek protíná cykl, jsou stejně velké a opačné orientace. Z obr. 2b pak vysvítá vztah

$$\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2 = \frac{p}{r},$$

kde $p = \overline{LK}$ a r je poloměr cyklu. Neprotíná-li paprsek cykl reálně, t. j. je-li $|p| > |r|$, a jsou-li úhly α definovány touž rovnicí, jest $\left|\frac{p}{r}\right| > 1$ a úhel α je ryze imaginární. Neboť položíme-li za $\alpha = \varphi + i\psi$, kde φ a ψ jsou reálné, jest

$$\cos\alpha = \cos\varphi\cos i\psi - \sin\varphi\sin i\psi,$$



Obr. 2.

ježto $\cos i\psi = \operatorname{Cosh}\psi$, $\sin i\psi = i \operatorname{Sinh}\psi$ ($\operatorname{Cosh}\psi$, $\operatorname{Sinh}\psi$ jsou funkce hyperbolické, $i = \sqrt{-1}$), jest $\cos\alpha = \cos\varphi \operatorname{Cos} h\psi - i\sin\varphi \operatorname{Sin} h\psi$ reálným buďto pro $\operatorname{Sinh}\psi = 0$, $\psi = 0$ nebo $\sin\varphi = 0$, $\varphi = n\pi$ (n, celé číslo). V prvním případě $\cos\alpha = \cos\varphi$, $|\cos\alpha| \leqq 1$, v druhém případě $\cos\alpha = \pm \operatorname{Cos} h\psi$, $|\cos\alpha| \geqq 1$. Tedy pro $\alpha = n\pi + i\psi$ jest $\cos\alpha$ reálné a co do absolutní hodnoty > 1.

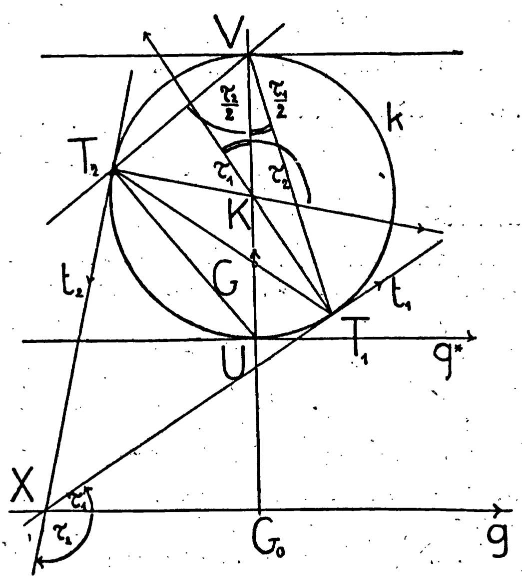
Mocnost cyklu na paprsku. Pro cykl a paprsek existuje duální věta k potenci kružnice v bodě. Sestrojme orientované tečny cyklu k, jdoucí bodem X na paprsku g (obr. 3). Pohybuje-li se bod X po paprsku g, otáčí se spojnice $\overline{T_1T_2}$ kolem bodu G, jenž je pólem paprsku g vzhledem k cyklu k. Kolmice ze středu K na paprsek g protne cykl v bodech U, V a pata kolmice budiž G_0. Na této kolmici leží i pól G. Označme úhly: $\sphericalangle gXt_1 = \tau_1$, $\sphericalangle gXt_2 = \tau_2$ a sestrojme stejnosměrnou tečnu s g v bodě $U : g^*$. Orientované normály paprsků g^*, t_1, t_2 vytnou úhly τ_1, τ_2 jako středové a tedy lze snadno uznat, že úhly

$$\sphericalangle\, UVT_1 = \frac{\tau_1}{2}, \quad \sphericalangle\, UVT_2 = \frac{\tau_2}{2}.$$

Lze pak dokázati platnost vztahu

$$\operatorname{tg}\frac{\tau_1}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\tau_2}{2} = \text{konst.},$$

kde konstanta má význam geometrický. Podle toho, zda G leží



Obr. 3.

vně nebo vnitř průměru $\overline{UV}$, mají $\frac{\tau_1}{2}$, $\frac{\tau_2}{2}$, tedy i $\operatorname{tg}\frac{\tau_1}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\tau_2}{2}$ souhlasná nebo protivná znamení; znaménko konstanty pak souhlasí s dělicím poměrem (UVG). Pohybuje-li se bod X po paprsku g a stane-li se úběžným, pak $T_1 \equiv U$, $T_2 \equiv V$, $\lim\,(\overline{T_1U} : \overline{T_2V}) = (UVG)$ a $\lim\,(\overline{UT_2} : \overline{VT_1}) = 1$. Jelikož

$$\operatorname{tg}\frac{\tau_1}{2} = \frac{\overline{T_1U}}{\overline{VT_1}}, \quad \operatorname{tg}\frac{\tau_2}{2} = \frac{\overline{T_2U}}{\overline{VT_2}},$$

jest hodnota konstanty

$$\frac{\overline{T_1U}}{\overline{VT_1}} \cdot \frac{\overline{T_2U}}{\overline{VT_2}} = \frac{\overline{T_1U}}{\overline{T_2V}} \cdot \frac{\overline{UT_2}}{\overline{VT_1}}.$$

a pro $\overline{T_1U} = 0$ má hodnotu (UVG). Tedy $\operatorname{tg}\frac{\tau}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\tau_2}{2} = \frac{\overline{UG}}{\overline{VG}}$. Jelikož $(UVGG_0) = -1$ a $G_0K = p$, lze psáti dále

$$\frac{\overline{UG}}{\overline{VG}} = -\frac{\overline{UG_0}}{\overline{VG_0}} = -\frac{\overline{G_0U}}{\overline{G_0V}} = -\frac{p-r}{p+r} = \frac{r-p}{r+p},$$

čímž

$$\operatorname{tg}\frac{\tau_1}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\tau_2}{2} = \frac{r-p}{r+p}.$$

Označíme-li opětně φ úhel paprsku a cyklu, jest $\cos\varphi = \frac{p}{r}$ a poslední rovnici lze psáti ve tvaru

$$\operatorname{tg}\frac{\tau_1}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\tau_2}{2} = \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2},$$

což lze vyjádřiti větou:

Věta 7. Svírají-li tečny, vedené z libovolného bodu paprsku g k cyklu k, úhly τ_1, τ_2, pak pro všechny body paprsku g platí

$$\operatorname{tg}\frac{\tau_1}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\tau_2}{2} = \text{konst.},$$

což je mocnost cyklu k na paprsku g. Značí-li posléze φ úhel cyklu a paprsku (ať reálný nebo imaginární), jest ona konstanta rovna $\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}$.

V důsledku definice mocnosti cyklu na paprsku jsou další dvě věty zcela zřejmé:

Věta 8. Dva cykly mají na každém paprsku jdoucím bodem podobnosti touž mocnost a kromě těchto neexistují v rovině žádné paprsky této vlastnosti.

Věta 9. Pro tři cykly, které nemají bod podobnosti společný, jest osa podobnosti jediným paprskem v rovině, majícím touž mocnost k oněm cyklům.

Věta 10. Všechny cykly, mající na paprsku g touž mocnost, tvoří kongruenci cyklickou (t. j. ∞^2 cyklů).

Věta 11. K danému cyklu k paprsky, na nichž tento má touž mocnost, tvoří řadu (t. j. ∞^1 paprsků), které obalují cykl k soustředný s daným cyklem.

Úloha: Sestrojiti v rovině paprsek g, na němž má cykl k_1 mocnost $\mathfrak{M}_1$ a cykl k_2 mocnost $\mathfrak{M}_2$.

Jsou-li udané mocnosti $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, protíná paprsek g cykl k_1 resp. k_2 v úhlech φ_1, φ_2. Sestrojme v libovolných bodech T_1, T_2 tečny t_1, t_2 a sestrojme sečny, svírající úhly φ_1, φ_2; cykly l_1, l_2 téže orientace, dotýkající se těchto, stanoví nám společnými orientovanými tečnami žádané paprsky.

Příklad: Dány jsou paprsky g_1, g_2; stanoviti cykly, mající na paprsku g_1 mocnost $\mathfrak{M}_1$ a na paprsku g_2 mocnost $\mathfrak{M}_2$.

Středy cyklů leží na paprsku jdoucím průsečíkem obou paprsků a majícím jistý dělicí poměr λ vzhledem k daným paprskům g_1, g_2. Dělicí poměr je jistou funkcí obou mocností $\lambda = \lambda(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2)$. Cykly tvoří řadu cyklickou. Obálka pak této řady jsou paprsky jdoucí průsečíkem paprsků g_1, g_2.

Příklad. K danému cyklu k sestrojiti daným bodem G paprsek g tak, aby na tomto byla předepsaná mocnost $\mathfrak{M}$.

K danému cyklu k paprsky, na nichž tento má touž mocnost, tvoří řadu, obalující soustředný cykl l s daným a orientovaná tečna z G ku l je řešením.

3. Budiž dán pevný paprsek g a cykl k. Ke každému paprsku a_1 sestrojíme paprsek inversní čili sdružený následujícím způsobem. S paprskem a_1 veďme stejnosměrnou tečnu b_1 k cyklu k a průsečíkem této s paprskem g druhou tečnu b_2. Posléze sestrojme stejnosměrku a_2 s tečnou b_2 bodem A, průsečíkem a_1 s g. Tato transformace paprsků zove se *Laguerrovou inversí.*[3]) (Pro paprsek $c_1 \equiv a_1$ protivně však orientovaný, získáme $c_2 \equiv\!|\!\equiv a_2$). Pro úhly sdružených paprsků platí vztah $\operatorname{tg}\frac{\tau_1}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\tau_2}{2} = \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}$ i nazveme konstantu $\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}$ *mocností inverse.* Paprsek g pak osou inverse. Podle toho zda úhel φ, úhel cyklu a osy inverse hoví vztahu $|\cos\varphi| \lesseqgtr 1$, nazýváme inversi resp. hyperbolickou, parabolickou a eliptickou. Transformace složená z několika inversí sluje *transformací Laguerrovou.* Z konstrukce pak plynou jednoduché věty:

Věta 12. Sdružené paprsky protínají se na ose inverse.

Věta 13. Osnově paprsků stejnosměrných odpovídá osnova paprsků stejnosměrných a sdružené z nich protínají se na ose inverse.

Věta 14. Inverse jest určena osou a dvěma sdruženými paprsky.

Věta 15. Inverse jest určena osou a cyklem.

Specielní případy nastanou na př. při parabolické inversi, když paprsek ke každému paprsku sdružený je totožný s osou inverse, nebo při hyperbolické inversi, kde lze vysloviti větu:

Věta 16. Paprsky stejnosměrné s tečnami v průsečících osy s cyklem mají za sdružené paprsky paprsky totožné, čili jinými

---

[3]) Uvedená inverse se neshoduje v podstatě s onou, kterouž udal Laguerre v práci „Sur la géométrie de direction“.

slovy: Protíná-li cykl osu inverse v reálných bodech, pak tečny v těchto bodech jsou samodružnými vzhledem k inversi.

Věta 17. V hyperbolické inversi existují dvě osnovy paprsků samodružných.

Věta 18. Obaluje-li paprsek a_1 orientovanou křivku k_1, obaluje sdružený paprsek a_2 křivku k_2 a tato je s křivkou k_1 sdružena.

Z povahy inverse vysvítají dále věty:

Věta 19. Sdružené křivky protínají se na ose inverse a tečny sestrojené v těchto bodech jsou sdruženy.

Věta 20. Dva páry sdružených paprsků se dotýkají cyklu.

Je-li dána inverse osou a sdruženými paprsky a_1, a_2, pak cykl k, dotýkající se paprsků a_1, a_2 a libovolného paprsku b_1, je stanoven. Vzhledem k větě 18. musí se i paprsek b_2 dotýkati cyklu k, čímž je věta 20. dokázána, a ježto spojnice dotyčných bodů sdružených paprsků jdou pólem G osy g vzhledem k cyklu k, plyne nám i snadná konstrukce sdruženého paprsku. Pohybuje-li se paprsek a_1 tak, že vytvoří zmíněný cykl jako obálku, nastane totéž i s paprskem a_2, kdy tento cykl odpovídá inversí sám sobě.

Věta 21. Existují v rovině cykly, jež jsou samodružné vzhledem k inversi.

Věta 22. Útvar inversní k cyklu je cykl a osa inverse jest jejich chordálou. Budiž dána inverse osou g a cyklem k. Máme-li k libovolnému cyklu m_1 sestrojiti cykl sdružený, stačí vésti tři tečny orientované, s nimiž pak stejnosměrné k cyklu k a paprsky k těmto sdružené. Sdružené paprsky k tečnám cyklu m_1 stanoví úplně cykl m_2. Lze tedy říci, že sdružený cykl najdeme pomocí tří párů sdružených tečen. Konstrukci lze zjednodušiti, ježto středy sdružených cyklů leží na kolmici k ose inverse. V případě, že cykl protíná osu, postačí užíti tečny v průsečíku $M_{1,2}$ cyklu s osou, neboť pak střed sdruženého cyklu leží na kolmici k ose inverse a kolmici k tečně v bodě $M_{1,2}$ sdružené. V druhém případě, kdy neprotíná osu, užijeme dvou pomocných tečen, neboť pak střed cyklu sdruženého leží jednak na kolmici k ose inverse, jednak na vedlejší symetrále paprsků sdružených.

Věta 23. Všechny cykly, které se dotýkají dvou sdružených cyklů, tvoří t. zv. inversní kongruenci.

Z předchozího je patrno, že určení inverse může býti dáno způsobem nejrozmanitějším:

1. osou inverse a libovolným cyklem,
2. osou inverse a párem sdružených paprsků,
3. třemi cykly,
4. dvěma sdruženými cykly,
5. cyklem a pólem osy vzhledem k cyklu,
6. pólem a osou, atd.

4. Sdružený cykl lze určiti i početně. Jelikož osa inverse je chordálou sdružených cyklů, lze psáti, značí-li r_1, r_2 poloměry a p_1, p_2 vzdálenosti středů od osy inverse (délky jsou vzaty orientované), vztah

$$p_1^2 - p_2^2 = r_1^2 - r_2^2,$$

jejž lze rozložiti

$$p_1 - p_2 = \alpha (r_1 - r_2),$$

$$p_1 + p_2 = \frac{1}{\alpha} (r_1 + r_2),$$

kde α je konstanta, definující inversi, a zoveme ji *modulem inverse.* Snadným počtem získáme

$$p_2 = \frac{(1 + \alpha^2)\, p_1 - 2\alpha r_1}{1 - \alpha^2},$$

$$r_2 = \frac{2\alpha p_1 - (1 + \alpha^2)\, r_1}{1 - \alpha^2}, \qquad (*)$$

tím je cykl k' úplně určen, je-li dán cykl k. Cykl k' redukuje se na bod, je-li $r_2 = 0$, t. j.

$$r_1 \alpha^2 - 2 p_1 \alpha + r_1 = 0,$$

z čehož

$$\alpha_{1,2} = \frac{p_1 \pm \sqrt{p_1^2 - r_1^2}}{r_1}.$$

Lze tedy, je-li dán cykl k a osa inverse, voliti modul inverse α tak, že sdružený cykl k' je nulovým cyklem. Je-li inverse určena osou a modulem α, existuje nekonečně mnoho cyklů, majících za útvary sdružené nulové cykly a definovány jsou vztahem

$$\frac{r}{p} = \frac{2\alpha}{1 + \alpha^2}.$$

Charakteristická jejich vlastnost je, že poloměr jest úměrný vzdálenosti středu cyklu od osy inverse.

5. *Laguerre* ve svých úvahách vypočítával toliko čtverec tečnové vzdálenosti, tudíž smysl její neuvažoval. Že tečnová vzdálenost je vzhledem k inversi invariantní, zjistil následovně: Buďtež dány dva páry sdružených cyklů o poloměrech r_1, r_2, r'_1, r'_2, vzdálenosti středů od osy inverse p_1, p_2, p'_1, p'_2, tečnové vzdálenosti τ, τ' a f budiž průmět centrály na osu. Snadno lze nahlédnouti platnost vztahů

$$\tau^2 = f^2 + (p_1 - p_2)^2 - (r_1 - r_2)^2,$$
$$\tau'^2 = f^2 + (p'_1 - p'_2)^2 - (r'_1 - r'_2)^2,$$

kde veličiny jsou brány orientované. Užijeme-li dříve odvozených vzorců (*), získáme

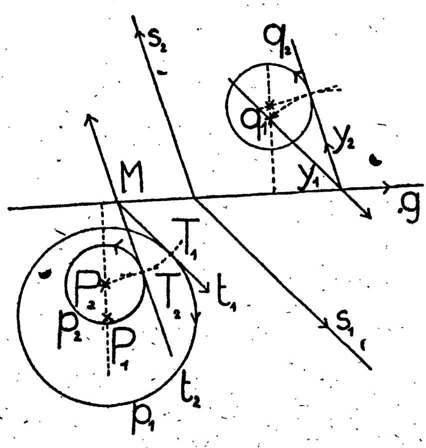
$$p'_1 - p'_2 = \frac{(p_1 - p_2)(1 + \alpha^2) - 2\alpha(r_1 - r_2)}{1 - \alpha^2},$$

$$r'_1 - r'_2 = \frac{2\alpha(p_1 - p_2) - (1 + \alpha^2)(r_1 - r_2)}{1 - \alpha^2},$$

dosazením do rovnice pro τ'^2 pak plyne

$$\tau'^2 = f^2 + (p_1 - p_2)^2 - (r_1 - r_2)^2 = \tau^2,$$

čímž tvrzení dokázáno.



Obr. 4.

Že tečnovou vzdálenost je výhodné uvažovati orientovanou, vysvitne v následujícím i na jednoduchých konstrukcích. Budiž dána inverse sdruženými paprsky s_1, s_2 a osou g. Sestrojme dva libovolné cykly p, q, jež se dotýkají paprsků s_1, s_2. Inversí tyto cykly sobě přísluší. Tečnové vzdálenosti nechť jsou $\overline{P_1Q_1}$ a $\overline{Q_2P_2}$. Jest $\overline{P_1Q_1} = -\overline{P_2Q_2}$, tedy řada bodů na sdružených cyklech jsou nepřímo kongruentní.

Věta 24. Inverse Laguerrova je taková transformace paprsků, při níž na sdružených paprscích bodové řady jsou nepřímo kongruentní. Tudíž přejdou-li dva cykly p_1, q_1 inversí v cykly p_2, q_2, pak orientovaná tečna s_1 přejde v tečnu s_2, na níž tečnová vzdálenost liší se toliko smyslem. Analogon vyskytne se i u společné tečny dvou orientovaných křivek, tudíž lze říci:

Věta 25. Inverse Laguerrova mění smysl tečnové vzdálenosti.

Právě zmíněná věta dovoluje rychlou konstrukci sdruženého cyklu. Budiž dána inverse osou g a sdruženými paprsky s_1, s_2. Abychom k cyklu p_1 sestrojili cykl sdružený, položme k p_1 stejnosměrnou tečnu s s_1 a jí sdruženou x_2, tečnu to k cyklu p_2. Tečnová vzdálenost při inversi jest invariantní až na znaménko, tudíž $\overline{MT_1} = -\overline{MT_2}$. Stejně je v obr. 4 sestrojen cykl q_2, sdružený s nulovým cyklem q_1. Konstrukce je velmi zjednodušena v případě, kdy inverse je dána osou a paprskem samodružným $s_1 \equiv s_2$.

6. Výše bylo vypočteno, že dvěma způsoby možno zvoliti modul, aby cykl přešel v nulový. Konstrukce, je-li dána osa a cykl (ji neprotínající), jest jednoduchá. Střed cyklu a nulový cykl leží na kolmici k ose, zvolíme-li na ose libovolný bod G a sestrojíme-li kružnici délkou tečny ze zmíněného bodu k cyklu vedené, protne tato kolmici v bodech K_1, K_2, jež jsou žádanými nulovými cykly. Máme-li dán další cykl l, mající na ose g touž mocnost, získáme body L_1, L_2. Body K, K_1, K_2 a L, L_1, L_2 leží na rovnoběžkách kolmých ku g. Z podobnosti pak plyne, že KL, K_1L_1, K_2L_2 protínají se v jediném bodě, tudíž středy cyklů téže kongruence a příslušné nulové cykly jsou perspektivně afinní.

*Věta *26. Každá eliptická kongruence dá se dvěma různými inversemi převésti v kongruenci nulových cyklů.*

Již *Laguerre* ukázal, že inversí, která převádí cykly v nulové, dá se řešiti řada úloh jinak nesnadných a jedna z takových jest *Apolloniova úloha:* Sestrojiti cykly dotýkající se daných cyklů p, q, r. Sestrojme k cyklům p, q, r osu podobnosti g a zvolme ji za osu inverse za předpokladu, že cykly p, q, r přísluší eliptické kongruenci. Zvolme inversi takovou, aby cykly p, q, r přešly v nulové cykly p', q', r'. Hledaný cykl k přejde v kružnici k', která je trojúhelníku p', q', r' opsána. Kružnice k' představuje dva cykly protivné orientace, tudíž máme dvě řešení k_1, k_2. Konstrukce je snadná. — Protíná-li osa podobnosti cykly v reálných bodech, veďme bodem podobnosti dvou cyklů orientovanou nesečnu, již zvolíme za osu inverse takové, že tyto dva cykly přejdou v body, třetí cykl opět v cykl. Tím se úloha redukuje na jednodušší úlohu, totiž sestrojení cyklů jdoucích dvěma body a dotýkajících se daného cyklu. — Uvažujeme-li místo cyklů neorientované kružnice, jest úloha Apolloniova obecně osmiznačná.