Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Josef Holubář

Souvislost rovnic goniometrických a soustav rovnic algebraických

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 70 (1941), No. Suppl., D117--D123

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121835

Souvislost rovnic goniometrických a soustav rovnic algebraických.

Josef Holubář, Praha.

Ačkoliv řešení rovnic goniometrických většinou žáky velmi zajímá, přece se při nich setkáváme s některými obtížemi. Důvod je zajisté v tom, že v prvé části řešení se prostupuje algebraická a goniometrická úprava rovnic, takže žák nemůže dobře odhadnouti nejvhodnější cestu, aby na konec vypočetl příslušnou goniometrickou funkci a pak určil v druhé části řešení z rovnic $f(\varphi) = k$ nebo obecněji z rovnice $f(a\varphi + x) = k$ neznámý úhel φ.*)

Při určení úhlu φ v druhé části řešení poslouží nejlépe náčrtek jednotkové kružnice a na ní sestrojené body, odpovídající hodnotě k funkce $f(\varphi)$, jak na př. doporučuje J. Simerský na počátku článku „Graf při řešení goniometrických rovnic“ v ČMF, roč. 66 (1936—37), str. D 176.

Hlavní nesnáz však jest, jak uvádí též K. Lerl v článku „K metodice goniometrických rovnic“ v ČMF, roč. 67 (1937—38), str. D 18, právě v úpravě goniometrických rovnic po stránce algebraické a goniometrické. V Lerlově článku jest také podáno značně podrobné rozdělení rovnic goniometrických o jedné neznámé na 13 skupin, jak by se postupně metodicky měly probírati. Toto rozdělení v dosti četné skupiny jest ovšem nutné pro náležité nacvičení, ale provádění v praksi vyžaduje hodně času, jistě více, než je myšleno osnovami i učebnicí, ať již Vojtěchovou nebo Vinšovou.

Lze však probrati řešení různých hlavních typů našich rovnic značně kratčeji, omezíme-li goniometrickou úpravu jen na nejmenší míru, a to na takové typy, kde jest tato úprava žádoucí, výhodná a obyčejně i snadná.

1. Řešení většiny rovnic goniometrických o 1 neznámé můžeme totiž nahraditi řešením soustavy dvou rovnic algebraických o 2 neznámých, které právě předtím byly v třídě VI. probrány. A přechod od rovnic goniometrických k těmto soustavám je docela organický, neboť se zakládá na obecné definici funkcí goniometrických, z níž vycházíme ve školních výkladech při použití jednotkové kružnice.

*) Pro neznámý úhel volíme písmeno φ, ježto jsou špatné zkušenosti s psaním písmene ξ; písmeno x budeme v dalších výkladech potřebovati k jinému účelu.

Z jednotkové kružnice lze totiž dosaditi do rovnic goniometrických hned:

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi &= x, & \sin\varphi &= y, \\ \operatorname{tg}\varphi &= \frac{y}{x}, & \operatorname{cotg}\varphi &= \frac{x}{y}, \\ \sec\varphi &= \frac{1}{x}, & \operatorname{cosec}\varphi &= \frac{1}{y}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

při čemž pro neznámé x, y bude vždy platiti ještě souměrná rovnice

$$x^2 + y^2 = 1, \tag{2}$$

které můžeme říkati základní, a jež vyplývá ze vztahu $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$. Řešení i takových rovnic goniometrických, které je jinak dosti obtížné, utváří se touto substitucí velmi jednoduše, a uvidíme, jak bude průzračné zvláště pro obvyklé typy. K výpočtu původní neznámé — úhlu φ — nebude pak ani potřebí vypočísti obě neznámé x, y; postačí znáti jen jednu z nich, nebo nejvýše ještě znaménko příslušné hodnoty druhé, anebo někdy určiti jen souměrný výraz xy, který poskytne svou hodnotou již úhel 2φ; platí totiž

$$2xy = 2\cos\varphi\sin\varphi = \sin 2\varphi. \tag{3}$$

2. Pro metodický postup školního nacvičení postačí přidržeti se celkem učebnice Vojtěchovy*) a řešiti ve škole úlohy odst. 25 a 26.

A. Úloha 1a:

$$\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{cotg}\varphi = 4.$$

Dosazením z (1) dostaneme rovnici algebraickou

$$\frac{y}{x} + \frac{x}{y} = 4,$$

čili

$$x^2 + y^2 = 4xy,$$

což vzhledem na rovnici základní (2) dává

$$4xy = 1;$$

a tedy podle (3) hned

$$\sin 2\varphi = \tfrac{1}{2}.$$

Úloha 1b: Podobně z rovnice $2\sin^2\varphi + 3\cos\varphi = 3$ dostaneme spolu se základní rovnicí soustavu:

$$\begin{aligned} 2y^2 + 3x &= 3 \\ x^2 + y^2 &= 1, \end{aligned}$$

*) J. Vojtěch: Geometrie pro VI. třídu reálek, 5. vyd., JČMF.

z níž po vyloučení y^2 obdržíme

$$x_{1,2} = 1; \tfrac{1}{2}, \text{ tedy } \cos\varphi = 1; \tfrac{1}{2}.$$

Úloha 2: Řešiti

$$a\cos\varphi + b\sin\varphi = c.$$

Zde rozřešíme soustavu (rovnici lineární a kvadratickou, základní):

$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ x^2 + y^2 &= 1. \end{aligned}$$

Příklad: Rovnice $8\cos\varphi + 6\sin\varphi = 5$ poskytuje rovnici

$$8x + 6y = 5,$$

z které dosadíme za y do rovnice základní a získáme řešení:

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{27}}{10} = \cos\varphi \doteq 0.9196 \text{ a } -0{,}1196.$$

Úhly φ v intervalu $0°$ až $360°$ vyhovující dané rovnici jsou ovšem jen dva (nikoli čtyři), protože příslušné $y_1 < 0$ a $y_2 > 0$, tedy

$$\varphi_1 \doteq 336° 52' \text{ a } \varphi_2 \doteq 96° 52'.$$

Poznámka: Při předchozí úloze můžeme připojiti i řešení grafické, které poskytnou průsečíky přímky (obraz funkce lineární, známý z tř. IV.) s jednotkovou kružnicí. Obdobný přibližný náčrt poslouží také k rozhodnutí o vyhovujících hodnotách φ, které vycházejí z kořenů $x_{1,2}$, nechceme-li určovati znaménka $y_{1,2}$ početně. Vůbec našim rovnicím budeme moci později při opakování v třídě VII. na reálce (VIII. na gymnasiích) po probrání analytické geometrie dáti význam geometrický a ukázati grafické řešení různých rovnic goniometrických současně s poznámkami o geometrickém významu řešení soustav algebraických rovnic.

Úloha 3: Rovnice goniometrická s členy stupně druhého:

$$2\cos^2\varphi - \sin\varphi\cos\varphi - 2\sin^2\varphi + 1 = 0$$

poskytne rovnici

$$2x^2 - xy - 2y^2 + 1 = 0,$$

která spolu s rovnicí základní (2) dá homogenní rovnici

$$3x^2 - xy - y^2 = 0.$$

Z ní pak vypočteme na př. $\frac{x}{y}$, t. j. cotg φ.

B. Použitím vztahu (3) a vztahu

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = x^2 - y^2 \tag{4}$$

snadno řešíme algebraicky i rovnice goniometrické, které obsahují funkce argumentu dvojnásobného.

Úloha 1. odst. 26 citované učebnice:

$$\sin\varphi + \cos 2\varphi = 1$$

povede na řešení soustavy

$$y + x^2 - y^2 = 1$$
$$x^2 + y^2 = 1,$$

z níž vyplývá rovnice

$$2y^2 - y = 0.$$

Tedy

$$\sin\varphi = 0;\ \tfrac{1}{2}.$$

Vztahy

$$\sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi,$$
$$\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$$

poskytují dvojčleny pro y, resp. x stupně třetího:

$$\sin 3\varphi = 3y - 4y^3,$$
$$\cos 3\varphi = 4x^3 - 3x,$$

takže příslušné rovnice algebraické řešíme jen ve zvláštních případech jednoduchých.

Na př.: Úloha 2:

$$\sin\varphi + \sin 2\varphi = \sin 3\varphi$$

dává rovnici

$$2y^3 - y + xy = 0.$$

Tedy platí

$$\text{a) } y_1 = 0,$$

a rovnice

$$\text{b) } 2y^2 + x = 1.$$

Ta s rovnicí základní poskytuje

$$x_{2,3} = 1;\ -\tfrac{1}{2}.$$

Proto z

$$\text{a) } \sin\varphi_1 = 0,$$
$$\text{b) } \cos\varphi_2 = 1;\ \cos\varphi_3 = -\tfrac{1}{2}.$$

Do této skupiny rovnic patří i goniometrické rovnice, které obsahují též funkce úhlu polovičního $\left(\frac{\varphi}{2}\right)$. Bylo by možno použitím vztahů

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}},\quad \cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}},\quad \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}}$$

a substitucí (1) zavésti důsledně:

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1-x}{2}},\quad \cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1+x}{2}},\quad \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}};$$

dostali bychom však rovnice iracionální. Jest proto lépe zvoliti úhel $\frac{\varphi}{2}$ jako východisko a zavésti obdobnou substituci jako v (1), avšak pro úhel $\frac{\varphi}{2}$:

$$\cos\frac{\varphi}{2} = x,\quad \sin\frac{\varphi}{2} = y \text{ atd.} \tag{5}$$

Tak řešíme úlohu 3:

$$\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2} = 1 + \cos\varphi.$$

Podle rovnic (5) dostaneme rovnici algebraickou

$$\frac{x}{y} = 1 + x^2 - y^2,$$

neboli

$$x - y = y\,(x^2 - y^2),$$

která se rozštěpí ve dvě

a) $x - y = 0$; b) $1 = y\,(x + y)$;

tyto rovnice pak řešíme s rovnicí základní. Vyjde

a) $x = y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$; b) nová hodnota jen $x = 0$.

Tedy

a) $\cos\frac{\varphi}{2} = \sin\frac{\varphi}{2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$; b) $\sin\frac{\varphi}{2} = 0$.

C. Pro řešení ryze goniometrické zůstávají jen jednoduché rovnice druhů:

I. $$\sin m\varphi = \sin n\varphi,$$

nebo

$$\operatorname{tg}(m\varphi + \alpha) = \operatorname{cotg}(n\varphi + \beta) \text{ a pod.},$$

z nichž přecházíme hned k rovnicím, které platí mezi argumenty; pak

II. rovnice typu:

$$a\cos(\varphi + \alpha) + b\sin(\varphi + \beta) = c,$$

v nichž používáme při předchozí úpravě goniometrické součtových pouček a konečně

III. rovnice, které obsahují pouhé součty nebo rozdíly stejných funkcí rozličných argumentů, jež se vyjadřují součiny. Na př. rovnice

$$\sin 5\varphi - \sin \varphi = \cos \varphi - \cos 5\varphi.$$

D. Při některých složitějších rovnicích poskytne naše metoda řešení jednoduché nebo aspoň velmi přehledné. Na př. v těchto případech:

Úloha 1:

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi + \mathrm{tg}^2 \varphi + \mathrm{cotg}^2 \varphi + \sec^2 \varphi + \mathrm{cosec}^2 \varphi = k.$$

Vztahy (1) dávají souměrnou rovnici

$$x^2 + y^2 + \frac{x^4 + y^4}{x^2y^2} + \frac{x^2 + y^2}{x^2y^2} = k,$$

tu upravíme použitím rovnice základní (2) ve tvaru

$$(x^2 + y^2)^2 = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 = 1,$$

takže daná rovnice přejde pak v jednoduchou rovnici

$$\frac{2}{x^2y^2} = k + 1.$$

Tím určíme hned $\sin 2\varphi$.

Úloha 2: Rovnice

$$\sin \varphi + \cos \varphi + \mathrm{tg}\, \varphi + \mathrm{cotg}\, \varphi + \sec \varphi + \mathrm{cosec}\, \varphi = k$$

poskytne

$$x + y + \frac{1}{xy} + \frac{x + y}{xy} = k,$$

čili

$$(x + y)\left(1 + \frac{1}{xy}\right) = k - \frac{1}{xy}.$$

Ježto

$$(x + y)^2 = 1 + 2xy,$$

dostaneme po dosazení této hodnoty do předcházející rovnice a povýšením na druhou rovnici, která obsahuje jen neznámý výraz xy:

$$2xy + \frac{2}{xy}(2 + k) + 5 - k^2 = 0,$$

t. j. rovnici kvadratickou pro xy, z níž opět získáme $\sin 2\varphi$. Poněvadž jsme původní rovnici povýšili, nutno vypočtené výsledky vyzkoušeti dosazením do původní rovnice.

Úloha 3: Z rovnice

$$\cos^6 \varphi + \sin^6 \varphi = k$$

dostaneme

$$x^6 + y^6 = k.$$

Po úpravě jako v úloze 1 obdržíme

$$3x^2y^2 = 1 - k;$$

pak opět vypočteme xy a tím $\sin 2\varphi$.

Tyto tři úlohy jsou též dobrými příklady pro řešení soustav souměrných rovnic algebraických o dvou neznámých.

Uvedený postup jistě žákům usnadní řešiti rovnice goniometrické, a jak už bylo vzpomenuto, učiní přístupnou souvislost těchto rovnic s rovnicemi algebraickými, takže řešení provedou žáci značně samostatně v souhlase se zásadou pracovního vyučování, a ještě si při tom zopakují řešení soustav dvou rovnic o dvou neznámých.*)

Detailní metodika matematiky a její zpracování.

Václav Skalický, RG Pardubice.

Mezi ne dosti šťastně rozřešené středoškolské otázky patří u nás jistě pedagogicko-didaktické školení středoškolských profesorů. Zatím co z našich vysokých škol vycházeli po léta učitelé s dobrou a výbornou vědeckou přípravou, po stránce pedagogicko-didaktické musil a musí se u nás formovati z větší části každý sám, zvláště pokud se týče odborné metodiky svých předmětů. Uvažujme, co z toho nutně plyne; je to citelná potřeba obecné i detailní metodické literatury jednotlivých předmětů. Pojednáme v dalším stručně o této potřebě se zřetelem k středoškolské matematice.

Hned na začátku je možno konstatovat: Metodiku detailní potřebujeme naléhavěji. Zvláště mladší učitelé potřebují při své práci bezpečné vodítko; k tomu přistupuje potřeba studijního materiálu k přípravě na ustanovovací zkoušky. Existence detailní metodiky jednotlivých partií podnítí též zájem o metodické pokusnictví, jež je nejen prospěšné, nýbrž přímo nutné. Metodu nelze normalisovat, jako se dá normalisovat materiál osnov,

*) Část 2. tohoto článku obsahuje řešení příkladů, které je již samozřejmé z části 1. Článek však chce poskytnouti v této části i nejmladším kolegům návod k písemné práci pro ustanovovací zkoušku profesorskou, pokud jde o rozvržení učiva ucelené části na jednotlivé hodiny (A—D). Příslušné příklady se snadno nahradí jinými, snadno se též zvolí příklady pro domácí cvičení.