Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Josef Klíma

Řešení sférických trojúhelníků stereografickým průmětem

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 70 (1941), No. Suppl., D247--D255

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121824

Řešení sférických trojúhelníků stereografickým průmětem.

J. Klíma, Brno.

Na konci v deskriptivní geometrii na střední škole probírají se základní věty stereografického průmětu kulové plochy, jakož i užití tohoto průmětu v kartografii.*) Průmět ten je středovým průmětem kulové plochy $\varkappa$ z jejího bodu S na průmětnu π kolmou k poloměru OS kulové plochy, je-li O středem kulové plochy $\varkappa$. V dalším myslíme si vždy průmětnu π proloženu středem O, hlavní kružnice kulové plochy $\varkappa$ v této průmětně budiž označena m. Základní věty stereografického průmětu, jež se tam dokazují, jsou:

α) Stereografický průmět kulové plochy je konformní, t. j. stereografické průměty čar na kulové ploše se protínají pod týmž úhlem jako na kulové ploše.

β) Kružnice kulové plochy $\varkappa$ mají za stereografické průměty zase kružnice a jejich středy jsou v průmětech vrcholů kuželových ploch dotýkajících se kulové plochy $\varkappa$ podél těchto kružnic.

Těchto vlastností stereografického průmětu kulové plochy se dá velice výhodně použíti k řešení úloh o sférických trojúhelnících. Dříve si však odvodíme některé konstrukce v tomto promítání, jichž pak použijeme k řešení sférických trojúhelníků.

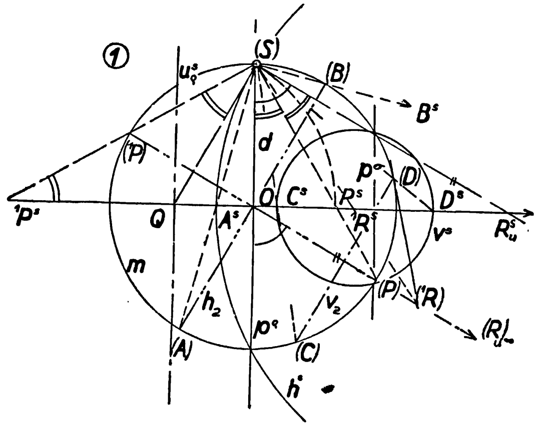
Nechť v obr. 1 průmětna stereografického promítání splývá s nákresnou a budiž m hlavní kružnice kulové plochy $\varkappa$ o středu O v průmětně! Střed promítání S je nad průmětnou ve vzdálenosti poloměru d kulové plochy $\varkappa$. Kružnice m je současně distanční kružnicí příslušného středového promítání. Hlavní kružnice h kulové plochy $\varkappa$ se promítá do kružnice h^s, jež půlí kružnici m, ježto stopa p^ϱ roviny ϱ kružnice h jde středem O kružnice m. Střed kružnice h^s podle věty β) je úběžníkem $R_u{}^s$ kolmice k rovině ϱ kružnice h. Zvolme si rovinu jdoucí středy $O, R_u{}^s$ kolmo k průmětně π za druhou průmětnu a sklopme tuto do průmětny π, tu střed promítání S se sklopí do (S). Hlavní kružnice h má nárys h_2 v průměru $(A)(B) \perp (S)R_u{}^s$ nárysného obrysu kulové plochy, jenž tu splývá s kružnicí m. Úběžnice $u_\varrho{}^s$ roviny ϱ jde bodem Q na $OR_u{}^s$, kde $Q(S) \perp (S)R_u{}^s$.

Mějme za úkol sestrojiti stereografické průměty sférických středů P, ${}^1P$ hlavní kružnice h. Nárysy těchto středů jsou na průměru $(P)({}^1P)$ kružnice m, který je rovnoběžný s $(S)R_u{}^s$. Promítací paprsky $(S)(P)$, $(S)({}^1P)$ dají nám na $OR_u{}^s$ stereografické průměty P^s, ${}^1P^s$ sférických středů hlavní kružnice h. Z vyznačených

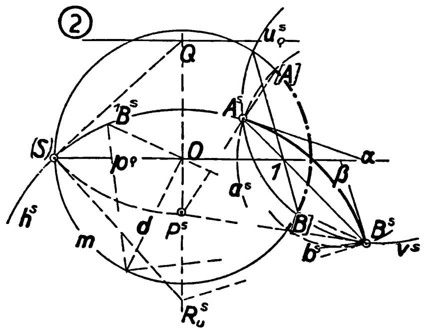
*) Viz na př. Klíma-Ingriš: „Deskriptivní geometrie“ pro reál. gymnasia, 2. vyd. str. 146 a pro VI. a VII. tř. reálek, str. 171.

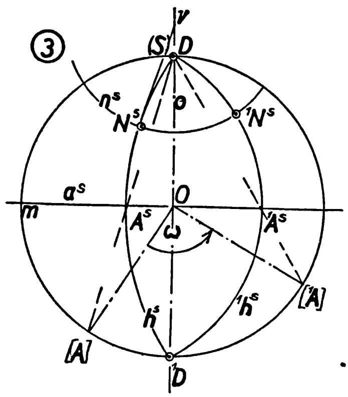
stejných úhlů vyplývá jednoduchá konstrukce těchto bodů a sice $\overline{QP^s} = \overline{Q^1P^s} = \overline{Q(S)}$. Též z obr. 1 jde, že paprsky $(S)P^s$ a $(S)^1P^s$ jsou osami úhlů spojnic $(S)A^s$, $(S)B^s$, kde AB je průměr kružnice h kolmý ke stopě p_ϱ.

V témže obr. 1 zvolen stereografický průmět v^s vedlejší kružnice v v rovině $\sigma \parallel \varrho$. Průměr kružnice v kolmý ke stopě p^σ je CD a střed ${}^1R^s$ kružnice v^s je v středovém průmětu vrcholu ${}^1R$ kužele opsaného kulové ploše $\varkappa$ podél kružnice v. Z konstrukce provedené v náryse je patrno, že průměty P^s, ${}^1P^s$ sférických středů kružnice v a jež jsou totožny se sférickými středy kružnice h, jsou na osách úhlů promítacích paprsků SC^sC, SDD^s. Hlavní kružnice kulové plochy, jež jdou sférickými středy P, ${}^1P$, protínají kolmo kružnice h, v, . . . v rovinách kolmých k průměru P^1P a proto jejich stereografické průměty protínají kolmo kružnice h^s, v^s, . . . a tvoří svazek kružnic o základních bodech P^s, ${}^1P^s$, jejichž středy jsou podle věty β) na společné úběžnici $u_\varrho{}^s$ rovin $\varrho \parallel \sigma \parallel \ldots$ Jde tudíž úběžnice $u_\varrho{}^s$ půlícím bodem Q úsečky $P^{s\,1}P^s$ a z toho opět plyne hořejší konstrukce bodů P^s, ${}^1P^s$, dána-li kružnice h^s o středu $R_u{}^s$, totiž $\overline{QP^s} = \overline{Q^1P^s} = \overline{Q(S)}$. Sklopíme-li kružnici h do průmětny π kolem stopy p_ϱ, tu splyne s kružnicí m a mezi h^s a m je středová kolineace o středu P^s nebo ${}^1P^s$ a ose p^ϱ, i jsou body P^s, ${}^1P^s$ též středy podobnosti kružnic m a h^s.



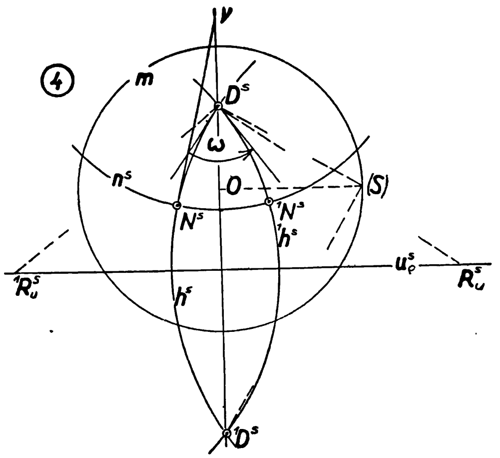
Buďte v obr. 2 dány stereografické průměty A^s, B^s dvou bodů kulové plochy $\varkappa$ a mějme určiti skutečnou velikost jejich sférické vzdálenosti! Tato vzdálenost se měří na hlavní kružnici h, jež jde body A, B. Stereografický průmět h^s je kružnice, která jde body A^s, B^s a půlí kružnici m, neboli chordála kružnic h^s, m jde středem O kružnice m. Použitím věty o chordálách tří kružnic lze kružnici h^s sestrojiti; příslušné konstrukci lze dáti též následující prostorový význam. Stopa p^ϱ roviny ϱ kružnice h jde středem O a stopníkem 1 spojnice AB na průmětně π. Abychom určili stopník 1, proložme body A, B libovolnou rovinu, jež protíná kulovou plochu $\varkappa$ v kružnici v, jejíž kruhový stereografický průmět je kružnice v^s jdoucí body A^s, $B^s{}_1$. Rovina kružnice v má stopu v chordále kružnic v^s, m a ta vytne na spojnici A^sB^s stopník 1, který spojen se středem O dává stopu p^ϱ roviny hlavní kružnice h, jejíž střed $R_u{}^s$ snadno se již sestrojí. Pro kružnici h^s lze též snadno určiti další bod na př. ${}^1B^s$ na spojnici OB^s, ježto platí $\overline{O^1B^s} \,.\, \overline{OB^s} = -d^2$, je-li d poloměr kružnice m a tedy též kulové plochy $\varkappa$. Skutečná velikost oblouku $\widehat{AB}$ kružnice h se dostane sklopením roviny ϱ kolem její stopy p^ϱ do průmětny π. Kružnice h přejde do kruž-



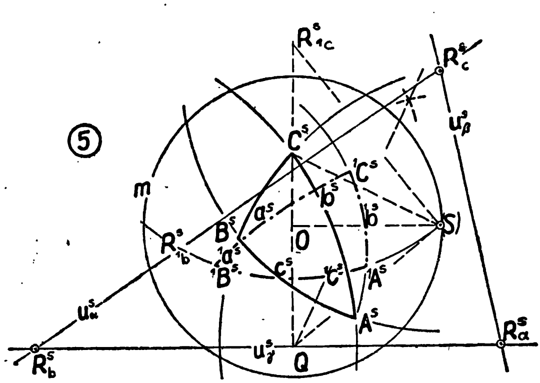


nice m, při čemž body A, B opisují na kulové ploše kružnici a, b, kolmo protínající hlavní kružnici h a proto jejich stereografické průměty podle vět α), β) jsou kružnice o středech α, β na stopě p^ϱ a na tečnách v bodech A^s, B^s sestrojených ke kružnici h^s. Kružnice a^s, b^s protínají kružnici m v bodech $[A]$, $[B]$, při čemž třeba dbáti, aby body A^s, B^s se otáčely v témže smyslu. Oblouk $\widehat{[A][B]}$ kružnice m je skutečnou velikostí sférické vzdálenosti $\widehat{AB}$. K bodům $[A]$, $[B]$ lze dospěti též konstrukcí známou ze středového promítání. Středový průmět roviny ϱ a její poloha sklopená kolem stopy p^ϱ do průmětny jsou ve vztahu středové kolineace o ose p^ϱ a středu ve sklopeném středu promítání kolem úběžnice $u_\varrho{}^s$. Střed kolineace ale podle obr. 1 je stereografický průmět P^s sférického středu P kružnice h. Jsou tudíž body $[A]$, $[B]$ též na spojnicích P^sA^s, P^sB^s.

V obr. 3 a 4 vyznačeno, jak v stereografickém průmětě se provádí otáčení kulové plochy $\varkappa$ kolem jejího průměru D^1D a sice v obr. 3, je-li tento průměr v průmětně π anebo v obr. 4, má-li polohu obecnou. V druhém případě je $\overline{O^1D^s} \,.\, \overline{OD^s} = -d^2$. Otočme v obou případech obecný bod N kulové plochy o úhel ω. Body N, D, ${}^1D$ určují hlavní kružnici h, jejíž průmět h^s je kružnice určená body N^s, D^s, ${}^1D^s$. Kružnice h po otočení kolem $D\,{}^1D$ o úhel ω přejde v kružnici ${}^1h$, která protíná kružnici h pod úhlem ω, který se podle věty α) objeví v stereografickém průmětě v úhlu kružnic ${}^1h^s$, h^s v bodech D a ${}^1D$. Z toho lze průmět ${}^1h^s$ určiti, jak provedeno v obr. 4. V obr. 3 pro změnu užito otočení bodu A kružnice h, který opisuje hlavní kružnici a v rovině kolmé k ose $D^1\,D$. Kružnice a má za stereografický průmět přímku a^s a ježto bod D je sférický střed kružnice a, dostaneme sklopený bod $[A]$ na spojnici DA^s. Ve sklopení otočíme bod $[A]$ do $[{}^1A]$ kolem středu O o úhel ω a na spojnici $D[{}^1A]$ je průmět ${}^1A^s$ otočeného bodu ${}^1A$ a z něho určíme kružnici ${}^1h^s$. Bod N při otáčení opisuje kružnici n v rovině kolmé k ose otáčení, jejímž průmětem je kružnice n^s protínající kolmo kružnice h^s, ${}^1h^s$ a mající střed v na ose $D\,{}^1D$. Střed v je tudíž na tečně sestrojené v bodě N^s ke kružnici h^s. V průsečíku ${}^1N^s$ kružnic ${}^1h^s$, n^s je průmět otočeného bodu ${}^1N$.



Přistupme nyní k úlohám o sférickém trojúhelníku. Tento je částí kulové plochy $\varkappa$ omezenou oblouky hlavních kružnic. V obr. 5 řešme nejprve úlohu, sestrojiti stereografický průmět sférického trojúhelníka, dány-li průměty stereografické A^s, B^s, C^s jeho vrcholů. Podle obr. 1 středy stereografických průmětů hlavních kružnic jdoucích bodem C jsou na úběžnici $u_\gamma{}^s$, která je kolmá k spojnici C^sO v bodě Q, který je na ose souměrnosti úsečky $S^s(S)$, kde $O(S)$ je poloměr kružnice m kolmý k spojnici OC^s. Stejně dostaneme pro bod B úběžnici



$u_\beta{}^s$ a pro bod A úběžnici $u_\alpha{}^s$. V průsečících těchto úběžnic jsou středy $R_a{}^s$, $R_b{}^s$, $R_c{}^s$ kruhových oblouků a^s, b^s, c^s, jež jsou stereografickými průměty stran sférického trojúhelníka ABC. Úhly α, β, γ sférického trojúhelníka jsou podle věty α) v úhlech křivočarého trojúhelníka $A^sB^sC^s$. Ježto součet úhlů ve sférickém trojúhelníku je větší než 180°, dostáváme pro rovinu větu:

„Součet úhlů v rovinném křivočarém trojúhelníku, jehož strany jsou kruhové oblouky, jest větší než 180°, když potenční střed O tří kružnic, jejichž oblouky jsou stranami trojúhelníka, je uvnitř kružnic".

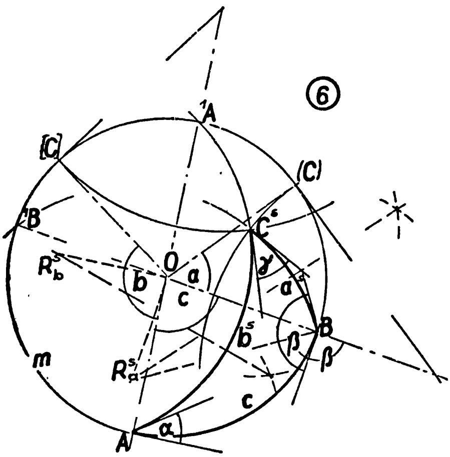
Jedině v tomto případě lze sestrojiti reálnou kružnici m, jež kružnicemi těmi je půlena a zmíněný křivočarý trojúhelník lze považovati za stereografický průmět sférického trojúhelníka. Je-li bod O vně těch kružnic, pak kružnice m je imaginární a součet úhlů v takovém trojúhelníku je menší než 180°; je-li bod O na kružnicích, pak kružnice m přejde v bod a součet úhlů se rovná 180°. Skutečné velikosti stran a, b, c sférického trojúhelníka ABC dostali bychom podle obr. 2.

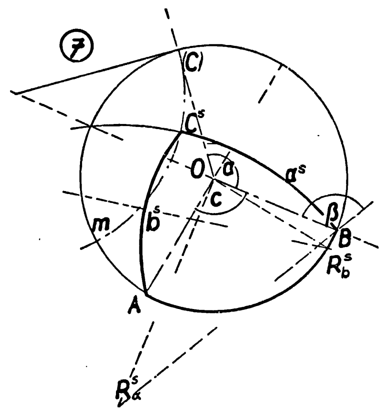
V obr. 5 je sestrojen ještě průmět sférického trojúhelníka polárního ${}^1A{}^1B{}^1C$ k trojúhelníku ABC. Strana ${}^1c$ polárního trojúhelníka je na hlavní kružnici ${}^1c$, jejíž rovina je kolmá k poloměru OC. Podle obr. 1 je střed $R_{1c}{}^s$ průmětu ${}^1c^s$ na spojnici OC^s a sice je $(S)R_{1c}{}^s \perp Q(S)$ a poloměr roven úsečce $R_{1c}{}^s(S)$. Stejně dostaneme stereografické průměty ${}^1b^s$, ${}^1a^s$, jež omezí s ${}^1c^s$ průmět polárního sférického trojúhelníka ${}^1A^s\,{}^1B^s\,{}^1C^s$.

Sférický trojúhelník je určen třemi prvky ze stran a, b, c a úhlů α, β, γ. V dalším ukážeme řešení hlavních případů a sice tím, že sestrojíme stereografický průmět sférického trojúhelníka, volíce ovšem jeho polohu na kulové ploše $\varkappa$ jakož i k průmětně π výhodně, aby řešení bylo co možno nejjednodušší.

Tak v obr. 6 je sestrojen sférický trojúhelník, dány-li jeho strany a, b, c a sice tím, že strana c je v průmětně π, takže jeho strana $\widehat{AB}$ je na kružnici m. Stranu b myslíme si sklopenu kolem stopy OB do průmětny π, takže vrchol C přejde v bod (C) kružnice m, kde $\sphericalangle\, OB(C) = a$ a stejně stranu $\widehat{AC}$ otočíme kolem stopy OA do průmětny π, takže vrchol C přejde v bod $[C]$ kružnice m, kde $\sphericalangle\, AO[C] = b$. Bod (C) otáčíme kolem průměru $B\,{}^1B$ kulové plochy a tu opíše kružnici, jejíž stereografický průmět sestrojíme podle obr. 3 a podobně sestrojíme stereografický průmět kružnice otáčení bodu $[C]$ kolem průměru $A\,{}^1A$. Obě kružnice dají nám průmět C^s třetího vrcholu sférického trojúhelníka. Pak již snadno určíme středy $R_a{}^s$, $R_b{}^s$ průmětů a^s, b^s stran a, b sférického trojúhelníka. Úhly α, β, γ sférického trojúhelníka jsou podle věty α) již v průmětu ve skutečné velikosti.

V obr. 7 je sférický trojúhelník dán stranami a, c a úhlem jimi sevřeným β. Stranu $c \equiv \widehat{AB}$ zvolíme opět v průmětně π na kružnici m. Třetí vrchol C^s je na stereografickém průmětě kružnice otáčení bodu (C) kolem průměru B^1B, kde $\sphericalangle BO(C) = a$.



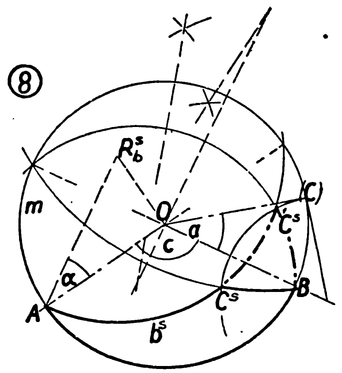


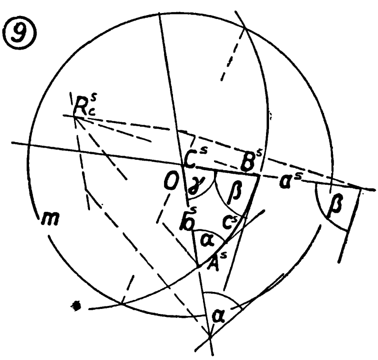
Ježto úhel β jeví se v stereografickém průmětě u vrcholu B, určíme snadno střed R_a^s kružnice a^s, na níž je též C^s. Je $OR_a^s \perp OB$ a $\sphericalangle OBR_a^s = 180° - \beta$. U vrcholů C^s a A jsou úhly γ, α a skutečnou velikost strany b obdržíme otočením bodu C kolem průměru AO^1A podle obr. 2 do průmětny π.

Sférický trojúhelník, daný stranami a, c a úhlem α proti jedné z nich, sestrojen v obr. 8. Strana c položena opět do průmětny π a strana a sklopena kolem OB do průmětny do $\widehat{B(C)} = a$. Stereografický průmět kružnice otáčení bodu (C) kolem OB se určí snadno jako v předchozích případech a stejně střed R_b^s kruhového průmětu b^s strany b. V průsečíku kružnice b^s s průmětem kružnice otáčení bodu (C) je vrchol C^s stereografického průmětu třetího vrcholu. V obr. 8 vychází ještě druhý sférický trojúhelník AB^1C, který vyhovuje daným podmínkám. Úloha je obecně dvojznačná. Laskavému čtenáři se ponechává zvolení strany a nebo úhlu α, aby úloha byla jednoznačná.

Ostatní tři základní úlohy o určení sférických trojúhelníků lze řešiti užitím polárního trojúhelníka sférického; ale zde je rychlejší přímé řešení. Tak v obr. 9 řešen případ, kdy pro sférický trojúhelník dány jeho úhly α, β, γ. Zde zvolíme vrchol C v diametrálně protilehlém bodě k středu promítání S, takže $C^s \equiv O$

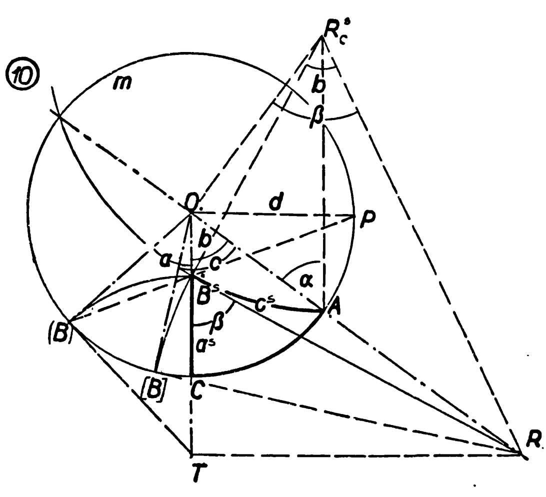
(*m* nevolíme). Hlavní kružnice stran a, b promítají se do přímek a^s, b^s svírajících úhel γ. Třetí strana c má za stereografický průmět kružnici c^s, která protíná přímky a^s, b^s pod úhly β, α. Zvolíme-li si její poloměr, lze podle obrazu snadno sestrojiti její střed R_c^s.





Kružnice m má pak střed $O \equiv C^s$ a poloměr roven polovině tětivy kružnice c^s kolmé k $R_c^sC^s$. Skutečné velikosti stran a, b, c dostaneme sklopením příslušných hlavních kružnic do průmětny π podle obr. 2. Laskavému čtenáři se ponechává podle toho vyřešiti zbývající základní určení trojúhelníka sférického, dána-li strana a dva přilehlé úhly a dva úhly s jednou protější stranou.

Ze stereografického průmětu sférického trojúhelníka lze též odvoditi vztahy, jež platí mezi jeho prvky a, b, c, α, β, γ. Tak v obr. 10 je to provedeno pro pravoúhlý sférický trojúhelník, kde $\gamma = 90°$. Do průmětny položena strana b, takže odvěsna $\widehat{AC}$ je na kružnici m. Hlavní kružnice strany a se promítá do přímky a^s a strana c do oblouku kružnice c^s. Je-li R_c^s střed kružnice c^s, tu je $OR_c^s \perp OA$ a $\sphericalangle$



$\sphericalangle\ OAR_c^s = \alpha$. Sklopení vrcholu B kolem OA provede se kružnicí o středu R na OA, jež protíná kružnici c^s kolmo v bodě B^s a kružnici m v poloze sklopené $[B]$ a tu je $R[B] \perp [B]O$ a $\sphericalangle$ $\sphericalangle\ [B]OA = c$. Týž bod B sklopí se kolem OC do bodu (B) kružnice m a podle obr. 2 jde spojnice $(B)B^s$ sférickým středem P kružnice a $(OP \perp a^s)$. Tečna sestrojená v bodě (B) ke kružnici m protíná osu otáčení OC v bodě T, tu kružnice o středu T a poloměru $\overline{T(B)}$ jde bodem B^s a protíná kolmo kružnici m. Patrně spojnice TR je kolmá k OT, ježto kružnice jdoucí bodem B^s a kolmo protínající kružnici m mají středy na chordále kružnice m a bodu B^s. a tato je kolmá k spojnici OB^s. Body R_c^s, R, B^s, O jsou na kružnici o průměru RR_c^s a proto $\sphericalangle\ OR_c^sR = \beta$.

Délku OR lze vypočítati jednak z pravoúhlého trojúhelníka $OR[B]$ a sice je $\overline{OR} = d : \cos c$ a z pravoúhlého trojúhelníka ORT; z něhož $\overline{OR} = \overline{OT} : \cos b$; poněvadž z trojúhelníka $O(B)T$ je $\overline{OT} = d : \cos a$, lze porovnáním dostati známý vztah mezi stranami pravoúhlého sférického trojúhelníka:

$$\cos c = \cos a \cos b. \tag{1}$$

Dále vypočítejme vesměs z pravoúhlých trojúhelníků strany pravoúhlého trojúhelníka RTB^s, v němž se vyskytuje úhel β:

$$\overline{RB^s} = \overline{R[B]} = d \operatorname{tg} c; \quad \overline{RT} = \frac{d}{\cos a} \operatorname{tg} b; \quad \overline{TB^s} = T(B) = d \operatorname{tg} a.$$

Z tohoto trojúhelníka lze napsati vztahy mezi dvěma stranami a úhlem β sférického pravoúhlého trojúhelníka, vyjádříme-li goniometrické funkce úhlu β:

$$\sin \beta = \frac{\overline{TR}}{\overline{RB^s}} = \frac{\operatorname{tg} b}{\cos a \operatorname{tg} c} = \frac{\sin b \cos c}{\cos a \cos b \sin c}$$

a podle rovnice (1) dostaneme

$$\sin \beta = \frac{\sin b}{\sin c}, \quad (2), \qquad \cos \beta = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} c} \quad (3)$$

a

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} b}{\sin a}. \tag{4}$$

Záměnou β za α a b za a dostaneme další tři vztahy

$$\sin \alpha = \frac{\sin a}{\sin c}, \quad (5), \qquad \cos \alpha = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c}, \quad (6), \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} a}{\sin b}. \quad (7)$$

Vztahy mezi dvěma úhly a jednou stranou vyplynou z pravoúhlého trojúhelníka ORR_c^s, jehož strany jsou

$$\overline{OR} = \frac{d}{\cos a \cos b} = \frac{d}{\cos c}, \quad \overline{OR_c^s} = d \operatorname{tg} \alpha, \quad \overline{RR_c^s} = d \frac{\operatorname{tg} c}{\sin b}$$

$$\text{a} \quad \sphericalangle\, OR_c^s R = \beta;$$

vyjádříme-li $\cos \beta$ a $\operatorname{tg} \beta$, dostáváme:

$$\cos \beta = \sin \alpha \cos b; \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\cos c \operatorname{tg} \alpha}, \tag{8}$$

nebo

$$\operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{tg} \beta \cos c, \tag{9}$$

z čehož

$$\operatorname{cotg} \beta = \operatorname{tg} \alpha \cos c. \tag{10}$$

Dostali jsme tak všech deset vztahů pro pravoúhlý sférický trojúhelník, jež se dají seskupiti v pravidlo Neperovo.

Jak viděti, stereografická projekce svými vlastnostmi, vyjádřenými větami α), β), nahradí nám velice výhodně rýsování na kouli sférickými kružidly.

Funkce vitaminů a enzymů (ergonů).

Dr. Eduard Knobloch, Praha.

H. v. Euler[1]) užívá pro vitaminy a základní složky enzymů označení ergon. Vyjadřuje tím skutečnou příbuznost těchto biokatalysátorů.

V biochemii při výměně látkové užíváme dvou základních pojmů; pro látky základní, tvořící stavební materiál nebo dárce energie, užíváme označení substrát a proti němu je postaven celý systém různých aktivátorů a katalysátorů, které známe jako enzymy, vitaminy a hormony. Vedle těchto ergonů vystupuje ještě celá řada faktorů ovlivňujících výměnu látkovou. V první řadě jest to na příklad acidita prostředí, dále přítomnost různých kationtů a aniontů.

Abychom pochopili funkci enzymů a aspoň některých vitaminů, upozorníme zde na některé důležité výsledky bádání v oboru fermentů. Dnes si představujeme, že většina aktivních forem různých fermentů je složena ze dvou částí: z koenzymu a apoenzymu. Obě části teprve dávají funkce schopný enzym, holoenzym:

$$\text{koenzym} + \text{apoenzym} = \text{holoenzym}.$$

Koenzym nebo prosthetická skupina je onou částí enzymu, kde dochází k chemické reakci. Apoenzym je vysokomolekulární nosič,

---

[1]) Jeden z hlavních moderních badatelů o enzymech (Švéd).