Úlohy

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 70 (1941), No. Suppl., D228--D229

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121818

ÚLOHY.

Úlohy k Fermatovu problému. Veškerá písmena v těchto úlohách značí celá čísla. Malá písmena latinská i řecká značí celá *kladná* čísla. Znak B/A značí, že číslo A je dělitelno číslem B. Je-li π prvočíslo, značí znak $\pi^\sigma//A$, že jest π^σ/A, ale není $\pi^{\sigma+1}/A$. Dále budiž p liché prvočíslo, a, b, c tři čísla po dvou nesoudělná, jež splňují rovnici

$$a^p + b^p = c^p \tag{1}$$

(je-li ovšem správná Fermatova domněnka, neexistují taková čísla a, b, c). V následujících úlohách jsou odvozeny některé podmínky, kterým musí vyhovovati čísla a, b, c, splňující rovnici (1). (Konečným cílem — dosud obecně nedosaženým — by ovšem bylo, nalézti takové podmínky, jež vedou ke sporu.) Dále značme $a = \xi + m$, $b = \xi + n$, $c = \xi + m + n$, $a + b = d$, $\dfrac{a^p + b^p}{a + b} = v$, $\dfrac{c^p - b^p}{c - b} = w$, tedy $m = c - b$, $n = c - a$, $\xi = a + b - c$, $dv = c^p$, $mw = a^p$. Rovnici (1) lze tedy psáti též v těchto dvou tvarech:

$$(\xi + m)^p + (\xi + n)^p = (\xi + m + n)^p, \tag{2}$$

$$(d + m - n)^p + (d + n - m)^p = (d + m + n)^p. \tag{3}$$

Úloha 1.[1]) Je-li π liché prvočíslo, a je-li $(\pi, A) = 1$, pak platí toto: 1. Je-li $A \not\equiv B \pmod{\pi}$, je též $A^\pi \not\equiv B^\pi \pmod{\pi}$; 2. Je-li $\pi^\sigma//(A-B)$, je $\pi^{\sigma+1}//(A^\pi - B^\pi)$.

Úloha 2. Je-li π liché prvočíslo, $A + B \neq 0$, $(A, B) = 1$, platí pro čísla $X = A + B$, $Y = \dfrac{A^\pi + B^\pi}{A + B}$ toto: buďto není ani X ani Y dělitelno π, a potom je $(X, Y) = 1$; nebo je $\pi/X, \pi/Y$, a potom je $\pi^1//Y$, $(X, Y) = \pi$.

Úloha 3. Dokažte z (2), že jest $\xi^p = pmn\varrho$, kde čísla m, n, ϱ jsou po dvou nesoudělná. Platí tedy nutně jeden z těchto tří případů:

I. $m = \mu^p$, $n = \nu^p$, $\varrho = p^{rp-1}\zeta^p$,
IIa. $m = p^{rp-1}\mu^p$, $n = \nu^p$, $\varrho = \zeta^p$,
IIb. $m = \mu^p$, $n = p^{rp-1}\nu^p$, $\varrho = \zeta^p$,

---

[1]) Běžné úlohy 1, 2 uvádím jen pro úplnost.

kde μ, ν, ζ, p jsou po dvou nesoudělná, $\xi \doteq p^r\mu\nu\zeta$. Případ I rozštěpme na dva: Ia $\mu + \nu \equiv 0 \pmod{p}$, Ib $\mu + \nu \not\equiv 0 \pmod{p}$.

Úloha 4. Je buďto $d = \delta^p$, $v = v_1{}^p$, nebo $d = p^{sp-1}\delta^p$, $v = pv_1{}^p$, kde δ, v_1, p jsou po dvou nesoudělná.

Úloha 5. Z rovnice $v = (d - \xi)^p : d$ dokažte δ/ξ a odtud $\delta/(m + n)$, $(\delta, \mu) = (\delta, \nu) = 1$, δ/ζ, takže $\xi = p^r\mu\nu\delta\zeta_1$.

Úloha 6. V případě IIa je $d = \delta^p$, $m = p^{rp-1}\mu^p$, $w = pw_1{}^p$, kde μ, p, w_1 jsou po dvou nesoudělná.

Úloha 7. V případě IIa je $p^{r-1}//(\nu - \delta)$, $r > 1$.

Úloha 8. V případě Ia je $d = p^{sp-1}\delta^p$, $v = pv_1{}^p$, $c = p^s v_1 \delta$, $s = r > 1$, $p^{r-1}//(\mu + \nu)$. [2])

Úloha 9. V případě I je $\delta \neq \mu + \nu$. Návod: kdyby bylo $\delta = \mu + \nu$, bylo by $2p^r\mu\nu(\mu + \nu)\, \zeta_1 = (\mu + \nu)^p - \mu^p - \nu^p$; pravá strana však není dělitelna číslem $2\mu\nu\,(\mu + \nu)$.

Úloha 10. Je-li π liché prvočíslo, $\pi^\sigma//\delta$, je $\pi^\sigma//(m + n)$; je-li $2^\sigma//\delta$, je $2^{\sigma+1}//(m + n)$.

Úloha 11. V případě IIa je $\delta \equiv \nu \pmod{p}$, v případě Ib je $\delta \equiv \mu + \nu \pmod{p}$.

Úloha 12. Vzorec (2) platí též pro $p = 2$. Odvoďte z něho řešení rovnice $x^2 + y^2 = z^2$.

Dr. *Bedřich König*, Nové Město na Moravě.

---

[2]) V případě Ib je ovšem $d = \delta^p$, neboť v tomto případě je $d = 2\xi + m + n \equiv \mu^p + \nu^p \pmod{p}$.