Vojtěch Jarník

Návod ke studiu analysy pro začátečníky

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 70 (1941), No. Suppl., D109--D116

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121811

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY A FYSIKY

ČLÁNKY A REFERÁTY.

Návod ke studiu analysy pro začátečníky.

Vojtěch Jarník, Praha.

Úvodem k tomuto článku chtěl bych upozorniti na jednu okolnost. Matematická analysa je právě ona část matematiky, které se nejčastěji užívá v aplikacích. Proto nacházíme mezi zájemci o analysu mnoho takových, kteří se nezajímají příliš o vědecky bezvadné vybudování této nauky, nýbrž chtějí jen co možná rychle získati vědomosti, nutné k pochopení jednoduchých problémů analysy, a jistou obratnost, potřebnou k jejich řešení. Těmto zájemcům není tento článek určen; místo knih, uvedených v tomto článku, poslouží jim lépe některá učebnice matematiky, určená pro techniky nebo přírodovědce; z české literatury na př. kniha J. Vojtěcha [8].[1]) Tento článek je naopak určen těm čtenářům, kteří mají o matematiku hlubší zájem, takže cítí potřebu, postaviti své další studium na solidní základ; jak je možno tento základ v analyse získati, o tom pojednává tento článek.

Obsahem tohoto článku je program pro studium počátků diferenciálního a integrálního počtu a vedle toho pro studium prvních začátků teorie diferenciálních rovnic; tyto byly přibrány jednak proto, že se čtenář s nimi velmi často setká v aplikacích, a dále proto, aby čtenář měl o nich aspoň ponětí, až se s nimi setká při důkladnějším studiu.

Nutnou průpravou pro studium diferenciálního a integrálního počtu je teorie posloupností a nekonečných řad. A konečně společným základem ke všem uvedeným naukám je teorie reálných čísel. Rozpadá se tedy náš program zhruba na těchto pět oddílů:

A. Teorie reálných čísel.
B. Teorie posloupností a řad.
C. Diferenciální počet.
D. Integrální počet.
E. První počátky teorie diferenciálních rovnic.

[1]) Čísla v hranatých závorkách se vztahují k seznamu literatury, uvedenému na konci článku.

Uvedu nyní návod, jak jest možno tento program prostudovati. Dobrých knih o tomto předmětu je ve světové literatuře mnoho, čtenáři nepříliš pokročilému bude však asi příjemnější, uvedu-li jich co nejméně, při čemž budu podle možnosti přihlížeti hlavně k české literatuře. Také výběr látky a postup studia, zvolený v tomto článku, není jediný možný; zvolil jsem jej tak, aby čtenář, který se jím řídí, mohl co nejvíce využíti české literatury.

Bodům A—D jsou věnovány knížky: M. Kössler, Úvod do počtu diferenciálního [4] (zkratka **K**) a V. Jarník, Úvod do integrálního počtu [2] (zkratka **J**), určené právě pro počáteční studium. Rozsah látky v těchto knížkách není však postačující ani pro ten program, který mám na mysli, a proto jej doplníme výběrem látky z knih K. Petra „Počet differenciální" [6] (zkratka **PD**) a „Počet integrální" [7] (zkratka **PI**), jakož i z jiných knih, které ještě zvlášť uvedu.

Postup studia z těchto knih si představuji asi takto:

1. Nejprve nechť si čtenář vezme **K** a pročte si kap. I „Čísla racionální a reálná" tak, aby mu byly jasny pojmy, které se v této kapitole vyskytují. Tato kapitola obsahuje zběžný nástin teorie reálných čísel; teorie reálných čísel (tedy bod A našeho programu) je partie dosti abstraktní, která mnohdy při prvním studiu působí značné obtíže. Proto je tato I. kapitola knížky **K** úmyslně neúplná, aby čtenáře pro počátek příliš nezdržovala. Není proto nutno a snad ani radno, aby čtenář tuto kapitolu studoval při prvním čtení příliš podrobně, ale přečísti si ji s porozuměním musí, protože obsahuje mimo jiné na str. 12—14 jeden z nejdůležitějších pojmů, totiž pojem „limita posloupnosti".

Potom začíná teprve vlastní studium. Od tohoto okamžiku nechť čtenář studuje všechny partie, které uvedeme, až k úplnému porozumění všech podrobností a nechť si je zároveň procvičuje na četných příkladech; knihy, jež uvádím, obsahují většinou samy příklady ke cvičení; větší počet cvičení najde čtenář ve sbírkách úloh, které ke konci článku uvedu.

2. Nyní nechť si čtenář prostuduje z knížky **K** kapitolu II—VI. Kapitolu VII (funkce dvou proměnných) jakožto poněkud těžší zatím odkládám. Podotkl bych jen toto: Limita posloupnosti je v **K** na str. 12—14 definována nekonečnými desetinnými zlomky; na str. 18, ř. 6—9 je podána druhá (ekvivalentní) definice limity, a to tato (až na poněkud jiné slovní obraty): „Posloupnost $a_1, a_2, a_3, \ldots$ má limitu A, jestliže ke každému kladnému číslu ε existuje číslo $N(\varepsilon)$ (závislé obecně na ε) tak, že nerovnost $|a_n - A| < \varepsilon$ čili $A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$ je splněna pro všechna $n > N(\varepsilon)$." V II. kapitole užívá Kössler ještě obou tvarů definice limity. Ale v dalších kapitolách a vůbec ve většině matematických úvah se

užívá jen druhého tvaru (ze str. 18); je proto nutno, aby čtenář tuto druhou definici měl dokonale promyšlenu a vždy pohotově.

3. Potom nechť čtenář prostuduje knížku **J** (celou, ale bez Dodatku, t. j. kapitoly I—V). O tom, jak si studium této knížky představuji, promlouvám dosti obšírně v předmluvě k této knížce a nemusím se tím proto zde zabývati. Jen bych upozornil, že jsem kapitole IV věnoval poměrně tolik místa ne ani tak pro její význam v celkové výstavbě matematiky, nýbrž především proto, že poskytuje — což je pro začátečníka důležité — možnost, počítati hojně příkladů.

4. Nyní si má čtenář doplniti body A—D našeho programu, se kterými se již zhruba seznámil. Jde především o bod A, t. j. o teorii reálných čísel. Jak čtenář ví již z **K**, kap. I. nevystačíme v matematice s racionálními čísly (t. j. se zlomky tvaru $\frac{2}{3}$, $\frac{-7}{5}$ a pod.) a zavádíme proto další čísla, t. zv. reálná iracionální čísla (na př. $\sqrt{2}$ atd.). Úkolem bodu A našeho programu jest, zavésti iracionální reálná čísla tak, aby předně v oboru všech reálných čísel (racionálních i iracionálních) platily tytéž věty o uspořádání čísel podle velikosti a o základních úkonech početních, jako v oboru racionálních čísel, a aby za druhé v oboru všech reálných čísel platila základní věta o horní a dolní hranici (viz **J**, str. 10, věta 1, a strana 13, věta 2) nebo některá věta jí ekvivalentní (takovou větou je základní věta o monotonních posloupnostech, **K**, odst. 5, str. 21—23). Reálná čísla je možno zavésti několika navzájem ekvivalentními způsoby. Jeden z nich spočívá na pojmu nekonečného desetinného zlomku a má tu výhodu, že spočívá na představě běžné ze školy (reálné číslo = nekonečný desetinný zlomek); nevýhodou jeho jsou četné početní obtíže, které se při vybudování této teorie vyskytují. Tato teorie reálných čísel, spočívající na pojmu nekonečného desetinného zlomku, je vyložena v **K** v Dodatku I, str. 130—138.

Jiná teorie reálných čísel, vypadající na první pohled poněkud abstraktněji, se kterou by se však čtenář měl seznámiti, je teorie „Dedekindova řezu“, jež spočívá na této myšlence: myslete si na reálné ose vyznačeno nějaké iracionální číslo, třeba $\sqrt{2}$; potom se všechna racionální čísla rozpadají ve dvě skupiny: ve skupinu A všech racionálních čísel menších než $\sqrt{2}$ a ve skupinu B všech racionálních čísel větších než $\sqrt{2}$. Naopak je číslo $\sqrt{2}$ těmito dvěma skupinami určeno, tvoří jakýsi „řez“ mezi těmito skupinami. Můžeme proto užíti těchto skupin k definici iracionálních čísel, definujíce iracionální číslo právě jako dvojici skupin racionálních čísel, mající jisté jednoduché a velmi názorné vlastnosti. Tato teorie je vyložena na počátku knihy **PD**. Mimo to učiní čtenář dobře, prostuduje-li si v **PD** ještě několik dalších odstavců o posloupnostech; zopakuje a doplní si tím — jsa již na vyšší úrovni — znalosti, kterých nabyl na samém začátku studia našeho programu. Látka, o níž mluvím, je obsažena v **PD** na str. 1—34. Místo **PD** str. 1—34 může čtenář prostudovati též část knihy Perronovy [5], a to § 1—10, § 12—16, § 18—23. V této knize jsou všechny příslušné vývody podrobně provedeny, i ty, které jsou v **PD** jen stručně naznačeny. Podotýkám, že v **PD** je názvosloví poněkud jiné než v **K** a v **J**. Místo „posloupnost" říká Petr „řada čísel", místo „limes superior a inferior" říká „největší a nejmenší z limit". Slova „nesčíslné množství" v **PD**, str. 1 dole a dále znamenají ovšem totéž co „nekonečná množina" v **J**, str. 9. Též pro intervaly je v **PD** (str. 21—22) zavedeno jiné označení než v **K** a v **J**. Studijní program, vytčený v tomto odstavci, je tedy tento: buďto **PD** str. 1—34, nebo vytčené paragrafy z knihy Perronovy. Mimo to může si čtenář, zajímá-li se o vybudování teorie naznačené v **K**, kap. I, přečísti Dodatek I v **K**.

5. Nyní nechť čtenář prostuduje VII. kapitolu z **K** a doplní si ji odstavcem 222 z **PD**, kde se pojednává o výpočtu vyšších derivací implicitní funkce. Pravidlo, kterého Petr při odvození rovnic (2), (3) a následující rovnice užívá, plyne přímo ze vzorců v **K**, odst. 49, a to takto:

Je-li $z = f(x, y)$, $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, mají-li φ, ψ derivaci v jistém bodě t a má-li funkce f úplný diferenciál v příslušném bodě $[x, y]$, je podle **K**, str. 117, ř. 18 (v **K** je u, v místo x, y)

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}. \tag{1}$$

Existují-li v okolí oné hodnoty t ještě derivace φ'', ψ'', a má-li funkce f v okolí příslušného bodu $[x, y]$ ještě druhý diferenciál, existuje též $\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}$ a počítá se takto: Pravá strana rovnice (1) je součet, každý sčítanec je součinem. Jest $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) = \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$ a podle vzorce (1), užitého na funkci $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ (t. j. $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, což jest funkce x, y, v níž ovšem za x, y dosazujeme $\varphi(t), \psi(t)$), jest

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

a obdobně

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t};$$

podle pravidla o derivování součinu dostáváme z (1) — ježto v tomto případě platí rovnost $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$, jak dokázáno v **PD**, odst. 199 —

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}$$
$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 +$$
$$+ \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}.$$

V **PD** odst. 222 je $z = F(x, y)$, dále je tam speciélně $t = x$, tedy $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1$, $\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = 0$ atd., $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$, dále je v rovnici (1) na str. 349 pravá a tedy i levá strana rovna nule pro všechna přípustná x (dosadíme-li tam ovšem za y příslušnou implicitní funkci) a tedy i všechny derivace levé strany jsou rovny nule. Tím dostáváme rovnici (3) z **PD** str. 350 a opětovným použitím tohoto postupu — za příslušných předpokladů — i další derivace implicitní funkce.[2]) Podobně lze ze vzorců v **K**, str. 117, ř. 5 zdola, odvoditi vzorce pro $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ atd. Doporučuji čtenáři, aby si tyto početní úkony trochu procvičil; viz v knížce Wittingově [9] příklady 159, 164, 165, 166 na str. 53—55 a § 22 na str. 57—60.

6. Nyní přicházejí doplňky k bodu D (integrální počet).

a) Především nechť si čtenář uvědomí věty, obsažené v **J** ve cvičeních 1, 2, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 17 na str. 73—75 a ve cvičení 22 na str. 106—107; jsou mezi nimi důležité věty. Poslední věta (t. zv. druhá věta o střední hodnotě) byla ve cvič. 22 vyslovena za předpokladů příliš omezujících; radím čtenáři, aby si její důkaz za obecnějších předpokladů přečetl v **PI**, str. 239—242, odst. 105—106.

b) Dále nechť si čtenář prostuduje v **PI** odst. 119—121, pojednávající o nejjednodušších metodách numerického výpočtu integrálů, jakož i odst. 127, dávající zbytek

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2), \quad y_0 = f(a), \quad y_1 = f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$
$$y_2 = f(b)$$

v Simpsonově formuli.

---

[2]) Upozorňuji, že věta o implicitních funkcích (**K** odst. 54 a k tomu jako doplněk **PD** odst. 222) je velmi důležitá a proto musí čtenář její smysl dobře proniknouti, i když mu snad při prvním čtení dělá obtíže.

c) Při Cauchy-Riemannově definici určitého integrálu $\int_a^b f(x)\,dx$ (viz **J** str. 37) jsme předpokládali, že interval $\langle a, b\rangle$ je konečný a že funkce f je v něm ohraničená. Nejsou-li tyto předpoklady splněny, zobecňujeme pojem integrálu, čímž dospíváme k t. zv. integrálům nevlastním. První jednoduchý takový typ je tento: Nechť funkce f má integrál v každém intervalu $\langle a, b - \varepsilon\rangle$, ať je ε $(0 < \varepsilon < b - a)$ sebe menší kladné číslo, ale ať není ohraničená v intervalu $\langle b - \varepsilon, b\rangle$; příklad: $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = (1 - x)^{-\frac{1}{2}}$. Potom existuje integrál $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$ pro $0 < \varepsilon < b - a$, ale neexistuje podle dosavadní definice $\int_a^b f(x)\,dx$. V tomto případě rozšiřujeme definici integrálu, kladouce $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$, jestliže ovšem tato limita existuje. Druhý jednoduchý typ: budiž dáno číslo a; integrál $\int_a^B f(x)\,dx$ nechť existuje, ať je B jakékoliv (sebe větší) číslo $(B > a)$; potom rozšiřujeme definici integrálu, kladouce

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{B\to+\infty} \int_a^B f(x)\,dx \left(\text{na př. } \int_1^\infty x^{-2}\,dx = \lim_{B\to+\infty} \int_1^B x^{-2}\,dx = \right.$$
$$\left. = \lim_{B\to+\infty}\left(-\frac{1}{B} + 1\right) = 1\right),$$

existuje-li ovšem tato limita. O těchto — a podobných — typech t. zv. integrálů nevlastních nechť se čtenář poučí z **PI**: odst. 139 až 142, 144—149 (s vynecháním bodu 9 na str. 363) a počátek odst. 150 (až na str. 364, ř. 17) — vynechal jsem některá místa, obsahující složitější pojmy. K tomu poznamenávám: a) K porozumění těmto odstavcům je třeba znáti Bolzano-Cauchyovu podmínku pro existenci limity funkce, viz **K**, str. 58. V **K** jde o oboustrannou limitu, zde o limitu zprava či zleva, po příp. o limitu pro $x \to +\infty$ nebo $x \to -\infty$; příslušné změny si čtenář sám snadno provede. b) Petr říká „funkce konečná“ místo „funkce ohraničená“. O ostatních odchylkách Petrova názvosloví jsem se zmínil již v odst. 4.

7. Velmi důležité v analyse jsou t. zv. mocninné řady, t. j. řady tvaru $a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots$ Nejjednodušší věty o těchto řadách najde čtenář v **PD**, odst. 142—144. Další velmi důležitý pojem, týkající se nekonečných řad, je pojem stejnoměrné konvergence. S tímto pojmem může se čtenář seznámiti na př. v **PD**, odst. 120—122. Velmi obšírně a pro začátečníka srozumitelně (s četnými příklady) je pojem stejnoměrné konver-

gence i se svými hlavními aplikacemi vyložen v knize Knoppově [3]. § 46, 47 a první stránka z § 48 (Weierstrassovo kriterium).

8. K studiu diferenciálních rovnic poslouží čtenáři kniha Hornova [1]; čtenář nechť si z ní prostuduje § 1—6, po příp. též § 9 (elementární metody integrační), dále § 11—12 (existenční věty) a konečně § 19—24 (teorie lineárních diferenciálních rovnic). Poznamenávám k tomu toto:

a) V paragrafech o elementárních metodách integračních nejsou všude přesně vytčeny podmínky pro existenci řešení ani rozsah oboru, v němž řešení platí; to celkem nevadí, ježto zde nejde ani tak o obecnou teorii, jako spíše o návod, jak v jednotlivých jednoduchých případech postupovati. Podrobnou diskusi lze pak nejlépe provésti v každém jednotlivém případě.

b) Studium § 11—12 doporučuji proto, aby čtenář znal důkaz základní existenční věty o lineárních diferenciálních rovnicích, vyslovené v § 19.

c) V § 21, 23, 24 vystupuje e^z při komplexním z. Čtenář, který snad o této věci dosud nic neví, pomůže si — pro účel zde vytčený — nejjednodušeji tímto způsobem: Pro reálné x je e^x definováno řadou $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots$ Pro ryze imaginární $x = iy$ definujme $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ [3]) (to je zcela přirozená definice, neboť dosadíte-li do řady pro e^x zcela mechanicky $x = iy$, dostanete právě tento vzorec, vzpomenete-li si na mocninné řady pro funkce $\cos y$, $\sin y$). Pro libovolné komplexní $z = x + iy$ definujme potom e^z rovnicí $e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$. Použitím známých vzorců pro $\cos(\alpha + \beta)$, $\sin(\alpha + \beta)$ zjistíte, že i pro komplexní z_1, z_2 platí $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$, specielně $e^z e^{-z} = e^0 = 1$, takže $e^z \neq 0$ pro všechna komplexní z. Dále potřebujeme tento pojem: je-li každé reálné hodnotě x jistého oboru přiřazeno jisté komplexní číslo z, říkáme, že z je komplexní funkce reálné proměnné x; tedy $z = f(x) = \varphi(x) + i\,\psi(x)$, kde φ, ψ jsou reálné funkce. Říkáme, že f je spojitá (v nějakém bodě nebo intervalu), jsou-li φ, ψ spojité. Derivaci a integrál definujeme rovnicemi

$$f'(x) = \varphi'(x) + i\,\psi'(x); \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx + i \int_a^b \psi(x)\,dx.$$

Zobecnění proti reálným funkcím je tedy jen formální. Čtenář se snadno přímým výpočtem přesvědčí, že vzorce pro derivaci součtu a součinu platí i pro komplexní funkce reálné proměnné

[3]) Tedy $e^{-iy} = \cos y - i \sin y$, odkudž vzorce $\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}$, $\sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$.

(sestrojí se derivace reálné části plus i-krát derivace imaginární části). Podobně se čtenář přesvědčí, že pro komplexní $r = \alpha + i\beta$ je derivace funkce $e^{rx} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$ (při *reálném* x) rovna re^{rx}. To je celkem všechno, co čtenář v § 21, 23, 24 o komplexních funkcích potřebuje věděti; pouze na str. 62 dole se derivuje e^{rx} podle *komplexního* parametru r; tento počet však může čtenář obejíti poněkud zdlouhavějším přímým výpočtem.[4])

9. Jako sbírka úloh ke cvičení poslouží čtenáři pro diferenciální počet knížka Wittingova [9]. Pro náš program přicházejí v úvahu hlavně §§ 1—11, 13—17, 19—22, 24—33.[5]) Pro integrální počet poslouží k témuž úkolu knížka Wittingova [10]. Pro náš program přicházejí v úvahu §§ 1—30; úlohy 131, 132, 136 se celkem vymykají z našeho programu. K diferenciálním rovnicím poskytuje dostatek úloh kniha Vojtěchova [8], část druhá. Našemu programu odpovídají na př. cvičení 1—12 na str. 286—287, cvičení 1—2 na str. 291, cvičení 1—2 (bez užití integračního faktoru) na str. 294, cvičení 1—3 na str. 296, cvičení 1—10 na str. 329, cvičení 1—2 na str. 333, cvičení 1—8 na str. 347.

Seznam literatury v článku citované.

[1] J. Horn, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Göschens Lehrbücherei sv. 10, 3. vydání, 1937.

[2] V. Jarník, Úvod do integrálního počtu, Kruh sv. 12, 1938.

[3] K. Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, Die Grundlehren der mathem. Wissenschaften in Einzeldarstellungen, sv. 2, buďto 1. vydání (1922) nebo 2. vydání (1924) nebo 3. vydání (1931).[6])

[4] M. Kössler, Úvod do počtu diferenciálního, Kruh sv. 4, 1926.

[5] O. Perron, Irrationalzahlen, Göschens Lehrbücherei sv. 1, buďto 1. vydání (1921) nebo 2. vydání (1939).

[6] K. Petr, Počet differenciální, Sborník JČMF sv. 16, 1923.

[7] K. Petr, Počet integrální, Sborník JČMF sv. 13, 2. vydání, 1931.

[8] J. Vojtěch, Základy matematiky ke studiu věd přírodních a technických.
Část I. Knihovna spisů matem. a fysik. sv. 2, 5. vydání, 1939.
Část II. Knihovna spisů matem. a fysik. sv. 7, 4. vydání, 1931.

[9] A. Witting, Repetitorium und Aufgabensammlung zur Differentialrechnung, Sammlung Göschen sv. 146, 1935.

[10] A. Witting, Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung, Sammlung Göschen sv. 147, 1934.

---

[4]) Že se derivace mnohočlenu $f(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k$ definuje též pro *komplexní* proměnnou z rovnicí $f'(z) = \sum_{k=1}^{n} k c_k z^{k-1}$ a jaký význam má tato derivace, jakož i vyšší derivace mnohočlenu $f(z)$ v algebře, na př. pro násobnost kořenů rovnice $f(z) = 0$, zná čtenář z algebry.

[5]) V úlohách 160—163 na str. 54 vynech „$= 0$".

[6]) Při spisování tohoto článku jsem neměl 3. vydání po ruce; pokud se však pamatuji, není ona část Knoppovy knihy, jež v našem článku přichází v úvahu, nijak podstatně změněna.