Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Eugen Bunickij

Poznámka k vzorci Euler-Maclaurinově

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 57 (1928), No. 2, 95--102

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121777

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1928

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

Poznámka k vzorci Euler-Maclaurinově.

Napsal *E. Bunicky.*

§ 1. Klademe si za úkol přirovnati formuli Eulerovu, která slouží, jak známo, k přibližnému výpočtu rozdílu mezi součtem

$$\sum_a^b f(x) = f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \ldots + \\ + f[a + (n-1)h] \quad (b = a + nh) \tag{1}$$

a integrálem

$$\frac{1}{h}\int_a^b f(x)\,dx,$$

k přímému rozvoji součtu (1) podle celých a kladných mocností h v případě, že $f(x)$ jest holomorfní funkcí v určitém oboru obsahujícím uzavřený interval $< a, b >$ (resp. v kruhu, jehož střed je bod a, a který obsahuje všechny body a, $a + h$, $a + 2h, \ldots, a + nh$, připustí-li se, že $f(x)$ je funkce komplexní proměnné).

§ 2. Uvažujme nejprve dvojnásobný součet[1])

$$\sum_{m=1}^{m=p}\sum_{r=1}^{r=m} B_r\, u_{r,m}, \tag{2}$$

kde p je dané celé kladné číslo, B_r jsou funkce indexu r, $u_{r,m}$ funkce dvou indexů, r a m. Píšeme-li dvojnásobný součet (2) v tvaru

$$\sum_{m=1}^{m=p}\sum_{r=1}^{r=m} B_r\, u_{r,m} = B_1 u_{11} + \\ + B_1 u_{12} + B_2 u_{22} + \\ + B_1 u_{13} + B_2 u_{23} + B_3 u_{33} + \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ + B_1 u_{1,p} + B_2 u_{2,p} + B_3 u_{3,p} + \ldots + B_{p-1} u_{p-1,p} + B_p u_{p,p} \tag{3}$$

---

[1]) Označíme-li druhý člen rovnice (1) zkráceně, jak se to dělá v počtu diferenčním, $\sum_a^b f(x) = \sum_a^{a+nh} f(x)$, můžeme psáti všude $\sum_{i=1}^{i=n} u_i$ ve smyslu $\sum_{i=1}^{i=n} u_i = u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + u_n$. Tedy na př. $\sum_{i=1}^{i=1} u_i = u_1$.

a sečteme-li druhý člen po sloupcích, obdržíme

$$\sum_{m=1}^{m=p}\sum_{r=1}^{r=m} B_r u_{r,m} = \sum_{r=1}^{r=p} B_r \sum_{m=r}^{m=p} u_{r,m}. \tag{4}$$

Může se státi, že existuje konečná limita

$$\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{r=1}^{r=m} B_r u_{r,m} = B_1 u_{11} + (B_1 u_{12} + B_2 u_{22}) + (B_1 u_{13} + B_2 u_{23} + B_3 u_{33}) + \dots$$

anebo, což jest ekvivalentní, že řada na pravé straně, jejíž členy jsou součty v závorkách, konverguje. V tom případě obdržíme, v souhlasu s identitou (4),

$$\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{r=1}^{r=m} B_r u_{r,m} = \lim_{p\to\infty} \sum_{r=1}^{r=p} B_r \sum_{m=r}^{m=p} u_{r,m}.$$

Ale ovšem, jak známo, není možno psáti obecně

$$\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{r=1}^{r=m} B_r u_{r,m} = \sum_{r=1}^{r=\infty} B_r \sum_{m=r}^{r=\infty} u_{r,m}, \tag{5}$$

kde se sčítá po sloupcích na pravé straně rovnice (3), prodloužené do nekonečna.

§ 3. Předpokládáme-li, že je možno rozvinouti funkci $f(x)$ v uzavřeném intervalu $< a, b >$ v řadu Taylorovu se zbytkem řádu ν (obsahujícím h^ν a ν-tou derivaci funkce $f(x)$), nalezneme

$$\sum_a^b f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{k=n-1}\Big[f(a) + khf'(a) + \frac{k^2h^2}{2!}f''(a) + \dots + \\ + \frac{k^{\nu-1}h^{\nu-1}}{(\nu-1)!}f^{(\nu-1)}(a) + (R_k)_\nu\Big], \tag{6}$$

při čemž, je-li ν dané celé kladné číslo, $(R_k)_\nu$ znamená zbytek řádu ν v rozvoji $f(a+kh)$. Píšeme-li rovnici (6) v tvaru

$$\sum_a^b f(x) = nf(a) + h\Big(\sum_{k=1}^{n-1} k\Big)f'(a) + \frac{h^2}{2!}\Big(\sum_{k=1}^{n-1} k^2\Big)f''(a) + \\ + \frac{h^3}{3!}\Big(\sum_{k=1}^{n-1} k^3\Big)f'''(a) + \dots + \frac{h^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\Big(\sum_{k=1}^{n-1} k^{\nu-1}\Big)f^{(\nu-1)}(a) + \sum_{k=1}^{n-1}(R_k)_\nu$$

a položíme-li

$$\sum_{k=1}^{k=n-1} k^m = s_m, \quad \sum_{k=1}^{k=n-1}(R_k)_\nu = R_\nu, \tag{7}$$

obdržíme

$$\sum_a^b f(x) = nf(a) + \sum_{m=1}^{m=\nu-1}\frac{s_m h^m}{m!}f^{(m)}(a) + R_\nu \tag{8}$$

anebo, násobíme-li h,

$$h \sum_a^b f(x) = nhf(a) + \sum_{m=1}^{m=\nu-1} \frac{s_m h^{m+1}}{m!} f^{(m)}(a) + hR_\nu. \qquad (9)$$

Vyjádřeme součty s_m funkcemi Bernoulliovými

$$\varphi_{m+1}(x) = \frac{x^{m+1}}{(m+1)!} + \sum_{r=1}^{r=m} \frac{A_r h^r x^{m+1-r}}{(m+1-r)!} \quad (m = 1, 2, \ldots), \quad (10)$$

ve tvaru homogením [2]) (bylo by možno psáti $\varphi_{m+1}(x, h)$ místo $\varphi_m(x)$), při čemž koeficienty A_i vyhovují rovnicím

$$A_1 = -\frac{1}{2}, \quad A_{2r+1} = 0, \quad A_{2r} = \frac{(-1)^{r-1} B_r}{(2r)!} \quad (r = 1, 2, \ldots),$$

kde B_r značí čísla Bernoulliova. Obdržíme tedy podle známého vzorce

$$s_m = \frac{m!\, \varphi_{m+1}(nh)}{h^{m+1}},$$

odkud plyne

$$\frac{s_m h^{m+1}}{m!} = \varphi_{m+1}(nh).$$

A tedy můžeme psáti rovnici (9) v tvaru

$$h \sum_a^b f(x) = nhf(a) + \sum_{m=}^{m=\nu-1} \varphi_{m+1}(nh) f^{(m)}(a) + hR_\nu. \qquad (11)$$

Je-li funkce $f(x)$ holomorfní v intervalu $< a, b >$ (nebo pro x komplexní v kruhu o středu a, obsahujícím všecky body $a + h$, $a + 2h, \ldots, a + nh$), platí $\lim_{\nu \to \infty} (R_k)_\nu = 0$, a, na základě rovnosti (7) $\lim_{\nu \to \infty} (hR_\nu) = 0$, odkud plyne nekonečný rozvoj

$$h \sum_a^b f(x) = nhf(a) + \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_{m+1}(nh) f^{(m)}(a). \qquad (12)$$

Položíme-li v rovnici (10) $x = nh$, obdržíme

$$\varphi_{m+1}(nh) = \frac{(nh)^{m+1}}{(m+1)!} + \sum_{r=1}^{r=m} \frac{A_r h^r (nh)^{m+1-r}}{(m+1-r)!}. \qquad (13)$$

Dosadíme-li tento výraz pro $\varphi_{m+1}(nh)$ do vzorce (12), dostaneme

$$h \sum_a^b f(x) = nhf(a) + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{(nh)^{m+1}}{(m+1)!} + \sum_{r=1}^{r=m} \frac{A_r h^r (nh)^{m+1-r}}{(m+1-r)!} \right] f^{(m)}(a). \quad (14)$$

Napíšeme-li pravou stranu explicitně ve tvaru schematu, obdobném pravé straně rovnice (3), nemůžeme všeobecně sčítati nejprve

[2]) A. Markoff, »Differenzenrechnung«, 1896, díl druhý, § 7, str. 114.

nekonečné sloupce a potom nekonečnou řadu součtů těchto sloupců, jak bylo naznačeno v § 2 (zde platí $B_1 = 1$, $B_2 = A_1 h$, $B_3 = A_2 h^2$, ..., $B_{m+1} = A_m h^m$). Učiníme-li však tuto záměnu pořadu sčítání, obecně nikoli přípustnou, obdržíme právě vzorec Euler-Maclaurinův. Neboť, oddělíme-li první nekonečný sloupec, dostaneme

$$h\sum_a^b f(x) = nhf(a) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(nh)^{m+1}}{(m+1)!} f^{(m)}(a) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{r=m} \frac{A_r h^r (nh)^{m+1-r}}{(m+1-r)!} f^{(m)}(a)$$

čili

$$h\sum_a^b f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(nh)^m}{m!} f^{(m-1)}(a) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{r=m} \frac{A_r h^r (nh)^{m+1-r}}{(m+1-r)!} f^{(m)}(a),$$
$$(f^{(0)}(a) = f(a)).$$

Stejně, sčítáme-li odděleně všecky ostatní sloupce, obdržíme

$$h\sum_a^b f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(nh)^m}{m!} f^{(m-1)}(a) + \sum_{r=1}^{\infty} A_r h^r \sum_{m=1}^{r=m} \frac{(nh)^{m+1-r}}{(m+1-r)!} f^{(m)}(a). \quad (15)$$

A poněvadž podle předpokladu je funkce $f(x)$ holomorfní, obdržíme

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a+nh} \left[f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots \right] dx =$$
$$= nhf(a) + \frac{nh^2}{2!} f'(a) + \ldots + \frac{(nh)^m}{m!} f^{(m-1)}(a) + \ldots$$

čili

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(nh)^m}{m!} \cdot f^{(m-1)}(a). \quad (16)$$

Dosadíme-li do součtu

$$\sum_{m=r}^{\infty} \frac{(nh)^{m+1-r}}{(m+1-r)!} \cdot f^{(m)}(a)$$

$m+1-r = i$, anebo $m = r-1+i$, obdržíme

$$\sum_{m=r}^{\infty} \frac{(nh)^{m+1-r}}{(m+1-r)!} \cdot f^{(m)}(a) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(nh)^i}{i!} f^{(r-1+i)}(a), \quad (17)$$

poněvadž má se sčítati od hodnoty výrazu $m+1-r$ pro $m = r$, to jest od $i = 1$. Avšak pro funkci holomorfní $f(x)$ platí

$$f^{(r-1)}(b) = f^{(r-1)}(a + nh) = f^{(r-1)}(a) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(nh)^i}{i!} f^{(r-1+i)}(a)$$
$$(r = 1, 2, \ldots; f^{(0)}(a) = f(a)),$$

odkud plyne

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(nh)^i}{i!} . f^{(r-1+i)}(a) = f^{(r-1)}(b) - f^{(r-1)}(a) \quad (r = 1, 2, \ldots)$$

anebo, podle identity (17),

$$\sum_{m=r}^{\infty} \frac{(nh)^{m+1-r}}{(m+1-r)!} . f^{(m)}(a) = f^{(r-1)}(b) - f^{(r-1)}(a) \quad (r = 1, 2, \ldots). \tag{18}$$

Vzhledem ke vztahům (16) a (18) rovnice (15) nabude tvaru

$$h \sum_a^b f(x) = \int_a^b f(x)\, dx + \sum_{r=1}^{\infty} A_r h^r \left[f^{(r-1)}(b) - f^{(r-1)}(a)\right]$$

anebo, dělíme-li h,

$$\sum_a^b f(x) = \frac{1}{h} \int_a^b f(x)\, dx + A_1 [f(b) - f(a)] + A_2 h [f'(b) - f'(a)] +$$
$$+ \ldots + A_r h^{r-1} . [f^{(r-1)}(b) - f^{(r-1)}(a)] + \ldots \tag{19}$$

To jest právě vzorec Euler-Maclaurinův, psaný ve tvaru nekonečné řady.[3])

§ 4. Je známo, že nekonečná řada Eulerova (17) je nejčastěji divergentní, i pro holomorfní funkci $f(x)$. Přes to řada (12) (nebo (14)) konverguje pro každou holomorfní funkci $f(x)$, stejně jako řada ekvivalentní

$$\sum_a^b f(x) = nf(a) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi_{m+1}(nh)}{h} f^{(m)}(a). \tag{20}$$

Jménem funkcí Bernoulliových se nejčastěji označují funkce $\Phi_{m+1}(x)$, definované vzorci (10), když tam dosadíme $h = 1$. Hledíme-li ke vztahu

$$\varphi_{m+1}(nh) = h^{m+1} \Phi_{m+1}(n),$$

můžeme psáti rozvoj (20) v tvaru

$$\sum_a^b f(x) = nf(a) + \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_{m+1}(n) h^m f^{(m)}(a). \tag{21}$$

---

[3]) Dosadíme-li hodnoty koeficientů A_i, obdržíme vzorec Eulerův v obvyklém tvaru

$$\sum_a^b f(x) = \frac{1}{h} \int_a^b f(x)\, dx - \tfrac{1}{2} [f(b) - f(a)] +$$
$$+ \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1} B_r}{(2r)!} h^{2r-1} [f^{(2r-1)}(b) - f^{(2r-1)}(a)].$$

I vidíme, že Eulerova řada vznikne z řady (14), která konverguje pro holomorfní funkci $f(x)$, seskupením výrazů, obecně nikoli přípustným. Je zajímavé, že Eulerova řada není řadou mocninnou, neboť koeficienty

$$A_r [f^{(r-1)}(b) - f^{(r-1)}(a)] = A_r [f^{(r-1)}(a+nh) - f^{(r-1)}(a)]$$

při mocninách h^{r-1} v rozvoji (19) jsou ve skutečnosti funkcemi h.

Vraťme se k rozvoji (11) a nahraďme tam činitele $\varphi_{m+1}(nh)$ hodnotami, vzatými z rovnice (13). Dostaneme

$$h\sum_a^b f(x) = nhf(a) + \sum_{m=1}^{m=\nu-1}\left[\frac{(nh)^{m+1}}{(m+1)!} + \right.$$
$$\left. + \sum_{r=1}^{r=m}\frac{A_r h^r (nh)^{m+1-r}}{(m+1-r)!}\right] f^{(m)}(a) + hR_\nu$$

čili

$$h\sum_a^b f(x) = \sum_{i=1}^{i=\nu}\frac{(nh)^i}{i!}f^{(i-1)}(a) + \sum_{m=1}^{m=\nu-1}\sum_{r=1}^{r=m}\frac{A_r h^r (nh)^{m+1-r}}{(m+1-r)!}f^{(m)}(a) + hR_\nu.$$

Transformujeme-li dvojnásobný součet na pravé straně podle identity (4) a položíme-li znova $m+1-r=i$, obdržíme

$$h\sum_a^b f(x) = \sum_{i=1}^{i=\nu}\frac{(nh)^i}{i!}f^{(i-1)}(a) +$$
$$+ \sum_{r=1}^{r=\nu-1} A_r h^r \sum_{i=1}^{i=\nu-r}\frac{(nh)^i}{i!} . f^{(r-1+i)}(a) + hR_\nu.$$

Vyloučíme-li na pravé straně součty

$$\sum_{i=1}^{i=\nu}\frac{(nh)^i}{i!}f^{(i-1)}(a) \quad \text{a} \quad \sum_{i=1}^{i=\nu-r}\frac{(nh)^i}{i!}f^{(r-1+i)}(a)$$

pomocí rozvojů

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{i=\nu}\frac{(nh)^i}{i!}f^{(i-1)}(a) + (\varrho_1)_\nu$$

a

$$f^{(r-1)}(b) = f^{(r-1)}(a) + \sum_{i=1}^{i=\nu-r}\frac{(nh)^i}{i!}f^{(r-1+i)}(a) + (\varrho_{r+1})_{\nu-1}$$
$$(r=1, 2, \ldots, \nu-1;\, f^{(0)}(a)=f(a))$$

vzorcem Taylorovým, kde všecky zbytky $(\varrho_1)_\nu$ a $(\varrho_r)_\nu$ následují za výrazy obsahujícími $f^{(\nu-1)}(a)$, obdržíme

$$h\sum_a^b f(x) = \int_a^b f(x)\,dx + \sum_{r=1}^{r=\nu-1} A_r h^r [f^{(r-1)}(b) - f^{(r-1)}(a)] +$$
$$+ \{hR_\nu - (\varrho_1)_\nu - \sum_{i=1}^{i=\nu-1} A_i h^i (\varrho_{i+1})_\nu\}.$$

Je tedy podmínka nutná a dostačující pro to, aby Eulerova řada konvergovala a určovala součet $\sum_a^b f(x)$,*) vyjádřena rovnicí

$$\lim_{\nu\to\infty} \left[hR_\nu - (\varrho_1)_\nu - \sum_{i=1}^{i=\nu-1} A_i h^i (\varrho_{i+1})_\nu\right] = 0.$$

V případě, že funkce $f(x)$ jest holomorfní, platí $\lim_{\nu\to\infty} R_\nu = 0$ a táž podmínka se nahradí výrazem

$$\lim_{\nu\to\infty} \left[(\varrho_1)_\nu + \sum_{i=1}^{i=\nu-1} A_i h^i (\varrho_{i+1})_\nu\right] = 0.$$

Remarque sur la formule d'Euler-Maclaurin.

(Extrait de l'article précédent.)

onsidérons la somme bien connue

$$\sum_a^b f(x) = f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \ldots + f[a+(n-1)h] \quad (b = a+nh)$$

qui figure dans la formule d'Euler-Maclaurin, la fonction $f(x)$ ayant par hypothèse des dérivées successives d'un ordre arbitraire. Le développement de cette somme par la série de Taylor peut être mis dans la forme

$$\sum^b f(x) = nf(a) + \sum_{m=}^{m=\nu-1} \Phi_{m+1}(n)\, h^m f^{(m)}(a) + R_\nu, \tag{I}$$

ù $\Phi_{m+1}(n)$ désignent les fonctions de Bernoulli, ν étant un entier ositif arbitraire et R_ν le reste correspondant.

On en déduit le développement infini

$$\sum_a^b f(x) = nf(a) + \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_{m+1}(n)\, h^m f^{(m)}(a) \tag{II}$$

qui est vrai pour chaque fonction holomorphe [formule (21) du texte]. En tenant compte des formules connues

$$\Phi_{m+1}(x) = \frac{x^{m+1}}{(m+1)!} + \sum_{r=1}^{r=m} \frac{A_r x^{m+1-r}}{(m+1-r)!} \quad (m = 1, 2, \ldots),$$

$$A_1 = - \qquad A_{2r+1} = 0, \quad A_{2r} = \frac{(-1)^{r-1}}{(2r)!} . B_r \quad (r = 1, 2, \ldots)$$

*) Tak jest rozuměti i konvergenci řady (12), (20) a (21).

(B_r désignent les nombres de Bernoulli) et en multipliant l'équation (II) par h, il vient

$$h\sum_a^b f(x) = nhf(a) +$$

$$\frac{(nh)^2}{2\,!}f'(a)+A_1h\,.\,nh\,.f'(a)+$$

$$\frac{(nh)^3}{3\,!}f''(a)+A_1h\,.\frac{(nh)^2}{2\,!}f''(a)+A_2h^2\,.\,nh\,.f''(a)+$$

$$\frac{(nh)^4}{4\,!}f'''(a)+A_1h\,.\frac{(nh)^3}{3\,!}f'''(a)+A_2h^2\,.\frac{(nh)^2}{2\,!}f'''(a)+$$

$$+A_3h^3\,.\,nh\,.f'''(a)+$$

. . . .

En sommant dans le second membre par les colonnes infinies (ce qui en général, n'est pas permis), on trouve successivement pour ces sommes partielles

$$\int_a^b f(x)\,dx, f(b)-f(a), f'(b)-f'(a), f''(b)-f''(a), \ldots, f^{(\nu-2)}(b)-f^{(\nu-2)}(a), \ldots \quad \text{(III)}$$

et, en divisant par h, on obtient la formule d'Euler-Maclaurin (formule (19) du texte) : elle provient du développement holomorphe (II) par un groupement de termes, en général non permis.

En revenant à la formule (I), on obtient sans peine le reste de la formule d'Euler-Maclaurin sous la forme d'une combinaison linéaire du reste R_ν et des restes correspondants $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_\nu$ dans les développements des quantités (III) en séries de Taylor, en finissant toujours par les termes qui contiennent $f^{(\nu-1)}(a)$.