Jaroslav Jarušek

Poznámka k rozvoji funkce arcsin x

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 64 (1935), No. 2, D7--D8

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121759

Proto tato vzpomínka k jeho šedesátce chce mu říci dík za jeho dosavadní činnost, za jeho nezištnou a obětavou snahu a práci vykonanou pro naši fysiku a přáti mu hojně zdaru a svěžesti k další jeho práci.

Poznámka k rozvoji funkce arc sin x.

Dr. *Jaroslav Jarušek*, Kralupy n. Vlt.

Na sjezdu matematiků zemí slovanských v Praze (25. září 1934) odvodil K. Carda nerovnost $3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$. Užíval při tom Taylorovy řady pro arc sin x pro $x = \frac{1}{2}$ a nahrazoval tuto řadu řadou geometrickou se členy jednak většími, jednak menšími.

Provedu podobným způsobem obecnější úvahu. V rozvoji

$$\arcsin x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \ldots, \qquad 0 < x < 1, \quad (1)$$

jest obecný člen

$$u_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n + 1}.$$

Poměr sousedních členů je

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n + 1)^2}{(2n + 2)(2n + 3)} x^2.$$

Zlomek při x^2 je menší než 1 a pro $n = \infty$ má limitu 1. Jest tedy

$$u_{n+1} < u_n x^2, \qquad u_{n+2} < u_n x^4, \quad \ldots$$

$$\arcsin x < u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} + u_n (1 + x^2 + x^4 + \ldots)$$

čili

$$\arcsin x < u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} + \frac{u_n}{1 - x^2}. \qquad (2)$$

Zlomek

$$\alpha = \frac{(2n + 1)^2}{(2n + 2)(2n + 3)} = \frac{4n^2 + 4n + 1}{4n^2 + 10n + 6}$$

s rostoucím n roste. Jest totiž jeho derivace

$$\frac{d\alpha}{dn} = \frac{(8n + 4)(4n^2 + 10n + 6) - (8n + 10)(4n^2 + 4n + 1)}{(4n^2 + 10n + 6)^2} =$$

$$= \frac{2(2n + 1)(6n + 7)}{(2n + 2)^2 (2n + 3)^2}$$

kladná pro každé kladné n. Můžeme tedy psáti

$$u_{n+1} = \alpha u_n x^2,$$
$$u_{n+2} > \alpha u_{n+1} x^2 \text{ čili } u_{n+2} > \alpha^2 u_n x^4,$$
$$u_{n+3} > \alpha u_{n+2} x^2 > \alpha^3 u_n x^6,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

a

$$\arcsin x > u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n (1 + \alpha x^2 + \alpha^2 x^4 + \dots)$$

čili

$$\arcsin x > u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + \frac{u_n}{1 - \alpha x^2}. \tag{3}$$

Spojením vztahů (2) a (3) dostaneme

$$\arcsin x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2)} \cdot \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \cdot \frac{1}{1 - \Theta x^2}, \tag{4}$$

$$\alpha < \Theta < 1, \quad \alpha = \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)}.$$

Tento výsledek platí pro $|x| < 1$.

Na př. pro $n = 1$ je

$$\arcsin x = x + \tfrac{1}{6} x^3 \cdot \frac{1}{1 - \Theta x^2}, \quad \tfrac{9}{20} < \Theta < 1.$$

Odtud pro $x = \frac{1}{2}$ dostaneme $\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{4 - \Theta}$ čili

$\pi = 3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4 - \Theta}$ a tedy $\pi < 3\frac{1}{6}$, $\pi > 3\frac{10}{71}$.

Pro $n = 3$ a $x = \frac{1}{2}$ je $\frac{1}{6}\pi < \frac{1}{2} + \frac{1}{48} + \frac{3}{40} \cdot \frac{1}{32} + \frac{5}{84.128}$ čili $\pi < 3 + \frac{1}{8} + \frac{9}{640} + \frac{5}{14.128}$. Tím spíše pak je $\pi < 3 + \frac{1}{8} + \frac{9}{630} + \frac{5}{14.100}$ čili $\pi < 3 + \frac{1}{8} + \frac{1}{70} + \frac{1}{280}$ neb $\pi < 3\frac{1}{7}$.
