Bohuslav Hostinský

O uzavřených konvexních křivkách. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 49 (1920), No. 1, 38--45

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121749

O uzavřených konvexních křivkách.

Napsal **Bohuslav Hostinský**.

1. Nauka o konvexních křivkách a plochách byla v posledních létech předmětem četných prací. Pozoruhodné podněty ke studiu tohoto oboru geometrie dal zejména *H. Brunn*[1]), jenž odvodil elementárními úvahami základní věty o uzavřených konvexních křivkách a plochách. *H. Minkovski*[2]) vytvořil obecnou nauku o konvexních tělesech a obohatil ji novými resultáty. *A. Hurwitz*[3]) zavedl užívání trigonometrických řad, které se tu osvědčily jakožto důležitá pomůcka.

V této práci neužívám Minkovského nejobecnější definice konvexních křivek, která v sobě zahrnuje také útvary neanalytické (křivky bez tečny a p.); budu předpokládati, že uvažované křivky jsou analytické a budu sledovati průběh křivosti. Upozorňuji zejména na to, že t. zv. věta o čtyřech vrcholech konvexní křivky (viz odst. **8.**) plyne bezprostředně z jedné známé Sturmovy věty o nullových bodech trigonometrických výrazů a že zajímavé transformace plošných integrálů, Minkovským objevené, dají se pro rotační tělesa velmi snadno odvoditi (odst. **12.**).

2. Budiž

$$x \sin \alpha - y \cos \alpha = p$$

rovnice orientované přímky P t. j. přímky, na níž jest vytčen určitý smysl úhlem α ($0 \leq \alpha < 360^0$), který svírá přímka s osou Ox. Vzdálenost p přímky od počátku souřadnic považujeme za kladnou, určuje-li její smysl kladnou rotaci (proti ručičkám hodinovým) kolem počátku, a zápornou v případě opačném.

Předpokládejme, že p jest tečnou určité křivky K; α bude pak tečnovým úhlem a $p = f(\alpha)$ funkcí úhlu α. Křivka K jest orientována, poněvadž každé její tečně přísluší určitý smysl a jest, jakožto obálka svých tečen dokonale určena, dáno-li p

---

[1]) *H. Brunn*: Über Ovale und Eiflächen (Inaugur. Dissertation, München, 1887).

[2]) *H. Minkovski*: Ges. Abhandlungen II.

[3]) *A. Hurwitz*: Sur quelques apllications géométriques des séries de Fourier. (Annales scientifiques de l' Ecole Normale Supérieure, 3e série t. 19, 1902).

jakožto funkce úhlu α. Souřadnice x a y bodu dotyku vyhovují rovnicím

$$x \sin\alpha - y\cos\alpha = f(\alpha), \quad x\cos\alpha + y\sin\alpha = f'(\alpha),$$

kde f' značí derivaci funkce f. Z těchto rovnic vypočteme x a y jakožto funkce úhlu α:

$$x = f.\sin\alpha + f'.\cos\alpha, \quad y = -f.\cos\alpha + f'.\sin\alpha$$

a dále

$$dx = (f + f'')\cos\alpha\, d\alpha, \quad dy = (f + f'')\sin\alpha\, d\alpha,$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = (f + f'')\, d\alpha.$$

Poslední rovnicí jest určen oblouk s i co do znamení. Je-li $f + f'' > o$, přibývá oblouku s s rostoucím α. Poloměr křivosti $R = ds/d\alpha$ jest určen rovněž co do znamení rovnicí

$$R = f + f''.$$

3. Otočme křivku K, vyjádřenou ve smyslu odst. 2. rovnicí $p = f(\alpha)$, kolem počátku souřadnic o úhel α_0. Obdržíme tak novou křivku K_1, která jest vyjádřena rovnicí $p = f(\alpha - \alpha_0)$.

Applikujme na křivku K translaci definovanou rovnicemi

$$x' = x + A, \quad y' = y + B,$$

kde x, y značí souřadnice bodu v původní poloze, x', y' pak souřadnice bodu odvozeného. Křivka K' odvozená translací z K má tečnu

$$(x' - A)\sin\alpha - (y' - B)\cos\alpha = f(\alpha)$$

aneb

$$x'\sin\alpha - y'\cos\alpha = f(\alpha) + A\sin\alpha - B\cos\alpha,$$

jest tedy určena rovnicí $p = f(\alpha) + A \sin\alpha - B \cos\alpha$.

Z toho plyne: rozvineme-li funkci $p = f(\alpha)$, příslušnou křivce K, ve Fourierovu řadu

$$f(\alpha) = a_0 + \sum_1^\infty (a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha),$$

nezávisí ani koefficient a_1 ani b_1 na tvaru a velikosti křivky, neboť vhodnou translací můžeme přejíti ke křivce takové, že příslušná Fourierova řada pro veličinu p neobsahuje členů s *cos* α a *sin* α. Tyto členy rovněž odpadají v obecném vzorci pro poloměr křivosti, poněvadž

$$f''(\alpha) = -\sum_1^\infty n^2 (a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha),$$

a tedy, vzhledem k poslednímu vzorci odst. 2.

$$R = a_0 + \sum_2^{\infty} (1 - n^2)(a_n \cos n\,\alpha + b_n \sin n\,\alpha).$$

4. Sledujme nyní průběh poloměru křivosti v okolí bodu, kde má křivka jedinou určitou tečnu. Pro jednoduchost volme uvažovaný bod za počátek souřadnic a tečnu v něm za osu Ox. V okolí toho bodu jest

$$y = a\,x^m + \ldots, \quad m > 1,$$

vynecháme-li členy vyšších stupňů. Ze známých formulí odvodíme

$$R = \frac{x^{2-m}}{a\,m\,(m-1)} + \ldots, \quad \alpha = \operatorname{arc} tg \frac{dy}{dx} = a\,m\,x^{m-1} + \ldots .$$

Jest tedy

$$y = a\,x^m + \ldots, \quad R = C \,.\, \alpha^{\mu} + \ldots, \quad C \neq 0,$$

kde

$$m = \frac{\mu + 2}{\mu + 1}, \quad \mu = \frac{2 - m}{m - 1}.$$

Přihlédněme k těmto čtyřem případům:

a) m je celé číslo sudé; μ jest záporně vzatý zlomek s lichým jmenovatelem $m - 1$ a čitatelem o jednu menším. Křivka má v O styk $(m - 1)$-tého stupně s tečnou. Pouze pro $m = 2$, $\mu = o$ (obyčejný bod) jest poloměr křivosti konečný; jinak jest poloměr křivosti nekonečně veliký.

b) m je celé číslo liché (větší než 1); μ jest záporně vzatý zlomek se sudým jmenovatelem $m - 1$ a čitatelem o jednu menším. Křivka má v O inflexi; styk s tečnou jest stupně $m - 1$.

c) μ je celé číslo sudé. Pro $\mu = o$ jest $m = 2$ (obyčejný bod). Pro $\mu = 2$ jest $m = \frac{4}{3}$ atd. Poloměr křivosti v O jest obecně roven nulle.

d) μ je celé číslo liché. Pro $\mu = 1$ jest $\mu = \frac{3}{2}$ (bod vratu). Pro $\mu = 3$ jest $m = \frac{5}{4}$ atd. Obecně: bod vratu s poloměrem křivosti rovným nulle.

Poznamenejme, že v případech a) a c) zůstává křivka v okolí bodu O po téže straně jeho tečny; v O není ani inflexe ani bod vratu.

5. Křivka jest u z a v ř e n á, jsou-li x a y periodickými funkcemi úhlu α. Vzorce, jež vyjadřují x a y funkcí f a její

derivací (viz odst. 2.), ukazují, že ten případ nastane, je-li f funkce periodická s periodou, která je v racionálním poměru se 2π. Poněvadž však ony vzorce obsahují *sin* α a *cos* α, musí úhel α proběhnouti intervall $0 \ldots 2\pi$ aneb jeho celistvý násobek, aby se křivka uzavřela.

Budeme se zabývati zvláštním druhem uzavřených křivek, které odpovídají případu, že funkce $f(\alpha)$ má periodu 2π. Tečnový úhel roste spojitě podél takové křivky, jež se uzavře, otočí-li se tečna o plný úhel. Uveďme dva příklady. Rovnice

$$f(\alpha) = a_0 + a_1 \cos\alpha + b_1 \sin\alpha$$

odpovídá kružnici:

$$x = b_1 + a_0 \sin\alpha, \quad y = -a_1 - a_0 \cos\alpha.$$

Středem kružnice jest bod $(b_1, -a_1)$, poloměr rovná se a_0. Je-li $f + f'' = a_0 > 0$, jest rostoucím α určen kladný oběh po kružnici, je-li $a_0 < 0$, jest rostoucím α určen záporný oběh. Druhý příklad: Křivka určená rovnicí

$$f(\alpha) = a_0 + \sin 2\alpha$$

má obecně čtyři body vratu, poněvadž rovnice $R = 0$ nebo

$$a_0 - 3 \sin 2\alpha = 0$$

má čtyři jednoduché kořeny (viz odst. 4d.) Kořeny jsou reální jen v tom případě, že $|a_0| < 3$. Mimo to má křivka dva dvojné body; přímka $y = -x$ jest její osou souměrnosti.

6. Vyjděme z rovnice $p = f(\alpha)$, která definuje křivku K: Zvětšíme-li funkci $f(\alpha)$ o konstantu C, obdržíme novou křivku, která je ku K parallelní t. j. má s ní společné normály. To se dokáže nejjednodušeji z rovnice normály ku křivce K:

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha = f'(\alpha);$$

tato rovnice se nemění, zvětší-li se $f(\alpha)$ o konstantu C.

Je-li R poloměr křivosti původní křivky, jest $R + C$ poloměr křivosti křivky parallelní. Dostáváme vlastně vždy jen jednu větev parallelní křivky, máme-li na mysli obyčejnou definici: křivka parallelní ku K jest obálka kružnic, jež mají konstantní poloměr C a středy na K. Druhou větev parallelní křivky odvodíme zmenšíce funkci $f(\alpha)$ o C. To lze sledovati v obou příkladech uvedených v předešlém odstavci: Je-li

$$p = f(\alpha) = a_0 + a_1 \cos\alpha + b_1 \sin\alpha, \quad a_0 > 0,$$

zvětšuje se poloměr kružnice (kladně probíhané při rostoucím α), zvětšuje-li se a_0. Je-li $a_0 = 0$, obdržíme kružnici o poloměru $= 0$, je-li $a_0 < 0$, kružnici záporně probíhanou.

Druhý příklad: Sledujme, jak se mění křivka

$$f(\alpha) = a_0 + \sin 2\alpha,$$

mění-li se a_0. Poněvadž $R = a_0 - 3 \sin 2\alpha$, jest R stále kladné, je-li $a_0 > 3$. Křivka jest konvexní; s rostoucím α probíhá se křivka kladně. Je-li $a_0 = 3$ anulluje se poloměr křivosti ve čtyřech bodech určených rovnicí $1 - \sin 2\alpha = 0$. Poněvadž však tyto nullové body jsou druhého řádu ($\mu = 2$; viz odst. 4.c), zůstává v nich křivka po téže straně tečny a je stále konvexní. Pro $-3 < a_0 < 3$ vyskytují se čtyři body vratu a dva dvojné body. Pro $a_0 \leqq -3$ jest R stále záporné; křivka je zase konvexní, avšak s rostoucím α probíhá se záporně. Pozorujeme-li podrobně na příslušných obrazcích závislost tvaru křivky na hodnotě konstanty a_0, přesvědčíme se snadno o platnosti těchto obecných pravidel:

a) Body, v nichž poloměr křivosti má, jakožto funkce tečnového úhlu α, nullový bod 2. řádu ($\mu = 2$), vznikají splynutím dvou bodů vratu a jednoho bodu dvojného; obdobně vzniká bod, v němž má křivka s tečnou dotyk 3. stupně ($m = 4$; viz odst. 4.a) splynutím dvou inflexí ($m = 3$) a jedné dvojné tečny.

b) Ke křivce K dané rovnicí $p = f(\alpha)$ odvodíme křivku shodnou, avšak s tečnami opačně orientovanými takto: Budiž

$$f(\alpha) = a_0 + \sum_1^\infty (a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha)$$

a $M(x, y)$ bod křivky K příslušný úhlu α. Z rovnic, jež vyjadřují x a y jakožto funkce úhlu α a jež jsou uvedeny v odstavci 2., vyplývá: $p = -f(\alpha)$ jest rovnice křivky K_1, která jest středově souměrná ku K vzhledem k počátku souřadnic; bodu M odpovídá bod $M_1(-x, -y)$ na K_1 a tečnový úhel v M_1 má hodnotu α. Otočme nyní křivku K_1 o 180^0 kolem počátku v kladném smyslu. Dostaneme novou křivku K_2, totožnou s K; abychom odvodili rovnici křivky K_2, jest nahraditi v rovnici křivky K_1:

$$p = -a_0 - \sum_1^\infty (a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha)$$

úhel α úhlem $\alpha + \pi$, Poněvadž

$$\cos n(\alpha + \pi) = (-1)^n \cos n\alpha, \ \sin n(\alpha + \pi) = (-1)^n \sin n\alpha,$$

jest

$$p = -a_0 + \sum_1^\infty (-1)^{n+1} (a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha)$$

rovnicí křivky K_2. Uvažme, že přechodem od K ku K_1 nezměnila se orientace tečny příslušné úhlu α, a že se pak při přechodu od K_1 ku K_2 každá tečna otočila o 180^0. Z toho následuje, že K_2 jest křivka totožná s křivkou K, avšak opačně orientovaná, což znamená: odpovídá-li na K bod $M(x, y)$ úhlu α, odpovídá na K_2 týž bod úhlu $\alpha + \pi$. Poloměry křivosti obou křivek v M liší se znamením.

Přechod z rovnice $p = f(\alpha)$ dané křivky ke křivce s tečnami opačně orientovanými provede se tudíž tím, že ve Fourierově řadě pro $f(\alpha)$ změníme znamení koefficientu a_0 jakož i všech koefficientů a_n a b_n se sudými indexy.

7. Uzavřená konvexní křivka má s každou svou tečnou toliko bod dotyku společný a leží tedy celá po jedné její straně. Předpokládejme, že počátek souřadnic leží uvnitř dané uzavřené konvexní křivky a že směr daný rostoucím úhlem α určuje na ní kladný oběh. Pak jest

$$R = f + f'' \geq 0$$

ve všech bodech křivky. Funkce $f(\alpha)$ má periodu 2π.

Kdybychom změnili orientaci každé tečny, bylo by $R \leq 0$; z tohoto případu přešli bychom k $R \geq 0$ způsobem vyloženým na konci předešlého odstavce.

Omezíme se jen na analytické křivky, jichž tečna se spojitě mění, a připustíme tyto singularity:

a) R jakožto funkce tečnového úhlu α má nullový bod sudého řádu (viz odst. 4).

b) Poloměr R křivosti jest nekonečně veliký, ale tak, že křivka má s tečnou dotyk lichého stupně (viz odst. 4*a*).

Dána-li funkce $f(\alpha) = p$ Fourierovou řadou

$$f(\alpha) = a_0 + \sum_1^\infty (a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha),$$

vypočteme snadno obvod L křivky

$$L = \int_0^{2\pi} \frac{ds}{d\alpha}\, d\alpha = \int_0^{2\pi} (f + f'')\, d\alpha.$$

Poněvadž pak

$$R = f + f'', \quad \int_0^{2\pi} f''\, d\alpha = f'(2\pi) - f'(0) = 0,$$

vychází

$$L = \int_0^{2\pi} R\, d\alpha = \int_0^{2\pi} p\, d\alpha = 2\pi \,.\, a_0.$$

Koefficient a_5 rovná se dle toho poloměru kružnice, která má s danou křivou stejný obvod. Pišme poslední vzorce ve tvaru

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R\, d\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p\, d\alpha.$$

Z toho vyplývá: Střední hodnota poloměru křivosti uzavřené konvexní křivky rovná se střední hodnotě vzdálenosti tečny od počátku souřadnic; při tom jest považovati tečnový úhel α za nezávisle proměnnou.

8. Dva body uzavřené konvexní křivky, v nichž má poloměr R křivosti maximum (n. minimum), jsou vždy odděleny bodem, v němž má R minimum (resp. maximum). Obíháme-li křivku v určitém smyslu, střídají se maxima s minimy, takže na celém obvodě jest právě tolik maxim co minim. Body, v nichž má R maximum neb minimum, nazveme vrcholy křivky. Není možno, aby na celém obvodě bylo jen jedno maximum a jedno minimum; lze dokázati, že každá uzavřená konvexní křivka má aspoň čtyři vrcholy [4]) (věta o čtyřech vrcholech).

K důkazu užijeme pomocné věty: Mezi dvěma vrcholy funkce leží aspoň jeden vrchol její derivace; vrcholem funkce rozumíme hodnotu nezávisle proměnné, pro kterou má funkce

[4]) Tuto větu dokázal poprvé *A. Kneser* (Heinrich Weber-Festschrift, Leipzig-Berlin, 1912). Srv. *W. Blaschke:* Kreis und Kugel, Leipzig, 1916, p. 160, kde jest udána další literatura; tato kniha orientuje dobře o rozmanitých problémech vztahujících se ke konvexním tělesům.

maximum nebo minimum. Derivace funkce periodické má tedy uvnitř jedné periody celkem aspoň tolik vrcholů, kolik jich má funkce sama.

Dle odst. 3. a 7. jest poloměr křivosti dané uzavřené konvexní křivky vyjádřen formulí

$$R = a_0 + \sum_2^{\infty} (A_n \cos n\alpha + B_n \sin n\alpha);$$

a_0 značí poloměr kružnice, jejíž obvod rovná se obvodu dané křivky. Budiž r kladné celé číslo dělitelné čtyřmi a položme

$$F(\alpha) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^r} (A_n \cos n\alpha + B_n \sin n\alpha).$$

Je-li r dosti veliké, převládá v této řadě první dvojčlen ($n = 2$); píšeme-li

$$2^r . F(\alpha) = A_2 \cos 2\alpha + B_2 \sin 2\alpha + \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^r (A_n \cos n\alpha + B_n \sin n\alpha),$$

jest patrno, že uvnitř jedné periody ($0 \leq \alpha < 2\pi$) má $F(\alpha)$ právě tolik vrcholů, kolik jich má výraz

$$A_2 \cos 2\alpha + B_2 \sin 2\alpha.$$

Tento výraz má dvě maxima a dvě minima. Dle pomocné věty shora uvedené má tudíž funkce

$$\frac{d^r F(\alpha)}{d\alpha^r} = R - a_0$$

aspoň čtyři vrcholy uvnitř jedné periody. Totéž platí o poloměru R křivosti samém; tím jest věta o čtyřech vrcholech dokázána.

Poznamenejme výslovně, že nejsou vyloučena maxima nekonečně veliká v bodech, kde se stává R nekonečně velikým ve smyslu odst. 7*b*; příslušný důkaz prozatím vynechávám.

Kdyby $A_2 = B_2 = 0$, dokázali bychom uvedeným postupem, že má R aspoň tolik vrcholů, kolik jich má výraz $A_3 \cos 3\alpha + B_3 \sin 3\alpha$, totiž šest atd.[5]

(Dokončení.)

---

[5]) V tomto důkaze věty o čtyřech vrcholech, jenž se mi zdá býti zvlášť jednoduchý, užívám postupu, kterým Lord Rayleigh dokázal obecnější větu o nullových bodech funkcí Sturm-Liouvilleových. Viz *Rayleigh:* Theory of Sound. 2nd edition I. p. 219—220.