de l'expression

$$y = \frac{b_1}{4^1} \pm \frac{b_2}{4^2} \pm \frac{b_3}{4^3} \pm \cdots \pm \frac{b_k}{4^k} \pm \cdots,$$

où les nombres b_k sont choisis, par exemple, à l'aide du tableau suivant

a_k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b_k	0	1	$\overline{2}$	$\overline{1}$	0	1	$\overline{2}$	1	2	3

Le signe qui précède le terme b_{k+1} doit être contraire à celni qui précède b_k seulement dans les cas où $a_k = 2, 3, 6$ (dans ces cas, j'ai mis, dans le tableau, un trait horizontal sur le nombre b_k correspondant). En général, les b_k peuvent être choisis de la manière suivante: si deux a_k diffèrent d'une unité, il leur correspondent deux b_k qui diffèrent d'une unité; a_k étant tel que, s'il était plus grand d'une unité, le b_k correspondant serait plus petit d'une unité, il faut prendre, devant b_{k+1}, un signe contraire à ce qui figure devant b_k (dans tout autre cas, il faut prendre, devant b_{k+1} et devaut b_k, des signes égaux). Il est facile à généraliser ces résultats.

Příspěvky k theorii některých transcendent počtu integrálního.

Píše **M. Lerch.** *)

8.

Uvažujme integrály

$$A = \int_0^\infty \frac{\cos ux\,dx}{(v+x)^s}, \quad B = \int_0^\infty \frac{\sin ux\,dx}{(v+x)^s}; \tag{17'}$$

v integrálu

$$A + iB = \int_0^\infty \frac{e^{uix}\,dx}{(v+x)^s}$$

užijme vyjádření

$$\frac{\Gamma(s)}{(v+x)^s} = \int_0^\infty e^{-\xi(v+x)}\,\xi^{s-1}\,d\xi$$

*) Viz minulý ročník »Časopisu« str. 1., 166., 312.

a obraťme integrační pořad. Z výsledku

$$\Gamma(s)(A + iB) = \int_0^\infty e^{-v\xi} \frac{\xi^{s-1} d\xi}{\xi - iu}$$

pak plyne

$$A = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty e^{-v\xi} \frac{\xi^s d\xi}{u^2 + \xi^2}, \quad B = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty e^{-v\xi} \frac{u\xi^{s-1} d\xi}{u^2 + \xi^2}. \quad (17^2)$$

čímž oba integrály A, B jsou převedeny na tutéž transcendentu pro různé argumenty

$$M(s, \omega) = \int_0^\infty e^{-x} \frac{x^s dx}{\omega^2 + x^2}, \quad (17^*)$$

$$A = A(u, v) = \frac{M(s, uv)}{\Gamma(s) v^{s-1}}, \quad B = B(u, v) = \frac{uv M(s-1, uv)}{\Gamma(s) v^{s-1}}. \quad (17^3)$$

Pro veliká ω máme poloukonvergentní rozvoj

$$M(s, \omega) = \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu \frac{\Gamma(s + 2\nu + 1)}{\omega^{2\nu+2}} +$$

$$+ (-1)^n \int_0^\infty e^{-x} \frac{x^{s+2n} dx}{\omega^{2n}(\omega^2 + x^2)}.$$

Integrály A a B vyskytují se jako součinitelé ve Fourierově řadě pro funkci

$$R(v, s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(v + \nu)^s},$$

a sice jest při $0 < \xi < 1$

$$R(v + \xi, s) = A(0) + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} (A_\nu \cos 2\nu\xi\pi + B_\nu \sin 2\nu\xi\pi) \quad (18)$$

$$A_\nu = A(2\nu\pi, v), \qquad B_\nu = B(2\nu\pi, v).$$

Konvergence řady $R(v, s)$ ovšem vyžaduje Real. $s > 1$, kdežto konvergence integrálů A již nastává při Real. $s > 0$ jakmile $u > 0$. Překážka konvergence však tu vězí v okolnosti, že

$$R(v + \xi, s) - \frac{1}{s-1}$$

je celistvá transcendenta vůči s, takže R se stává nekonečnou na $s = 1$. Také integrál A_0 konverguje pouze za stejných podmínek; je však

$$A_0 = \frac{1}{(s-1)\,v^{s-1}},$$

a tedy

$$R(v+\xi, s) - \frac{1}{s-1} = \frac{v^{1-s}-1}{s-1} + 2\sum_1^\infty (A_\nu \cos 2\nu\xi\pi + B_\nu \sin 2\nu\xi\pi), \tag{18*}$$

i je tu možný limitní přechod pro $s = 1$.

Stejné methody, jakých bylo užito v citovaných výše pracích pro rozvinutí funkce $Q(s, \omega)$, vedou k cíli také u funkce M. Zde hodláme se omeziti na integrály A, B v případě $s = 1$, píšíce zvláště

$$A(\omega) = \int_0^\infty \frac{\cos x}{\omega + x}\,dx, \quad B(\omega) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{\omega + x}\,dx, \tag{19}$$

takže současně platí

$$A(\omega) = \int_0^\infty \frac{\cos \omega x}{1 + x}\,dx, \quad B(\omega) = \int_0^\infty \frac{\sin \omega x}{1 + x}\,dx, \tag{19'}$$

a dle (17²)

$$\left.\begin{aligned} A(\omega) &= \int_0^\infty e^{-x} \frac{x\,dx}{\omega^2 + x^2} = \int_0^\infty e^{-\omega x} \frac{x\,dx}{1 + x^2} \\ B(\omega) &= \int_0^\infty e^{-x} \frac{\omega\,dx}{\omega^2 + x^2} = \int_0^\infty e^{-\omega x} \frac{dx}{1 + x^2} \end{aligned}\right\} \tag{19²}$$

a semikonvergentní rozvoje

$$A(\omega) = \sum_{\nu=0,1,2\ldots} (-1)^\nu \frac{(2\nu+1)!}{\omega^{2\nu+2}}, \quad B(\omega) = \sum_{\nu=0,1,2\ldots} (-1)^\nu \frac{(2\nu)!}{\omega^{2\nu+1}}.$$

Podle (19') bude

$$A \cos \omega - B \sin \omega = \int_0^\infty \frac{\cos \omega(1+x)}{1+x}\,dx = \int_\omega^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx,$$

$$A \sin \omega + B \cos \omega = \int_0^\infty \frac{\sin \omega(1+x)}{1+x}\,dx = \int_\omega^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx;$$

definují-li se funkce $Ci(\omega)$ a $Si(\omega)$ rovnicemi (integrál sinusový a cosinusový)

$$Si(\omega)=\int_0^\omega \frac{\sin x}{x}\,dx,\quad Ci(\omega)=-\int_\omega^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx, \tag{20}$$

znějí předešlé rovnice

$$\left.\begin{aligned} A(\omega)\cos\omega - B(\omega)\sin\omega &= -Ci(\omega),\\ A(\omega)\sin\omega + B(\omega)\cos\omega &= \frac{\pi}{2} - Si(\omega), \end{aligned}\right\} \tag{20'}$$

z nichž význam funkcí A, B pro tyto transcendenty je zřejmý.

Pro funkci $Si(\omega)$ máme patrně

$$Si(\omega)=\sum_0^\infty (-1)^\nu \frac{\omega^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!\,(2\nu+1)}, \tag{β}$$

pro $Ci(\omega)$ nám vlastnost

$$D_\omega Ci(\omega)=\frac{\cos\omega}{\omega}$$

podá nejprvé — stačí se omeziti jako dosud na $\omega > 0$ —

$$Ci(\omega)=A+\log\omega+\sum_1^\infty (-1)^\nu \frac{\omega^{2\nu}}{(2\nu)!\,2\nu},$$

kde třeba blíže určiti stálou A. Za tím účelem užijme identity

$$\int_\omega^1 \cos x\,\frac{dx}{x}=\int_\omega^1 \frac{\cos x-1}{x}\,dx-\log\omega,$$

takže

$$\log\omega+\int_\omega^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx=\int_\omega^1 \frac{\cos x-1}{x}\,dx+\int_1^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx$$

má pro nekonečně malá ω limitu

$$\lim_{\omega=0}\left\{\log\omega-Ci(\omega)\right\}=-A=\int_0^1 \frac{\cos x-1}{x}+\int_1^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx,$$

a běží jen o součet těchto integrálů. K tomu dospějeme uvažujíce integrál

$$J_\sigma=\int_0^\infty \cos x\,.\,x^{\sigma-1}dx=\Gamma(\sigma)\cos\frac{\sigma\pi}{2}$$

pro nekonečně malá σ. Štěpením integrálu v $\int\limits_0^1$ a $\int\limits_1^\infty$ máme

$$J_\sigma = \int\limits_1^\infty \frac{\cos x}{x^{1-\sigma}}\,dx + \int\limits_0^1 \frac{\cos x - 1}{x^{1-\sigma}} + \frac{1}{\sigma},$$

tudíž

$$-A = \lim_{\sigma=0}\left(J_\sigma - \frac{1}{\sigma}\right) = \lim_{\sigma=0} \frac{\Gamma(1+\sigma)\cos\frac{\sigma\pi}{2} - 1}{\sigma} = \Gamma'(1),$$

takže $\qquad A = -\Gamma'(1) = E$

jest Eulerova konstanta 0·5772156649 . . .

$$\text{Tudíž} Ci(\omega) = \log\omega + E + \sum_1^\infty (-1)^\nu \frac{\omega^{2\nu}}{(2\nu)!\,2\nu}; \qquad (\gamma)$$

přes ustavičnou konvergenci se však řady (β) a (γ) k výpočtu hodí jen pro ω poměrně malá, jako všecky řady tohoto typu. Třeba se ohlédnouti po jiných rozvojích. Položme $\omega = uv$, a v prvních integrálech (19²) píšeme ux za x:

$$A(uv) = \int\limits_0^\infty e^{-ux} \frac{x\,dx}{v^2 + x^2}, \quad B(uv) = \int\limits_0^\infty e^{-ux} \frac{v\,dx}{v^2 + x^2}. \quad (19^3)$$

Definujme nyní polynomy $\mathfrak{a}_\nu$ rozvojem

$$\frac{1}{v^2 + \log^2(1+z)} = \sum_0^\infty \frac{\mathfrak{a}_\nu}{\nu!} z^\nu; \qquad (21)$$

bude $\qquad \dfrac{1}{v^2 + x^2} = \sum\limits_0^\infty \dfrac{\mathfrak{a}_\nu}{\nu!}\left(e^{-x} - 1\right)^\nu,$

a odtud nalezneme dle (19³)

$$B(uv) = v \sum_0^\infty \frac{\mathfrak{a}_\nu}{\nu!} \int\limits_0^\infty e^{-ux}\left(e^{-x} - 1\right)^\nu dx,$$

t. j. ježto

$$\int\limits_0^\infty e^{-ux}\left(e^{-x} - 1\right)^\nu dx = \Delta^\nu \frac{1}{u} = \frac{(-1)^\nu \nu!}{u(u+1)(u+2)\ldots(u+\nu)},$$

$$\frac{1}{v} B(uv) = \frac{\mathfrak{a}_0}{u} - \frac{\mathfrak{a}_1}{u(u+1)} + \frac{\mathfrak{a}_2}{u(u+1)(u+2)} -$$

$$- \frac{\mathfrak{a}_3}{u(u+1)(u+2)(u+3)} + \ldots \qquad (22^*)$$

Podle (19[3]) jest očividně

$$\frac{\partial B(uv)}{\partial u} = -v A(uv),$$

tedy podá (22[a]) derivováním vůči u

$$A(uv) = \frac{\mathfrak{a}_0}{u^2} + \frac{\mathfrak{a}_1}{1!} \Delta \frac{1}{u^2} + \frac{\mathfrak{a}_2}{2!} \Delta^2 \frac{1}{u^2} + \frac{\mathfrak{a}_3}{3!} \Delta^3 \frac{1}{u^2} + \ldots \qquad (22^b)$$

Pokud se týče součinitelů $\mathfrak{a}_\nu$, tu vychází z identity

$$\frac{1}{iv - \log(1+z)} - \frac{1}{-iv - \log(1+z)} = \frac{-2iv}{v^2 + \log^2(1+z)},$$

vyjádření

$$\mathfrak{a}_n = \frac{C_n(-iv) - C_n(iv)}{2iv},$$

tedy dle obecných vzorců pro $C_n(a)$:

$$\mathfrak{a}_0 = \frac{1}{v^2}, \ \mathfrak{a}_1 = 0, \ \mathfrak{a}_2 = -\frac{2}{v^4}, \ \mathfrak{a}_3 = \frac{6}{v^4}, \ \mathfrak{a}_4 = \frac{24}{v^6} - \frac{22}{v^4},$$

$$\mathfrak{a}_5 = -\frac{240}{v^6} + \frac{100}{v^4}, \ \mathfrak{a}_6 = -\frac{720}{v^8} + \frac{2040}{v^6} - \frac{548}{v^4}, \ldots$$

Funkce (21) má singární body $z = -1$ a $z = e^{\pm iv} - 1$, i je třeba, by poslední ležely zevně kruhu poloměru 1, tedy musí $2 \sin \frac{v}{2} > 1$, t. j. třeba voliti v mezi $\frac{\pi}{3}$ a $\frac{5\pi}{3}$. Jakmile v značně převyší 1, budou argumenty $\omega = uv$, pro něž rozvoj je vhodný, tak veliké, že vystačíme s pohodlnější řadou semikonvergentní. Proto volme $v = 1{\cdot}05$;

$\mathfrak{a}_0 = 0{\cdot}9070294844$	$\mathfrak{a}_4 = -0{\cdot}1902842113$
$\mathfrak{a}_1 = 0$	$\mathfrak{a}_5 = -96{\cdot}82145016$
$\mathfrak{a}_2 = -1{\cdot}6454049711$	$\mathfrak{a}_6 = 548{\cdot}1141235$
$\mathfrak{a}_3 = 4{\cdot}9362149133$	

Tak dostaneme při $u = 10$ s napsanými koefficienty:

$$\frac{B(10{\cdot}5)}{1{\cdot}05} = 0{\cdot}089182,$$

kteroužto hodnotu by jinak bylo hledati v tabulkách, a to na základě vzorce *)

$$B(\omega) = Ci(\omega)\sin\omega + \left[\frac{\pi}{2} - Si(\omega)\right]\cos\omega.$$

Vzorce (22^a), (22^b) tvořily by vhodnou dvojici pro případ stálého u, proměnného v; počítá-li se však se stálým v, tu různost tvaru rozvojů zdvojuje početní námahu. Proto zavedeme ještě součinitele $\mathfrak{b}_\nu$

$$\frac{\log(1+z)}{v^2+\log^2(1+z)} = \sum_1^\infty \frac{\mathfrak{b}_\nu}{\nu!} z^\nu, \quad \mathfrak{b}_\nu = \frac{C_\nu(iv)+C_\nu(-iv)}{-2};$$

$$\mathfrak{b}_1 = \frac{1}{v^2}, \quad \mathfrak{b}_2 = -\frac{1}{v^2}, \quad \mathfrak{b}_3 = -\frac{6}{v^4}+\frac{2}{v^2}, \quad \mathfrak{b}_4 = \frac{36}{v^4}-\frac{6}{v^2}.$$

$$\mathfrak{b}_5 = \frac{120}{v^6}-\frac{210}{v^4}+\frac{24}{v^2}, \quad \mathfrak{b}_6 = -\frac{1800}{v^6}+\frac{1350}{v^4}-\frac{120}{v^2}.$$

Je pak $\dfrac{-x}{v^2+x^2} = \sum_1^\infty \dfrac{\mathfrak{b}_\nu}{\nu!}\left(e^{-x}-1\right)^\nu$, a první integrál ($19^3$) dá

$$A(uv) = \frac{\mathfrak{b}_1}{u(u+1)} - \frac{\mathfrak{b}_2}{u(u+1)(u+2)} + \\ + \frac{\mathfrak{b}_3}{u(u+1)(u+2)(u+3)} - \ldots \qquad (22^c)$$

Pro $v = 1{\cdot}05$ bude

$\mathfrak{b}_1 = -\mathfrak{b}_2 = \mathfrak{a}_0 = 0{\cdot}9070294844$

$\mathfrak{b}_3 = -\ 3{\cdot}1221559446 \qquad \mathfrak{b}_4 = \ 18{\cdot}175112574$

$\mathfrak{b}_5 = -\ 61{\cdot}45296499 \qquad \mathfrak{b}_6 = -\ 261{\cdot}3829230$

Integrací vychází z (22^c)

$$\frac{1}{v} B(uv) = \sum_1^\infty \frac{\mathfrak{b}_\nu}{\nu!} \Delta^\nu \log u. \qquad (22^d)$$

(Pokračování.)

---

*) Tabulky (ovšem jen pětimístné) funkcí trigonometrických sin a cos současně s hyperbolickými, seřazené nikoli dle stupňového dělení, nýbrž dle čísel, vydal C. Burrau (Tafeln der Funktionen Cosinus und Sinus mit den natürlichen . . . Zahlen als Argument); Reimer 1907.