Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Arnošt Dittrich

Poměr geometrického názoru ke geometrii Euklidově. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 49 (1920), No. 1, 65--71

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121743`

Pak jest $x_{m_1} = \overline{O_{m_1}} = \frac{r}{1+\sqrt{2}} = r(\sqrt{2}-1)$ (rozdíl úhlopříčky čtverce o straně $r = \overline{ob}$ a poloměru r) a

$$x_t = \frac{2r(1+\sqrt{2})}{1+(1+\sqrt{2})^2} = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$

(polovina úhlopříčky čtverce o straně r).

Rovnoběžným promítáním se vztahy tyto nemění; odtud plyne jednoduchá konstrukce elipsy E ze dvou sdružených průměrů $\overline{ab}$, $\overline{cd}$, jak v obr. 2. vyznačeno. Touto konstrukcí sestrojíme nejenom tečnu mu, ale i bod dotyčný t.

Jak z předcházejícího vidno, jest postup při sestrojování tento: Sestrojme rovnoběžník $pqrs$, rozdělme průměr $\overline{ab}$ na n stejných dílů, bod na prvním dílci na př. m_1 spojme s bodem p a d a sestrojme $m_1m \parallel cd$, čímž určíme bod m na straně $\overline{sr}$, bod u na straně $\overline{rq}$ a na tečně mu bod dotyčný t. Tak postupujeme u každého dílce na $\overline{ob}$; na opačné straně u vyměníme jen bod p s bodem q. V obrazci sestrojen též bod t', který půlí úsečku $m'u'$; $\overline{om'_1} = \overline{xy} = \overline{ob}\,(\sqrt{2}-1)$.

Poměr geometrického názoru ke geometrii Euklidově.

Předneseno v Jednotě Č. M. a F. 4. XII. 1915 od prof. Dr. **A. Dittricha** z Třeboně.

Řekne-li se o Euklidově geometrii, že jest pravdivá, lze výroku tomuto podložiti dvojí smysl. Geometr z povolání, jenž se o geometrii zajímá jako o pletivo myšlenek, vížící se ke konečnému počtu axiomat za základ vzatých, rozumí pravdivosti její, že věty geometrické jsou logicky správně z axiomat vyvozeny. Snad by se tato imanentní pravdivost geometrie v hlavě matematika měla spíše nazvati krásou, poněvadž logické chyby v dedukcích pocitujeme jako esthétické vady theorií. Zcela jinak dívá se na pravdivost geometrie přírodopisec, mysleme na astronoma neb krystalografa. Ten rozumí pravdivostí transienci geometrických vět na přírodu. Jsou tedy v hořejším smyslu *krásné*, to jest *logicky bezvadné*, věty geometrie zároveň *pravdivé*, to jest *užitečné* při zpracování přírody.

Poněvadž věty geometrie jsou jejími axiomaty dokonale určeny, vzniká tu problém: co vedlo člověka k takové volbě axiomat, že důsledky jejich objevily se na přírodu transientními, to jest užitečnými při jejím zpracování?

První myšlenka by byla: jsou to věty přírodopisné, jako na př. axiomata thermodynamiky o nemožnosti perpetua-mobile a axiom Thomson-Clausiův o nemožnosti získat cyklem práci ochlazením jediného tělesa.

Většina přírodopisců, zejména starší generace zamítla tento náhled. Považují sice geometrii za naprosto spolehlivou základnu své přírodopisné práce, ale právě tím vykazují jí místo vně ohrady přírodních věd. Považují-li pravdivost geometrie za předpřírodopisnou, musí arci hledati pro ni jiný zvláštní původ.

Axiomata přírodopisná jako zmíněné věty thermodynamické objevují se obecně po delším tápání jako návrh Důsledky jeho se zkoumají. Potvrdí-li se, jak se stalo u thermodynamiky, pokládá se na dále navržené axioma za pravdivé.

Tento způsob nazírání většina přírodopisců u geometrie zamítá. Co jiného by se tu mohlo navrhnouti?

Nevím, kolik jest možností pro tento přetěžký problém a omezím se jen na návrh nejvíce na snadě ležící, že axiomata Euklidovy geometrie jsou člověku vrozena.

Kdyby geometrie byla jen imanentní logickou hrou asi jako hudba je hrou s dojmy sluchovými, pak bychom snad mohli přistoupiti na myšlenku, že stavební kaménky této hry, axiomata jsou člověku vrozena. Když však geometrie jest nejen krásná, ale také pravdivá, to jest její věty se v přírodě osvědčují. K zjištění pravdy třeba však vždy *zkušenosti* a *času*. Jestliže se dítě se znalostí Euklidovy geometrie již narodí, kdo vyzkoušel užitečnost její? Tu by geometrie musila býti destilátem ze zkušeností celého genus. Byla by integrálovou hodnotou, k níž jedinec v nejpříznivějším případě přispíval obnosy differentiálními, v něž se kondensovaly geometrické zkušenosti jeho vlastního života. Učení se geometrii bylo by jen jakýmsi se rozpomínáním, ne sice ve smyslu Platonově, ale bylo by rozpomínáním se na zkušenosti, jež učinil druh „homo sapiens“.

E. Thompson Seton ve svých „Povídkách o zvířatech“ připisuje jim trojí pramen poznání. Předně zděděné zkušenost druhu, za druhé zkušenosti rodičů výchovou na ně přenesené a konečně — co u zvířat má nejmenší význam — inviduelní*) zkušenosti vlastní.

Kdo vylučuje geometrii z kruhu přírodních věd, mohl by ji pokládati za jakési dědictví druhu. Ve prospěch toho svědčí na první pohled fakt tak zv. názoru. Dovolím si uvésti vlastní pozorováuí, vzpomínku z gymnasia. V páté třídě přednášel náš profesor s velikou svědomitostí důkazy planimetrických vět. Takové logické úvahy ocení však teprve zralý intelekt, ne mládež. Přiznám se vám bez mučení, že jsem s vytrvalostí lepší věci hodnou — nedával pozor. Ale v znalosti geometrie nijak mi to nevadilo. Rozřešil jsem každou úlohu geometrickou, jaká se ve škole vyskytuje, bera jednoduše potřebné věty z názoru. K čemu bych sledoval logické konstrukce našeho profesora, když dokazoval: jsou-li dvě přímky rovnoběžné s touže třetí, jsou i mezi sebou rovnoběžny. Vždyť jsem byl o pravdivosti věty přesvědčen, jak jsem si představil figuru.

Dle toho daly by se namáhavé logické úvahy nahraditi jakousi intuicí, abych užil modního dnes slova. Místo abychom lopotnou rozumovou prací převáděli větu hledanou ve světle vědomí řetězem syllogismů na průhledná axiomata, jen si figuru představíme a výsledek vyhoupne se do našeho vědomí hned s pocitem naprosté jistoty o jeho pravdivosti. Pak říkáme, že jsme úkol zmohli názorem a vzniká dojem, že Euklidova geometrie jest nám vrozená.

Taková intuice jest nepochybně zjevem podivuhodným. Stručně objasní se povaha intuice vtipem Heineovým: intuice je, když opice sedí u kotlíku a vaří v něm svůj vlastní ohon. Míní pak básník poznámku svou nepochybně takto: každý pozorovatel může se sice cestou rozumovou dopracovati myšlenky, že opice cítí bolest, tím, že v mysli své kombinuje její šklebení, ohon ve vodě, z níž vystupuje pára a jiné vněmy smyslové; ale nikdo nemá toto poznání tak lehko, tak intuitivně jako opice sama, jež bolest cítí přímo, subjektivně. Ta jest ovšem o své bolesti

*) Starý vlk platí za obzvláště chytrého. Římané říkali o Hannibalovi, že je „starý prohnaný vlk". Na první pohled je to doklad pro význam individuelních zkušeností u zvířat. Ale což je vůbec vyhlídka, že vlk od narození hloupý sestárne, neb sestárnuv obrátí na sebe pozornost?

tak skalopevně přesvědčena, jak pozorovatel, jenž jde přes data svých smyslů a jejich zpracování rozumem nikdy býti nemůže

Zdá se na první pohled, že v názoru máme intuitivní pramen poznání pro věty Euklidovy geometrie. Tak mínil na př. Schopenhauer, ale vykládal si zjev ten z Kantových názorů o prostoru. Prospěch z této myšlenky však nebyl žádný a pokus Kosackův*) založiti geometrii na názoru skončil nezdarem. Z neužitečnosti myšlenky soudí se však obecně, že není pravdivá.

Ale vždyť i lidé, kteří nikdy nestudovali znají geometrii zachovávají při praktické činnosti všechna omezení, jež nám Euklidova geometrie ukládá. Budiž; tím však není řečeno, že jim tato geometrie je vrozená. Pudovitá znalost její mohla by na ně býti přenesena výchovou, osobní zkušeností neb obojím. Chceme-li si o tom udělati úsudek, musíme si všimnouti malých dětí: čím mladší, bude tím lepší, poněvadž čas, v němž by mohly nabýti osobních zkušeností neb přejmouti vědomosti svého okolí se tím přikracuje.

Předkládám několik vlastních pozorování. Třeba velmi mnoho obezřelosti a pozornosti v interpretaci dětského chování často musí nám pomoci matka, když dítě teprve začíná mluvit a vyjadřuje se ve zvukových rebusech, jimž jenom maminka rozumí. — Dvouletému klončkovi přišel jsem na to, že ani instinktivní znalost jednoduché věty: dvě rovnoběžky mají osu souměrnosti, mu připsati nesmíme Byl s maminkou na půdě jejíž podlaha byla provisorní z vedle sebe položených prken Sešoupnutím jich vznikla štěrbina as dva prsty široká: zmíněné rovnoběžky. Klouček projevoval komický strach, aby skrze tu štěrbinu nepropadl. Již tato obava sama jest dokladem, že pojmy větší—menší nejsou mu jasny, že neví sám, jak je tlustý. Nejsměšnější však bylo, že se nebál na obou stranách štěrbiny stejně, jak by toho vědomí o souměrnosti dvou rovnoběžek žádalo. Bál se jen tehdy, když byl od maminky štěrbinou oddělen. Když jsem ho přezvedl k sobě, zachránil se spěšně k mamince, překročiv klidně nebezpečnou štěrbinu. Když jsem se ho víc výrazem a posunky než slovy ptal: teď se nebojíš, že propadneš, odpověděl mi strojeným: „chacha“, což dle interpretace matky

*) C. R. Kosack, Beiträge zu einer systematischen Entwicklung der Geometrie aus der Anschauung. Nordhausen 1852.

vyjadřovalo ironii, pohrdání, asi jako by chtěl říci: „Jak pak spadnu, když jsem u maminky!" Ještě jednou jsem na tomto kloučkovi učinil pozorování, z něhož jako prvé plyne, že neví, jak jest veliký. Otec jeho četl leže v křesle, maje nohy vodorovně na židli. Když vstal a odešel, pokusil se pan syn o zaujetí téže pohodlné polohy, což se mu ovšem nepodařilo. Marně lovil krátkýma nožkama po příliš vzdálené židli.*)

Ale i starší děti prozrazují ještě zajímavou neznalost geometrie. Pětiletý hošík vykládal jednou, proč se ve vaně tak rád obrací se strany na stranu. To se prý tělíčko ve vodě stává docela, docela malinké. My ovšem hned chápeme, že si klouček nadnášení vodou, že se stal lehkým, vykládal tím, že se stal malým. Ale lidé, kterým to vykládal, mu nerozuměli. A tu jim klouček pomohl přirovnáním: při točení se scvrkám jako rampouch otáčený mezi prsty. Není tedy pochyby, že pomýšlí na skutečné zmenšení svého těla. Ani idea neproměnlivosti těles při otáčení, — základní myšlenka Euklidovy geometrie — není dětem vrozena: i tu musí si teprve získat.

To jde, zdá se mi, později velice rychle. Týž klouček pochopil právě než začal choditi do školy již i složitou myšlenku geometrické podobnosti. Nazval totiž kdysi úsečku as 5 *cm* dlouhou „mladým metříčkem". Zde jest zároveň viděti, že pro psychologické uchopení podobnosti může posloužiti pozorování, že mládě bývá zmenšenou, více méně přesnou kopií svých rodičů.

Dítě nemá tedy od narození instinktivní znalosti Euklidovy geometrie a nenabude bez osobních zkušeností neb poučení instinktivní znalosti jejich vět. Jsou snad tyto zkušenosti neb ona poučení základem, o něž se často opírá názor intuitivní znalosti geometrie. Myslím, že i to ještě musíme zamítnouti, neboť názor — nač nelze dosti důrazně poukázati — není vůbec Euklidovský.

Všimněme si obdélníka, poněvadž Pestalozzi prohlásil tento obrazec za základní pro náš názor, což jest zajisté věcnější než náhled Herbartův, jenž se rozhodl pro trojúhelník. Nakresleme si nyní na tabuli obdélník s vodorovnou základnou a svislou

*) S pojmem objemu byl ještě o jeden rok později na štíru. Když dostával skrovnou porci chleba k snídani objevil brzo, že ho nadrobením do hrnéčku lépe využije. Ale trvalo delší čas než si uvědomil, že nadrobením do hrnéčku stoupne hladina. Zprvu drobil klidně, ať to i teklo na stůl!

výškou. Učiňme pak bez kružidla, řídíce se jen názorem, vodorovnou základnu tak dlouhou jako svislou výšku. Tím dostaneme obrazec, který náš názor prohlašuje za čtverec. Přeměříme-li však strany kružidlem, ukáže se výška menší než základna. Když tedy názor selže již u tak jednoduché figury jako čtverec, co lze od něho čekati v případech složitějších?*)

Jiný rozdíl mezi geometrií názoru a Euklidovou prosvítá základní ilusí astronomickou, zdáním, že nebe poseté hvězdami prostírá se v kulovité ploše kol pozorovatele. Chápali bychom snadno z nedokonalosti lidského zraku, proč hvězdy velmi vzdálené zdají se nekonečně vzdálenými. Ale Euklidova geometrie pořádá nekonečně vzdálené body do roviny, ne do plochy kulové. A kdyby tato zdála se nám aspoň nekonečně velikou; ale ani toho není. Nebe našeho názoru je nám tak blízko, že to až zaráží. Jak daleko je do nebe určuje se různými cestami, dle toho o jaký objekt nebeský jde.

Epikur praví, že slunce jest koulí dvě stopy širokou. Tak velikým jeví se nám slunce na obzoru. Slunce jest $1/2^0$ široké, což činí 720-tý díl kruhu. Tento kruh měl by tedy 1440 stop v obvodu. Z toho plyne, že Epikur a my s ním, klademe slunce do vzdálenosti 228 stop. Ovšem není to slunce astronomů, ale je to slunce názoru, o němž Hering praví, že je plochou kruhovou deskou žlutočervenou. Nazývá je přímo kruhovým oranžovým počitkem, jejž třeba umístiti tam, kde se nám slunce jeví, tedy ve vzdálenosti 228 stop.

Měsíci v mírné výši nad obzorem připisujeme průměr as 18 *cm*. Podobným malým počtem, jaký jsme provedli se sdělením Epikurovým, dostaneme, že měsíc klademe do vzdálenosti 16 *m*. Není tedy chování dítěte, jež prosí, abychom mu měsíc dali do ruček ku hraní, nijak nelogické. Vidí jej malým a blízkým a spoléhá na to, co vidí. Zajímavo jest, že matematik R. von Sterneck, z jehož pojednání o zdánlivé formě klenby nebeské čerpám, považuje za nutno, aby omlouval napětí mezi *myšlenkou*

*) Z toho plyne, že kruh pořízený kružidlem je pro názor elipsou. Názor náš ukazuje nám deformaci skutečnosti, kterou by dle principu relativnosti znamenal pozorovatel na věcech se pohybujících.

měsíce, veliké astronomické koule, jež stojí daleko venku v prostoru *smyslovým* dojmem viděného žlutého kotouče ve vzdálenosti 16 *m*. Toť nový doklad, jak cenný pramen poznání máme v pozorování projevů dětských. (Dokončení.)

Astronomická zpráva na první polovici roku 1920.*)

Veškeré údaje jsou v občanském čase středoevropském od 0^h do 24^h (půlnoc 0^h, poledne 12^h); vztahují se na poledník středoevrop. a obzor 50° sev. šířky.

Oběžnice.

Merkur. Význačné polohy této planety, jak se jeví se Země vzhledem k Slunci, zároveň se zdánlivým průměrem σ, hvězdnou velikostí m a fasí (0·0 = nov, 0·5 = půlkotouč, 1·0 = úplněk) jsou patrny z tohoto přehledu:

			datum	σ	m	fase	
největší vzdálenost	22°	záp.	XII. 21	7″	−0·2	0·6	jitřenka
svrchní konjunkce			II. 5.	5	−1·1	1·0	
největší vzdálenost	18°	vých.	III. 4.	7	+0·2	0·5	večernice
spodní konjunkce			III. 20.	11	+2·8	0·0	
největší vzdálenost	28°	záp.	IV. 17.	8	+0·6	0·4	jitřenka
svrchní konjunkce			V. 26.	5	−1·9	1·0	
největší vzdálenost	26°	vých.	VI. 29.	8	+0·7	0·4	večernice

Pouhým okem lze pozorovati Merkura v dobách, když má největší vzdálenost od Slunce, a to zejména tehdy, má-li větší deklinaci. Pro snadnější jeho vyhledání uvádíme výšku V i azimut A planety 50^m před východem Slunce, je-li Merkur jitřenkou, nebo 50^m po západu Slunce, je-li večernicí.

a) Merkur jitřenkou.

	doba		A	V
1919 XII 11.	18^h	58^m	−53°	6°
16.	19	2	−49	8
21.	19	6	−47	8
1920 I 1.	19	9	−47	4
6.	19	8	−49	2

Hvězdná velikost v této periodě vzroste z 0·5 na −0·3, průměr se zmenší z 8·5″ na 5·2″, kdežto osvětlené části kotouče přibývá z 0·3 na 0·9.

V této době je také Venuše jitřenkou; má azimut mnohem menší, kdežto výšku větší, totiž dne XII. 21 je $A = -28°$, $V = 22°$; dne I. 1. je $A = -28°$, $V = 19°$.

*) Poněvadž nebylo možno z technických příčin vydati Kalendář astronomický na rok 1920 k tisku připravený, podáváme čtenářům ještě letos místo něho Zprávu, omezenou na míru nejstručnější.