Matyáš Lerch

O transformaci řad v řady rychleji konvergentní se zvláštním zřetelem k zobecněné harmonické řadě $R(u, s) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(u+r)^s}$. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 49 (1920), No. 1, 49–54

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121741`

O transformaci řad v řady rychleji konvergentní se zvláštním zřetelem k zobecněné harmonické řadě $R(u, s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(u+\nu)^s}$.

Píše M. Lerch v Brně.

Uvedená řada konverguje pro případ, že realná část exponentu s převyšuje 1 (základní proměnnou u považujme za kladnou a realnou); chceme se pokusiti o utvoření jiné řady

$$S = \sum_{0}^{\infty} \varphi_\nu(s),$$

která má vůči s konvergenční obor širší a je s řadou R v úzké souvislosti.

K tomu vede okolnost, že integrál

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(u+\nu+x)^s} = \frac{\left(u+\nu-\frac{1}{2}\right)^{1-s} - \left(u+\nu+\frac{1}{2}\right)^{1-s}}{s-1}$$

má hodnotu blízkou veličině $\frac{1}{(u+\nu)^s}$; volíme tedy za φ_ν rozdíl obou těchto hodnot, t. j.

$$\varphi_\nu(s) = \frac{1}{(u+\nu)^s} + \frac{\left(u+\nu+\frac{1}{2}\right)^{1-s} - \left(u+\nu-\frac{1}{2}\right)^{1-s}}{s-1}. \quad (1)$$

Pišme k vůli zkrácení $u+\nu = w$; bude dle věty binomické

$$\left(w \pm \frac{1}{2}\right)^{1-s} = w^{1-s} \pm (1-s)\frac{1}{2w^s} + \frac{s(s-1)}{2}\frac{1}{4w^{s+1}}$$
$$\mp \frac{(s-1)s(s+1)}{6}\frac{1}{8w^{s+2}} + \ldots,$$

tedy

$$\frac{1}{w^s}+\frac{\left(w+\frac{1}{2}\right)^{1-s}-\left(w-\frac{1}{2}\right)^{1-s}}{s-1}=-\frac{s(s+1)}{24w^{s+2}}+\ldots$$

Pravá strana je veličina typu

$$-\frac{s(s+1)}{24w^{s+2}}\left[1+\frac{a_1}{w^2}+\frac{a_2}{w^4}+\ldots\right],$$

a bude tedy pro dosti veliká w menší než dvojnásobný napsaný první člen; z toho vychází, že takto tvořená řada S konverguje, jakmile realná část veličiny s převyšuje -1.

Její hodnotu určíme na základě tvaru

$$S=\lim_{n=\infty}\sum_{\nu=0}^{n-1}\varphi_\nu(s),$$

a sice za předpokladu real. $s>1$, abychom docílili poznání její souvislosti s řadou R.

Tu jest dle (1)

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}\varphi_\nu(s)=\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{1}{(u+\nu)^s}+\frac{\left(u+n-\frac{1}{2}\right)^{1-s}}{s-1}-\frac{\left(u-\frac{1}{2}\right)^{1-s}}{s-1};$$

při tom se omezujeme na předpoklad $u>\frac{1}{2}$, což lze s malou úpravou výrazu vždy zaříditi. Druhý člen v pravo za učiněné supposice blíží se nule s nekonečně rostoucím n, a vychází

$$S=R(u,s)-\frac{\left(u-\frac{1}{2}\right)^{1-s}}{s-1},$$

čili

$$(A)\qquad R(u,s)-\frac{1}{s-1}=\frac{\left(u-\frac{1}{2}\right)^{1-s}-1}{s-1}$$

$$+\sum_{\nu=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(u+\nu)^s}+\frac{\left(u+\nu+\frac{1}{2}\right)^{1-s}-\left(u+\nu-\frac{1}{2}\right)^{1-s}}{s-1}\right\}.$$

Tím je řada $R(u,s)$ převedena na výraz, který konverguje již pro real. $s>-1$, tedy také v okolí bodů $s=0$ a

$s=1$; tím je tedy též funkce R do tohoto oboru prodloužena (propagována).

Zároveň vysvítá, že rozdíl

$$R(u, s) - \frac{1}{s-1}$$

je na místě $s=1$ funkce spojitá (víme z jiných pramenů, že je pro všecka s spojitá).

Hodnotu tohoto rozdílu pro $s=1$, t. j.

$$\lim_{s=1}\left\{R(u,s)-\frac{1}{s-1}\right\}$$

obdržíme přímým dosazením $s=1$ na pravé straně, t. j.

$$-\log\left(u-\frac{1}{2}\right)+\sum_{\nu=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{u+\nu}-\log\left(u+\nu+\frac{1}{2}\right)+\right.$$
$$\left.+\log\left(u+\nu-\frac{1}{2}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n=\infty}\left\{\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{1}{u+\nu}-\log\left(u+n-\frac{1}{2}\right)\right\}.$$

Připojíme-li

$$\lim_{n=\infty}\left\{\log\left(u+n-\frac{1}{2}\right)-\log n\right\}=0,$$

máme (H. Kinkelin)

$$(B)\qquad \lim_{s=1}\left\{R(u, s)-\frac{1}{s-1}\right\}=\lim_{n=\infty}\left\{\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{1}{u+\nu}-\log n\right\}$$
$$=E+\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{1}{u+\nu}-\frac{1}{\nu+1}\right),$$

kde

$$E=\lim_{n=\infty}\left(\sum_{1}^{n}\frac{1}{\mu}-\log n\right)$$

je t. zv. Eulerova konstanta. Pravá strana rovnice (B) vyskytuje se v elementech pod značením

$$-\Psi(u)=-\frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)}.$$

Přistupme nyní k hodnotě $s=0$; v tom případě vymizí obecný člen v řadě, a zbývá

$$R(u, 0)=\frac{1}{2}-u.$$

Řadu (A) je dovoleno také derivovati na $s=0$; obdržíme

$$R_s'(u,0)=\left(u-\frac{1}{2}\right)\left[\log\left(u-\frac{1}{2}\right)-1\right]$$

$$+\sum_w\left\{\left(w+\frac{1}{2}\right)\left[\log\left(w+\frac{1}{2}\right)-1\right]-\right.$$

$$\left.-\left(w-\frac{1}{2}\right)\left[\log\left(w-\frac{1}{2}\right)-1\right]-\log w\right\},$$

$$(w=u+v;\ v=0,1,2,3,\ldots).$$

Znamenáme-li tento výraz $\Phi(u)$ a utvoříme-li součet prvních n-členů v pravo, máme

$$\Phi(u)\backsim-\log u-\sum_1^{n-1}\log(u+v)+$$

$$+\left(u+n-\frac{1}{2}\right)\left[\log\left(u+n-\frac{1}{2}\right)-1\right], \tag{2}$$

$$\Phi(u)\backsim-\log u+\sum_1^{n-1}\log\frac{\left(1+\frac{1}{v}\right)^u}{1+\frac{u}{v}}-\sum_1^{n-1}\log v-u\log n$$

$$+\left(u+n-\frac{1}{2}\right)\left[\log\left(u+n-\frac{1}{2}\right)-1\right].$$

Poněvadž pak pro nekonečná n

$$(n+\xi)\log(n+\xi)-n-\xi\backsim(n+\xi)\log n-n,$$

vychází

$$\Phi(u)\backsim-\log u+\sum_1^{\infty}\log\frac{\left(1+\frac{1}{v}\right)^u}{1+\frac{u}{v}}-\sum_1^{n-1}\log v+$$

$$+\left(n-\frac{1}{2}\right)\log n-n.$$

Určení konstanty provede se dle zákona Stirlingova

$$-\log(n-1)!+\left(n-\frac{1}{2}\right)\log n-n+\log\sqrt{2\pi}\backsim 0, \tag{3}$$

takže při obvyklé definici funkce gamma Eulerovým součinem

$$\Gamma(u)=\frac{1}{u}\prod_{v=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{v}\right)^u}{1+\frac{u}{v}}$$

vychází (Ernst Schröder)

$$(C)\qquad \Phi(u)=\log\frac{\Gamma(u)}{\sqrt{2\pi}}=R'_s(u,0).$$

V každém případě můžeme se vyhnouti vzorci (3). Položme

$$\Phi(u)=C+\log\Gamma(u). \tag{4}$$

Z identity

$$\sum_0^\infty\frac{1}{(u+2\nu)^s}+\sum_0^\infty\frac{1}{(u+2\nu+1)^s}=\sum_0^\infty\frac{1}{(u+\mu)^s}$$

plyne

$$R\left(\frac{u}{2}\right)+R\left(\frac{u+1}{2}\right)=2^sR(u);$$

derivace na $s=0$ dá

$$\Phi\left(\frac{u}{2}\right)+\Phi\left(\frac{u+1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}-u\right)\log 2+\Phi(u)$$

tudíž dle (4)

$$2C+\log\Gamma\left(\frac{u}{2}\right)\Gamma\left(\frac{u+1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}-u\right)\log 2+C+\log\Gamma(u).$$

Odtud

$$C=\left(\frac{1}{2}-u\right)\log 2+\log\frac{\Gamma(u)}{\Gamma\left(\frac{u}{2}\right)}-\log\Gamma\left(\frac{u+1}{2}\right),$$

a pro $u=0$:

$$C=\frac{1}{2}\log 2-\log 2-\log\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=-\log\sqrt{2\pi}. \tag{5}$$

Tím tedy též dokázán vztah (3). Rovnice (2) dává

$$\begin{aligned}\log\Gamma(u+n)&\backsim\log\sqrt{2\pi}+\left(u+n-\frac{1}{2}\right)\log\left(u+n-\frac{1}{2}\right)-\\&\qquad-\left(u+n-\frac{1}{2}\right)\\&\backsim\log\sqrt{2\pi}+\left(u+n-\frac{1}{2}\right)\log(u+n)-(u+n),\end{aligned}$$

t. j. asymptotický vzorec Stirlingův

$$\log\Gamma(a)\backsim\left(a-\frac{1}{2}\right)\log a-a+\log\sqrt{2\pi}. \tag{6}$$

K ustanovení definitivní hodnoty (5) užito vzorce Wallissova

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} = 2\prod_{1}^{\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{\nu}}}{1+\frac{1}{2\nu}},$$

t. j.

$$\frac{\pi}{2} = 2\Pi\frac{2\nu(2\nu+2)}{(2\nu+1)^2} = 2\cdot\frac{2.4}{3.3}\cdot\frac{4.6}{5.5}\cdot\frac{6.8}{7.7}\cdots$$

$$= \frac{2.2}{1.3}\cdot\frac{4.4}{3.5}\cdot\frac{6.6}{5.7}\cdots$$

(Pokračování.)

Několik poznámek o čtyrstěnu.*

Napsal **Jan Schuster**, prof. reálky v Pardubicích.

I. V následujících úvahách užijme označení obdobného jako v rovinné trigonometrii, jež umožní cyklickou substituci ve třech nebo čtyřech prvcích a počet zjednoduší. Čtyrstěn o rozích K_1, K_2, K_3, K_4, měj sferické siny trojhranů E_1, E_2, E_3, E_4, sferické siny trojhranů k těmto polarních $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \mathrm{E}_3, \mathrm{E}_4$ a protější stěny $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$. Berme Δ_4 za podstavu o hranách a', b', c' a hrany protější buďte a, b, c. K těmto hranám přiléhající úhly stěnové značme souhlasně $\alpha', \beta', \gamma', \alpha, \beta, \gamma$, a úhly hranové označme písmeny souhlasnými s protější hranou stěny a jejím indexem, totiž stěna Δ_4 měj hranové úhly a_4, b_4, c_4, stěna Δ_1 . . a_1, b_1, c_1 atd. Ostatní označení zavedeme dle potřeby.

Jako základních prvků použijeme hlavně stěn a úhlů stěnových.

II. Obsah čtyrstěnu T, který se obyčejně vyjadřuje ve tvaru:

$$T = \tfrac{1}{3}\, abc\, E_4,$$

přepišme ve tvar, jenž obsahuje toliko stěny a sinus polarního trojhranu E_4, užijíce výrazů pro obsah trojúhelníků:

$$ab \sin c_3 = 2\Delta_3 \qquad bc \sin a_1 = 2\Delta_1 \qquad ca \sin b_2 = 2\Delta_2.$$

---

*) Tato práce je prvním sdělením auktorovým z jeho prací o čtyrstěnu z roku 1915 a proto časově předchází pojednání v »Zeitschrift für das Realschulwesen« z roku 1917 a v Rozpravách České Akademie z roku 1918 č. 30.