Bedřich Procházka

Poznámka ku plochám rozvinutelným

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 36 (1907), No. 5, 460--474

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121740

Theorii těchto obecných funkcí Wirtinger pouze naznačil. Případ $n = 3$ v některých bodech podal Berger*). Položíme-li $n = 2$, máme vlastně funkci J. Jak patrno již z uvedených 3 hlavních vět, vykazuje tento specielní případ odchylné chování.

Poznámka ku plochám rozvinutelným.

Napsal prof. **Bedřich Procházka.**

Známa jest konstrukce rovin tečných společných nějaké ploše sborcené a nějaké křivce,**) zakládající se na stanovení průsečíků tečen této křivky s onou plochou sborcenou. Konstrukce tato zjednoduší se valně v tom případě, kdy plocha sborcená bude hyperboloidem H a ona křivka křivkou rovinou L, jejíž rovina prochází jednou přímkou plochy sborcené. V tomto případě se snadno stanoví průsečíky tečen křivky L s plochou H a proto také i jejich společné roviny tečné. Souhrnem všech těchto společných rovin tečných stanovena jest rozvinutelná plocha jakožto jejich společná plocha obalová. Položme si za úkol sestrojiti *stopu této plochy* v průmětně a stanoviti zároveň *její body dotyčné* a *poloměry křivosti.*

1. Za tím účelem předpokládejme plochu hyperboloidu H vyjádřenou nějakým průmětem (klinogonálným nebo centrálným), A_3 přímky A nakloněné k průmětně ν, jejíž stopou jest bod n_A, dále přímkou B, ležící v průmětně ν (stotožňující se tudíž se svým průmětem) a obrysem průmětu, t. j. nějakou křivkou 2. stupně K_3, dotýkající se průmětů obou přímek A a B jakožto průmětem obrysové křivky K této plochy.

Průmětna obsahujíc přímku B jakožto přímku 2. soustavy hyperboloidu H protne tuto plochu ještě v přímce 1. soustavy ${}^{\nu}P$, kteráž procházejíc bodem n_A přímky A dotýkati se bude křivky K_3.

Křivka L měǰž svůj průmět v libovolné křivce L a její rovina ϱ obsahuj přímku A, proto stopa její N_ϱ v průmětně procházeti bude stopou n_A této přímky.

---

*) l. c.

**) *Dr. W. Fiedler*, Die darstellende Geometrie 1885, 3. vyd. II. díl, str. 442.

Abychom sestrojili nějakou rovinu tečnou společnou hyperboloidu a křivce L, vytkněme si na přímce A bod a, kterým sestrojivše tečnu T křivky L na př. v bodě l se dotýkající vedeme zároveň přímku P 1. soustavy hyperboloidu H, jejíž průmět P_3 bude se dotýkati obrysu K_3 průmětu této plochy v bodu k_3. Rovina τ těmito dvěma přímkami T a P položená bude, obsahujíc přímku P hyperboloidu, této plochy v určitém bodě d a křivky L v bodě l se dotýkati a bude tudíž jednou z hledaných rovin tečných společných hyperboloidu H a křivce L.

Dotyčný bod d roviny τ s hyperboloidem nalezneme pomocí přímky 2. soustavy D, v níž rovina tato hyperboloid ještě protíná. Stopu $N\tau$ roviny τ nalezneme, spojíme-li stopu n_P přímky P na přímce B ležící se stopou n_T tečny T, v níž tato přímka stopu $N\varrho$ roviny ϱ protíná. Průsečíkem n_D této stopy $N\tau$ s přímkou ${}^{\nu}P$ prochází ona přímka 2. soustavy D, jejíž průmět D_3 se zároveň obrysu K_3 dotýká. V průsečíku přímek obou soustav P a D máme hledaný dotyčný bod d roviny τ s hyperboloidem.

Přímka R spojující body d a l jest jednou z přímek plochy rozvinutelné R, určené jakožto obalové plochy společných rovin tečných, dle níž se rovina τ této plochy dotýká. Průsečík její se stopou $N\tau$ této roviny jest jedním bodem n_R stopy N_{R} této plochy rozvinutelné jakožto dotyčný bod stopy $N\tau$ se stopou N_{R}.

2. Tento bod n_R stopy $N\tau$ se stopou N_{R} můžeme však také sestrojiti na základě zásad geometrie infinitesimální následním způsobem:

Předpokládejme, že se průmět a_3 bodu a na přímce A_3 nekonečně málo pošine, tu otočí se i přímka T_3, křivky L_3 se dotýkající, nekonečně málo kol dotyčného bodu l_3, zároveň však otočí se i přímka P_3 křivky K_3 kol svého bodu dotyčného, bodu k_3. Následkem toho pošinou se nekonečně málo i body n_T a n_P ve stopě $N\varrho$ resp. ve přímce B, a tím se i spojnice jejich t. j. stopa $N\tau$ nekonečně málo otočí kolem hledaného bodu n_R, ve kterém se dotýká stopa $N\tau$ roviny tečné τ stopy N_{R} plochy rozvinutelné R.

Abychom tento bod n_R jakožto střed nekonečně malého otočení stopy N_τ sestrojili, předpokládejme, že se bod a_3 pošine ve přímce A určitou rychlostí $\overline{a_3{}^1a_3}$. Z rychlosti té odvodíme rychlost $\overline{a_3{}^2a_3}$, kterou se bod a otáčí při otáčení přímky T_3 kolem bodu l_3 tím, že přímku $a_3{}^2a_3 \perp T_3$ omezíme přímkou $\overline{{}^1a_3{}^2a_3} \parallel T_3$. Z rychlosti $\overline{a_3{}^2a_3}$ bodu a_3 přímky T_3 otáčející se kol bodu l_3 odvodíme rychlost otáčení $\overline{n_T{}^1n_T}$ stopy n_T této přímky omezíce přímku $n_T{}^1n_T \perp T_3$ spojnicí bodů ${}^2a_3al_3$. Z této rychlosti odvodíme si konečně rychlost $\overline{n_T{}^2n_T}$, kterou se pohybuje bod n_T ve stopě N_ϱ roviny ϱ jakožto průsečík přímky T_3 s touto přímkou, vedouce přímku ${}^1n_T{}^2n_T \parallel T_3$, přímku N_ϱ v bodě ${}^2n_T$ protínající.

Stejně určíme si rychlost $n_P{}^1n_P$ stopy n_P přímky P příslušící tomuto bodu při otáčení přímky P_3 kol bodu k_3. Ze zvolené rychlosti $\overline{a_3{}^1a_3}$ bodu a_3 ve přímce A_3 odvodíme rychlost otáčení $\overline{a_3{}^3a_3}$ téhož bodu a_3 při otáčení této přímky kol bodu k_3 omezíce přímku $a_3{}^3a_3 \perp P_3$ přímkou $\overline{{}^1a_3{}^3a_3} \parallel P_3$. Přímka ${}^3a_3k_3$ omezuje ve přímce $n_P{}^1n_P \perp P_3$ délku $\overline{n_P{}^1n_P}$ vyjádřující hledanou rychlost stopy n_P při otáčení přímky P_3 kol bodu k_3. Přímkou ${}^1n_P{}^2n_P \parallel P_3$ odetneme ve přímce B úsečku $\overline{n_P{}^2n_P}$ představující rychlost, kterou se pohybuje bod n_P ve přímce B jakožto průsečík této přímky s přímkou se otáčející P_3.

Ze stanovených rychlostí $\overline{n_T{}^2n_T}$, $\overline{n_P{}^2n_P}$ bodů n_T resp. n_P přímky N_τ ve přímkách N_ϱ resp. B stanovíme si rychlosti $\overline{n_T{}^3n_T}$, $\overline{n_P{}^3n_P}$, kterými se tyto body při otáčení stopy N_τ kol hledaného bodu n_R otáčejí, omezíce přímky $n_T{}^3n_T$, $n_P{}^3n_P$ kolmé k přímce N_τ přímkami ${}^2n_T{}^3n_T$, ${}^2n_P{}^3n_P$ rovnoběžnými s touto přímkou. Spojnice ${}^3n_T{}^3n_P$ protíná potom stopu N_τ ve hledaném středu otáčení n_R přímky této jakožto bodu dotyčném stopy N_τ společné roviny tečné τ se stopou N_{R} obalové plochy R společných rovin tečných hyperboloidu H a křivky L.

Takto nalezený bod stotožňuje se s bodem n_R prvou konstrukcí docíleným a nalézá se tudíž na přímce R_3, určené dříve jakožto spojnice bodů l_3 a d_3.

3. Této konstrukce geometrie infinitesimální bodu n_R můžeme však užíti také ku *sestrojení křivosti* stopy N_{R} pro tento nalezený bod n_R, odvodíme-li si k rychlosti otáčení přímky N_τ jakožto tečny křivky N_{R} kol tohoto bodu ještě jeho rychlost,

kterou v této tečně postupuje.*) Tuto rychlost hledanou stanovíme jakožto rychlost bodu n_R pokládaného za průsečík stopy N_T s přímkou R_3, kteráž se při pošinutí bodu a také pohybuje t. j. kol určitého bodu otáčí. Pohyb tento budeme moci určiti, budeme-li znáti křivost křivky L_3 pro bod l_3 a bude-li křivka K_3, jak jsme již předem předpokládali, přesně dána. Potom můžeme určiti pohyb bodů l_3 a d_3 přímku R_3 určujících a tím i přímky samé.

Je-li středem křivosti křivky L_3 pro bod l_3 bod s, potom z rychlosti otáčení tečny T_3, kol bodu l_3 se otáčející, vyjádřené rychlostí $\overline{a_3{}^2a_3}$ bodu a_3 této přímky odvodíme rychlost $\overline{l_3{}^1l_3}$, kterou se současně bod l_3 v tečně T_3 šine, spustíce s bodu s kolmici na přímku $l_3{}^2a_3$, kteráž v tečně bod ${}^1l_3$ určuje.**)

Poněvadž bod d_3 jeví se jako průsečík přímek P_3 a D_3, stanovíme si směr a rychlost jeho pohybu známou konstrukcí.***) Bod d_3 jakožto náležející přímce P_3 otáčející se kol bodu k_3 pohybuje se při tomto pohybu rychlostí $d_3{}^1d_3$, kterou obdržíme, omezíme-li přímku $d_3{}^1d_3 \perp P_3$ dříve již sestrojenou přímkou ${}^3a_3k_3$. Týž bod d_3 jakožto bod přímky D_3 otáčející se kol bodu k'_3, v němž se tato přímka křivky K_3 dotýká, pohybuje se rychlostí $\overline{d_3{}^2d_3}$, kterou odvodíme následovním způsobem:

Z rychlosti $\overline{n_D{}^1n_D}$, kterou se bod n_D přímky N_T při otáčení této přímky kol bodu n_R pohybuje ($n_D{}^1n_D \perp N_T$ a bod ${}^1n_D$ jest její průsečný bod s přímkou již sestrojenou ${}^3n_Pn_R$), odvodíme rychlost $\overline{n_D{}^2n_D}$ téhož bodu jakožto průsečíku pohybující se přímky N_T s přímkou stálou ${}^vP$ v této přímce, vedeme-li přímku ${}^1n_D{}^2n_D \parallel N_T$ přímku ${}^vP$ v bodě ${}^2n_D$ protínající. Z rychlosti té odvodíme rychlost $\overline{n_D{}^3n_D}$ tohoto bodu při otáčení přímky D_3, omezíme-li přímku $n_D{}^3n_D \perp D_3$ přímkou ${}^2n_D{}^3n_D \parallel D_3$. Spojnice ${}^3n_Dk'_3$ potom omezuje ve přímce $d_3{}^2d_3 \perp D_3$ hledanou rychlost bodu d_3 jakožto náležejícího přímce D_3.

Vedeme-li konečně nalezenými body ${}^1d_3$ a ${}^2d_3$ rovnoběžky s přímkou P_3 resp. D_3, protínají se tyto v bodu ${}^3d_3$ určujícím

---

*) *Rozpravy České Akademie.* Ročn. III. Třída II., čís. 19. »Kinetický způsob sestrojování tečen a středů křivosti křivek 2. stupně.«

**) Tamtéž.

***) *Dr. Ch. Wiener*, Lehrbuch der Kinematik. Lipsko. Sv. I., str. 52.

s bodem d_3 výslednou rychlost bodu d_3 jakožto průsečíku přímek P_3 a D_3.

Jest patrno, že nalezená rychlost $\overline{d_3{}^3d_3}$ svým směrem udává nám průmět tečny Td křivky V, dle níž se plocha obalová společných rovin tečných R hyperboloidu H dotýká. Její stopa n_{Td} leží v průsečíku jejím se stopou N^τ společné roviny tečné τ. Tímto způsobem bylo by tudíž možno sestrojiti i stopu oné plochy rozvinutelné, která jest tečnami křivky dotyčné V určena.

Z nalezených rychlostí $\overline{l_3{}^1l_3}$ a $\overline{d_3{}^3d_3}$ bodů l_3 resp. d_3 přímky R_3 pohybujících se v tečnách T_3 resp. T_3^d nalezneme rychlosti $\overline{l_3{}^2l_3}$ a $\overline{d_3{}^4d_3}$ těchto bodů, jež jim při otáčení přímky R_3 náležejí, vedouce $\overline{l_3{}^2l_3}$ resp. $\overline{d_3{}^4d_3}$ kolmo ku této přímce a omezíce je přímkami ${}^1l^2l_3$ resp. ${}^3d_3{}^4d_3$ rovnoběžnými s touže přímkou. Spojnice ${}^2l_3{}^4d_3$ určuje potom ve přímce $n_R{}^1n_R \perp R_3$ rychlost $\overline{n_R{}^1n_R}$, kterou se bod n_R otáčí při tomto pohybu přímky R_3, z níž odvodíme i rychlost $\overline{n_R{}^2n_R}$, kterou se týž bod jakožto průsečík přímky R_3 s přímkou N_τ v této přímce pohybuje, tím že bodem ${}^1n_R$ vedeme přímku ${}^1n_R{}^2n_R \parallel$ s R_3 stopu N_τ v bodě ${}^2n_R$ protínající.

Ze sestrojené přímky ${}^3n_Pn_R$, jíž jest rychlost otáčení přímky N_τ vyjádřena, a z právě sestrojené rychlosti $\overline{n_R{}^2n_R}$ bodu dotyčného n_R tečny N_τ se stopou N_R plochy obalové R sestrojíme střed křivosti o této křivky pro bod n_R, spustíce s bodu ${}^2n_2$ kolmici ku přímce ${}^3n_Pn_R$ normálu v bodu tomto ku křivce N_R sestrojenou v bodu o protínající.

4. Kdyby byla dána místo plochy hyperboloidu obecná plocha sborcená S, určená přímkou B ležící v průmětně a libovolnou křivkou K_3 jakožto obrysovou křivkou jejího průmětu, jíž za průmět dvou nekonečně blízkých křivek pokládati můžeme a měli bychom v tomto případě stanoviti stopu $N_{R'}$ plochy R′ jakožto obalové rovin tečných společných ploše této S a křivce rovinné L, pokračovati bychom mohli následním způsobem:

Stanovíce především křivku průsečnou J roviny ϱ křivky L s touto plochou S předvedeme tento obecný případ na případ předcházející.

Z libovolného bodu a křivky J sestrojíme tečny ku křivkám K_3, L_3, jakožto průměty nějaké přímky P plochy sborcené S resp. tečny T rovinné křivky L_3. V bodě a sestrojíme zároveň ke křivce J tečnu A, mající svou stopu n_A ve stopě N_ϱ roviny ϱ křivky L, a konstruujeme známým způsobem křivku 2. stupně H_3, která oskulujíc křivku K_3 v bodě k_3 (v němž se přímka P_3 křivky této dotýká) dotýká se zároveň přímek B a A_3. Hyperboloid jednoplochý H určený křivkou obrysovou H, přímkou B, nalézající se v průmětně ν, a přímkou A v rovině ϱ ležící oskuluje plochu sborcenou S v bodě k a dotýká se jí podle přímky P a má tudíž s ní společný bod dotyčný d, a tečna sestrojená v tomto bodě ku křivce V', dle níž se plocha R′ plochy hyperboloidu dotýká, bude se stotožňovati s onou dříve sestrojenou tečnou Td ke křivce V. Proto také plochou hyperboloidu H a křivkou L určená plocha obalová společných rovin tečných R' bude se s plochou R, způsobem uvedeným ve článku 2. a 3. tohoto pojednání sestrojenou dle přímky R oskulovati a proto i stopa $N_{\mathrm{R}'}$ plochy R′ bude míti se stopou N_{R} plochy R v bodě n_R nejen společnou tečnu, nýbrž *i střed křivosti* o.

5. V řešení této úlohy, týkající se útvarů prostorových, na základě zásad deskriptivní geometrie a geometrie kinematické obsažena zároveň následní úloha planimetrická:

Proměnlivý trojúhelník $a_3 n_P n_T$ pohybuje se tak, že jeho vrcholy $a_3 n_P n_T$ probíhají přímky A_3 resp. B a N_ϱ, *obecně v jednom bodě se neprotínající*, a strany jeho $T_3 \equiv a_3 n_T$ a $P_3 \equiv a_3 n_P$ stále se dotýkají křivek L_3 resp. K_3. *Má se sestrojiti křivka* N_{R} *třetí stranu* $N_T \equiv n_T n_P$ *tohoto trojúhelníka obalující, jakož i její bod dotyčný a příslušný jemu střed křivosti.*

6. Úlohu tuto můžeme však řešiti také pomocí geometrie synthetické zcela samostatně.

Za příčinou zjednodušení zaveďme předem nové označení: Ony dvě křivky, jichž se dvě strany $C \equiv ab$ a $A \equiv bc$ proměnlivého trojúhelníka abc dotýkají, označme K resp. L a jejich příslušné body dotyčné k resp. l. Přímky, jež vrcholy tohoto trojúhelníka probíhají, a obecně se v jednom bodě neprotínají, nazveme $OO'{}^1O$. Křivku, kterou třetí strana $B \equiv ac$ obaluje, nazveme M.

Co se týče sestrojení bodu dotyčného m přímky B s křivkou M, nalézáme řešení v konstrukci *Burmestrově*, odvozené z věty *Brianchonovy.* *)

Abychom tímto způsobem určili dotyčný bod m, pokládáme ony dva dotyčné body k a l za zvláštní případ křivek obalených přímkami C a A, t. j. za pevné body otáčení přímek C a A a myslíme si, že průsečík b těchto přímek se pohybuje v přímce O'; potom vytvořují body a a c resp. na přímkách O, ${}^1O$ projektivné řady bodové a proměnlivá spojnice $ac \equiv B$ křivku 2 stupně M', která se křivky M a tudíž i přímky B v hledaném bodě m dotýká. Nazveme-li $a'b'c'$ (a' leží proti a atd.) vrcholy trojúhelníka přímkami O^1OO' tvořeného a pošineme-li bod b po přímce O' tak, že bod c přijde předně do bodu b' a podruhé bod a do c', potom stotožní se přímka $ca \equiv B$ jakožto tečna křivky 2. stupně M' v prvém případě s přímkou O a v druhém případě s přímkou $c'l$. Stejným způsobem přijde přímka $B \equiv ac$ při dalším pošinutí bodu b do přímky ${}^1O$ a potom do přímky $a'k$. Dle toho, když označíme písmenem v průsečík přímek $a'k$, $c'l$ jest $va'cac'$ opsaný pětiúhelník oné křivky 2. stupně M'; a opírajíce se o speciální případ věty Brianchonovy obdržíme dotyčný bod m, spojíce průsečík f úhlopříček aa', cc' s bodem v přímkou, kteráž protíná přímku B v hledaném dotyčném bodě m.

Jelikož však tato křivka M' má s křivkou M tečnu B a nekonečně blízkou společnou, bude se jí dotýkati dle přímky B ve společném dotyčném bodě m. Dotyčný bod m křivky M' jest tedy hledaným dotyčným bodem křivky M s přímkou B.

7. Za příčinou sestrojení středu křivosti křivky M cestou synthetickou bude vhodnější sestrojiti tento dotyčný bod ještě jiným způsobem:

Místo křivky L, již přímka $A \equiv bc$ jakožto strana proměnlivého trojúhelníka obaluje, vezměme některou křivku L'... řady křivek 2. třídy, které dotýkajíce se přímek ${}^1O$ a O' zároveň se křivky L v bodě l dotýkají, a sestrojme k této křivce L' a bodu k jakožto zastupujícím křivky L resp. K příslušnou křivku M' obalenou tečnou B.

*) *Dr. L. Burmester*, Lehrbuch der Kinematik, Lipsko, sv. I., str. 86.

Křivka M' v tomto případě vytvořená jakožto obalová přímek B, spojujících sdružené body dvou projektivných řad O a ^1O (každému bodu na přímce O přísluší jen jeden bod řady ^1O, protože přímky O' a ^1O se křivky L' dotýkají) bude křivkou 2. třídy, dotýkající se přímky B, přímek O a ^1O, jakožto přímých řad projektivných tuto křivku určujících a přímek U a V, jež s bodu k lze ke křivce L' sestrojiti a kteréž, jak snadno lze dokázati, dva páry sdružených bodů přímých řad O a ^1O spojují.

Křivka tato M' dotýká se také přímky R, kterou obdržíme jakožto tečnu křivky L' sestrojenou s bodu c', — v němž se přímky O a O' protínají —, když jej pokládajíce za bod přímky O hledáme sdružený bod ^1O.

Křivka M' mající s křivkou L čtyři tečny ^1OUVR společné, náleží s touto křivkou k řadě křivek 2. třídy určené těmito čtyřmi přímkami.

Dva svazky přímek o středech c a r, v nichž přímky ^1O a resp. R přímku B protínají, a jež za zvrhlou křivku 2. třídy pokládati můžeme, t. j. tečny z těchto bodů ku všem křivkám řady 2. třídy ^1OUVR sestrojené, tvoří involuční svazek 2. třídy, jehož polára P prochází bodem k, v němž se druhé dvě základní přímky U a V protínají. Proto také přímky tečné A a D, které s bodů c a r ke křivce L' vedeme, tvoří jednu z involučních družin, jichž průsečný bod p s bodem k určuje poláru P involuce, na které leží také bod průsečný přímek tečných s bodů c a r ku křivce M' vedených. Poněvadž tyto přímky jsou nekonečně blízkými s tečnou B, jest průsečný bod těchto tečen bodem dotyčným s křivkou M' a tudíž se stotožňuje s bodem m, v němž se tečna B křivky této dotýká.

Pro nás jest důležitý ten výsledek, že polára P, na níž bod dotyčný m leží, jest spojnicí bodu k s bodem p, jehož sestrojení závisí na tečně D, s bodu r ku křivce L' sestrojené.

Že každá křivka L' řady křivky 2. třídy dotýkajících se přímek ^1O a O' a křivky L v bodě l nás povede k témuž cíli, t. j. k téže přímce P, jež bodem m prochází, jest patrno z toho, že volbou jiné křivky L' změní se také přímka R jakožto tečna z průsečíku c' přímek O a O' ke křivce této tak, že svazek těchto přímek $R\dots$ bude projektivný se svazkem přímek $D\dots$

jakožto tečen s bodu r... ke křivce L' vedených body r... Proto procházejí všechny tyto přímky D... jedním bodem p, ležícím na přímce A, a jest lhostejno, kterou z křivek L' k sestrojení poláry P a dotyčného bodu m zvolíme.

8. Dokázavše syntheticky, že dotyčný bod m tečny B s křivkou M' leží na poláře P jakožto spojnici bodu k s průsečíkem p přímky D s přímkou A, můžeme přistoupiti k sestrojení poloměru křivosti křivky M pomocí geometrie infinitesimální následním způsobem:

Zvolíce takovou křivku řady křivek L'... druhé třídy, která má s křivkou L v bodě l styk co možná nejužší, t. j. oskuluje ji v tomto bodě, sestrojme konstrukcí právě uvedenou poláru P bodem k procházející a tečnu B v jejím bodu dotyčném m protínající.

Úkolem naším bude, abychom k rychlosti, kterou se tečna B otáčí, nalezli rychlost, kterou se dotyčný bod m v této tečně pohybuje.

Především určíme rychlost otáčení přímky B, při čemž zároveň dotyčného bodu m docílíme. Zvolme rychlost $\overline{b^1b}$ bodu b ve přímce O'. Z té odvodíme rychlost $\overline{b^2b}$ ($\overline{b^2b} \perp A$, $\overline{^1b^2b} \parallel A$), kterou se bod b přímky A otáčí. Přímka A kol bodu l se otáčející protíná přímku ^1O v bodě c, pohybujícím se rychlostí $\overline{c^1c}$ ($\overline{c^1c} \perp A$). Z té rychlosti odvodíme rychlost $\overline{c^2c}$, kterou se týž bod jakožto průsečík přímky A s přímkou ^1O v této přímce pohybuje a z této rychlosti potom rychlost $\overline{c^3c}$, kterou se bod c při otáčení tečny kol hledaného bodu dotyčného m pohybuje. Stejným způsobem odvodíme z rychlosti $\overline{b^1b}$ vzhledem k otáčení přímky $C \equiv ab$ kol bodu k rychlost otáčení $\overline{a^3a}$ bodu a přímky B při otáčení kol bodu m. Spojnice $^3a^3c \equiv {}^1B$ protíná tečnu B v hledaném bodu m, již dříve cestou synthetickou sestrojeném, jakožto okamžitém středu otáčení, kterýž jest dotyčným bodem křivky M s tečnou B. Rychlostí $\overline{a^3a}$ nebo $\overline{c^3c}$ jest zároveň dána rychlost otáčení této tečny B.

Abychom stanovili rychlost, kterou se tento bod m v tečně B pohybuje, mějme na zřeteli, že jsme si tento bod ještě jiným způsobem ve článku předcházejícím stanovili, jakožto průsečík poláry P s tečnou B. Pohyb bodu m jest tedy závislý na pohybu poláry P jakožto spojnice bodu k a bodu p, kteréžto se při pohybu přímky B také určitým způsobem pohybují.

Při otáčení přímky C dotýkající se křivky K v bodě k kol tohoto bodu pohybuje se zároveň bod tento ve přímce C určitou rychlostí $\overline{k^1k}$, kterou odvodíme ze středu křivosti s křivky K, spustíme-li s bodu tohoto kolmici s^1k ku přímce $^1C \equiv {}^3bk$, kteráž přímku C v bodě ^1k protíná. Z rychlosti té stanovíme rychlost $\overline{k^2k}$, kterou se bod k jakožto přímce P náležející pohybuje, když $k^2k \perp P$ omezíme přímkou $^1k^2k \parallel P$.

Rychlost bodu p přímky P stanovíme jakožto průsečíku přímky A a D. Pohyb přímky A jest již stanoven polohou $^1A \equiv {}^2bl$, odvodíme tudíž ještě pohyb přímky D křivky L' v bodě l' se dotýkající

Pohyb ten jest závislý na pohybu bodu r po přímce R, kterýž vykonává se při otáčení tečny B kol bodu m. Z rychlosti otáčení $\overline{c^2c}$ přímky B odvodíme rychlost $\overline{r^1r}$ bodu r ($r^1r \perp B$ a protneme ji přímkou m^2c). Z rychlosti té odvodíme rychlost $\overline{r^2r}$ bodu r ve přímce R, vedeme-li $^1r^2r \parallel B$, až protne R v bodě ^2r. Potom stanovíme rychlost $\overline{r^3r}$ bodu r při otáčení přímky D kol bodu l' ($r^3r \perp D$, $^2r^3r \parallel D$).

Tím jest pohyb otáčení přímky D kol bodu l' stanoven.

Z pohybu otáčení přímky A a D, otáčejících se kol bodů l a l' stanovených rychlostmi $\overline{b^2b}$ a $\overline{r^3r}$, určíme rychlosti $\overline{p^1p}$ resp. $\overline{p^2p}$ bodu p tím, že omezíme přímku $p^1p \perp A$ přímkou $^1A \equiv l^2b$ a přímku $p^2p \perp D$ přímkou $^1D \equiv l'^3r$. Přímky $^1p^3p \parallel A$ a $^2p^3p \parallel D$ protínají se v bodě ^3p určujícím s bodem p rychlost $\overline{p^3p}$ bodu p. Z rychlosti té odvodíme rychlost $\overline{p^4p} \perp P$ (vedením přímky $^3p^4p \parallel P$), t. j. rychlost otáčení bodu p při otáčení poláry P.

Spojnice $^1P \equiv {}^2k\,{}^4p$ omezuje v přímce $m^1m \perp$ ku P rychlost $\overline{m^1m}$ bodu m při otáčení této přímky, z kteréž si odvodíme rychlost $\overline{m^2m}$ bodu m ve přímce B se pohybujícího, vedeme-li přímku $^1m^2m \parallel P$ přímku B v bodě ^2m protínající.

Z rychlosti této konečně odvodíme střed křivosti křivky M' a tím i křivky M, když s bodu nalezeného ^2m spustíme ku přímce ^1B kolmici ^2mo protínající normálu N v bodě m ke křivce M sestrojenou v hledaném středu křivosti o'.

9. Střed křivosti křivky K docíliti můžeme také pouze cestou synthetickou následovním způsobem:

Zvolme vedle křivky L', oskulující křivku L v bodě l a dotýkající se přímek ${}^1O$ a O', křivku K', která oskulujíc křivku K v bodě k dotýká se zároveň přímek O a O', a sestrojme z těchto křivek křivku M', kteráž bude míti s křivkou M tři nekonečně blízké body společné, t. j. bude tuto křivku v bodě k oskulovati.

Vzhledem k tomu, že obě křivky K' a L' se dotýkají přímky O', bude každému bodu na přímce O přislušeti jen jeden bod na přímce ${}^1O$ a proto křivka M' bude křivkou 2. třídy, dotýkajíc se přímek $O^1 O$ jakož i ostatních tří tečen křivek K' a L', které vedle přímky O' mají společné, dotýkajíc se zároveň tečny B.

Aniž bychom tyto tři další společné tečny křivek K' a L' sestrojili, můžeme další tečny křivky M' sestrojiti na základě výtvarného zákona této křivky; zejména lze použíti dotyčných bodů této křivky s přímkou O a ${}^1O$, jichž se tato křivka také dotýká.

Tak obdržíme dotyčný bod křivky M' s přímkou O, když s bodu b' vedeme ku křivce L' tečnu T přímku O' v bodě t protínající. Tečna ${}^1T$ z tohoto bodu ku křivce K' vedená, protíná potom přímku O v hledaném bodě dotyčném o přímky O s křivkou M'. Obdobným způsobem stanoviti lze dotyčný bod ${}^1o$ této křivky s přímkou ${}^1o$. — Na základě tří tečen O, ${}^1O$ a B a dotyčných bodů o a ${}^1o$ prvých dvou můžeme sestrojiti i dotyčný bod m tečny třetí a narýsovati také křivku M' celou.

Kružnice křivosti křivky M' v bodě m sestrojená, jíž lze různými konstrukcemi docíliti, bude zároveň udávati křivost křivky M k původním křivkám K a L příslušící.

10. Že dotyčný bod m, jak jsme ve článku 7. dokázali, leží na přímce P, body k a p spojující, lze dokázati také následovním jednoduchým způsobem, dáme-li rovinným útvarům význam průmětů jistých útvarů prostorových.

Pokládejme přímky ${}^1O$ a R za dvě přímky jednoplochého hyperboloidu, v nichž průmětna π tuto plochu protíná. Křivky M' a L' pokládejme za obrysy dvou průmětů centrálných (o středech s' a s'') této plochy na průmětnu π. Obě tyto křivky, jež se obou přímek ${}^1O$ a R dotýkati musí, mají v těchto přímkách jeden pár společných tečen. Druhým párem společných tečen jsou přímky U a V, jež pokládati můžeme za stopy dvou rovin tečných procházejících oběma středy promítání, tedy obsahující spojnici S obou středů promítání, jejíž stopou k procházejí.

Zvolíme-li na přímkách ${}^1O$ a R body g resp. h, můžeme ji pokládati za stopy dvou přímek G a H hyperboloidu, jichž průměty centrálné G' a H' nebo G'' a H'' vzhledem k prvému i druhému centrálnému promítání dotýkají se křivky M' resp. L', protínají se v bodech t' a t'' jakožto průmětech průsečného bodu t přímek G a H. Spojnice obou přímek t' a t'' musí skutečně procházeti stopou k přímky $S \equiv s's''$.

V tom případě, že ony dva body g a h nahradíme body c a r, v nichž přímky ${}^1O$ a R jsou proťaty tečnou B, budou přímky G' a H' spadati v jednu přímku stotožňující se s přímkou B, a jejich průsečný bod t' stotožní se s bodem m, ve kterém se přímka B křivky M' dotýká. Přímky G'' a H'' stanou se přímkami A a D, protínajícími se v bodě $t'' \equiv p$. Poněvadž však, jak jsme právě dokázali, spojnice $t't''$ v tomto případě prochází bodem k, obsahuje i přímka $mv \equiv t't''$ bod k, t. j. polára P — jak jsme ji dříve označili — prochází bodem k.

11. Avšak i geometrií synthetickou docílená konstrukce dotyčného bodu m přímky B s křivkou M (článek 6.) povede nás k sestrojení středu křivosti křivky této, jestli k té okolnosti přihlížíme, že dotyčný bod m se jeví jako průsečík přímky B s přímkou $X \equiv vf$ a cestou geometrie infinitesimální odvodíme nejen rychlost, kterou se přímka B kol bodu m otáčí, nýbrž zároveň rychlost, kterou se bod tento v této přímce šine.

Za rychlost pošinutí bodu b ve přímce O zvolme opětně úsečku $\overline{b\,{}^1b}$. Z této rychlosti nalezneme rychlosti $\overline{a\,{}^1a}$, $\overline{a\,{}^2a}$, $\overline{a\,{}^3a}$ při otáčení přímky C kol bodu k a rychlosti $\overline{c\,{}^1c}$, $\overline{c\,{}^2c}$, $\overline{c\,{}^3c}$ při otáčení přímky A kol bodu l konstrukcemi ve článku 8. uvedenými Spojnice ${}^3a{}^3c \equiv {}^1B$ protíná přímku B v bodě m a charakterisuje rychlost, kterou se tato přímka otáčí.

Abychom odvodili rychlost bodu m v tečně B, přihlížíme k pohybu přímky X závislému na pohybu bodů v a f tuto přímku určujících. Pohyb bodu v jakožto průsečíku přímek $a'k$ a $c'l$ kol bodů a' a c' se otáčejících a body k a l procházejících jest však závislý na křivosti křivek K a L, jichž se přímky C resp. A při pohybu svém dotýkají.

Při otáčení tečny C kol bodu k, jehož rychlost jest přímkou ^1C charakterisována, pošine se zároveň bod k v této přímce rychlostí $\overline{k\,^1k}$, kterou obdržíme, když se středu křivosti ^SK křivky K spustíme ku přímce ^1C kolmici, která přímku C v bodě ^1k protíná. Z rychlosti té odvodíme rychlost k^3k bodu k při otáčení přímky $a'k$ kol bodu a' tím, že přímku $k^2k \perp a'k$ omezíme přímkou $^1k^2k \parallel a'k$. Přímka a'^2k charakterisuje nám rychlost otáčení přímky $a'k$. Z rychlosti otáčení přímky $a'k$ nalezneme rychlost otáčení $v\,^1v$ bodu v při tomto otáčení příslušící, omezíme-li přímku $v^1v \perp a'k$ přímkou $^1a^2k$.

Právě tak určíme se zřetelem k otáčení přímky A kol bodu l pomocí rychlosti $\overline{l\,^1l}$, $\overline{l\,^2l}$ rychlost otáčení $\overline{v\,^2v}$ bodu v při otáčení přímky $c'l$. Z rychlostí otáčení $\overline{v\,^1v}$ a $\overline{v\,^2v}$ bodu v průsečného přímek $a'k$ a $c'l$ kol bodů a' resp. c' se otáčejících nalezneme výslednou rychlost $\overline{v^2v}$ bodu v, vedeme-li body ^1v a ^2v přímky rovnoběžné s přímkou $a'k$ resp. $c'l$, kteréž se protínají v bodu ^2v.

Abychom stanovili pohyb průsečného bodu f přímek $a'a$ a $c'c$, odvodíme si z rychlosti $\overline{a\,^2a}$, kterou se bod a ve přímce O pohybuje, rychlost otáčení $\overline{a\,^4a}$ bodu tohoto kol bodu a', omezíme-li $a^4a \perp a'a$ přímkou $^2a^4a \parallel a'a$. Přímka a'^4a charakterisuje rychlost otáčení přímky $a'a$. Úsečka $\overline{f\,^1f} \perp a'a$ omezená přímkou a'^4a vyjadřuje rychlost bodu f při tomto otáčení přímky a^1a. Právě tak stanovíme se zřetelem k pohybu bodu c ve přímce ^1O rychlost otáčení $\overline{f\,^2f}$ bodu f při otáčení přímky $c'c$.

Z rychlostí otáčení $\overline{f\,^1f}$ a $\overline{f\,^2f}$ bodu průsečného f přímek $a'a$, $c'c$ kol bodů a' a c' se otáčejících odvodíme rychlost výslednou $\overline{f\,^3f}$ bodu f, vedeme-li body ^1f a ^2f přímky rovnoběžné s přímkou a^1a resp. $c'c$ v bodě ^2f se protínající.

Z rychlostí $\overline{v\,^3v}$ a $\overline{f\,^3f}$ najdeme si rychlosti $\overline{v\,^4v}$ a $\overline{f\,^3f}$ bodů v a f tím, že přímky $v^4v \parallel B$ a $f\,^4f \parallel B$ protneme přímkami $^3v\,^4v$ a $^3f\,^4f$ rovnoběžnými s přímkou K.

Přímka $^4v^4f$ protíná přímku B v bodě ^1m, jenž omezuje úsečku $\overline{m\,^1m}$ vyjadřující hledanou rychlost bodu m ve přímce B.

Kolmice ${}^1mo$ s bodu ${}^1m$ ku přímce ${}^1B$ spuštěná protíná normálu N v bodě m ku křivce B sestrojenou v hledaném středu křivosti o křivky M.

12. Konečně můžeme přistoupiti k tomu nejobecnějšímu případu sestrojení středu křivosti křivky M, kdy pohyb trojúhelníka abc jest takový, že mimo dotyk stran $C \equiv ab$, $A \equiv bc$ s křivkami K a L probíhají body abc místo tří přímek O, O' a ${}^1O$ tři křivky E, E' a ${}^1E$ těchto přímek v bodech a, b a c se dotýkajících.

Sestrojení dotyčného bodu synthetické i geometrií infinitesimální bude stejné jako v případě předcházejícím. Také sestrojení rychlosti otáčení přímky B zůstane stejným. Změní se do jisté míry jen sestrojení rychlosti bodu m ve přímce B.

Nahradivše přímky O, O' a ${}^1O$ křivkami E, E' a ${}^1E$ musíme k tomu přihlížeti, že přímky O, O' a ${}^1O$ nyní tečny těchto křivek budou se při pohybu proměnného trojúhelníka abc zároveň pohybovati t. j. otáčeti kol bodů a, b a c rychlostmi, které jsou závisly na rychlostech $\overline{b\,{}^1b}$, $\overline{a\,{}^2a}$ a $\overline{c\,{}^2c}$ bodů těchto ve přímkách O, O' a ${}^1O$ a zároveň na křivosti příslušných křivek E, E' a ${}^1E$.

Budou-li přímky O, O' a ${}^1O$ pohyblivy, budou se i body a', b' a c' pohybovati, a tím se stane pohyb přímek $a'k$, $c'l$ v bodě v se protínajících a přímek $a'a$, $c'a$ v bodě f složitějším a tím i stanovení rychlosti pohybu bodu v a f.

Pošine-li se bod b rychlostí $\overline{b\,{}^1b}$ ve přímce O', otočí se zároveň tato přímka jistou rychlostí, která charakterisována bude kolmicí spuštěnou s bodu b ku spojnici $s_E{}^1b$ a omezující ve přímce $a'\,{}^1a' \perp O'$ úsečku $\overline{a'\,{}^1a'}$ vyjadřující rychlost bodu a' při tomto otáčení tečny O'. Zrovna tak z rychlosti $\overline{c\,{}^2c}$ v tečně ${}^1O$ a ze středu křivosti křivky ${}^1E$ určíme sobě rychlost otočení tečny ${}^1O$, jakož i rychlost $\overline{a'\,{}^2a'}$, kterou se bod a' při otáčení této tečny pohybuje.

Z obou rychlostí $\overline{a'\,{}^3a'}$ a $\overline{a'\,{}^2a'}$ bodu a' jakožto průsečného bodu přímek O' a ${}^1O$ sestrojíme rychlost výslednou $\overline{a'\,{}^3a'}$ sestrojením rovnoběžek $\overline{{}^1a'\,{}^3a'}$, $\overline{{}^2a'\,{}^3a'}$ ku přímkám O' resp. ${}^1O$, kteréž se v bodě ${}^3a'$ protínají.

Týmž způsobem určíme pomocí rychlosti $\overline{a\,{}^2a}$ bodu a ve přímce O a středu křivosti o_E křivky E s použitím rychlosti

b^1b a středu křivosti s_E rychlost výslednou $\overline{c'^3c'}$, kterou se bod c' při pohybu přímek O a O' jakožto tečen křivek E a E' pohybuje.

Z rychlosti $\overline{a'^3a'}$ a $\overline{k^3k}$, (kterou týmž způsobem jako ve článku předcházejícím sestrojíme,) najdeme rychlost $\overline{v^1v}$ bodu v z tohoto složitého pohybu přímky $a'k$ vyplývající. Stejně stanovíme z rychlostí $\overline{c'^3c'}$ a $\overline{l^2l}$ rychlost $\overline{v^2v}$ odpovídající složitějšímu pohybu přímky $c'l$.

Poněvadž i přímky $a'a$ a $c'c$ v bodě f se protínající na základě pohybů bodů a' a c' s rychlostmi $\overline{a'^3a'}$ a $\overline{c'^3c'}$ konaných v tomto případě složitěji se pohybují, jest nutno také rychlosti $\overline{f^1f}$ a $\overline{f^2f}$ znova sestrojovati.

Sestrojivše na konec výsledné rychlosti $\overline{v^3v}$ a $\overline{f^3f}$ bodů v a f pokračujeme v dalším při sestrojování středu křivosti křivky M právě tak, jako ve článku předcházejícím.

O projektivní definici úhlu dvou rovin.

Napsal **Bohuslav Hostinský.**

1. Metrické vlastnosti geometrických útvarů jest možno interpretovati jako vlastnosti polohy ve smyslu projektivní geometrie, zkrátka redukovati je na dvojpoměry, které jsou určeny vztahem útvarů daných k t. zv. útvaru absolutnímu.

V Euklidově geometrii dospějeme k takové interpretaci zavedením Ponceletovy absolutní kružnice (Σ), která má v každé soustavě pravoúhlých souřadnic homogenních (x, y, z, t) rovnice

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0, \quad t = 0. \qquad (\Sigma)$$

V následujícím jde o definici úhlu φ dvou rovin α a β, založenou na vztahu těch rovin k (Σ); místo známé definice Laguerreovy (I) lze zavésti ekvivalentní definici (II).

2. Za tím účelem jest výhodno odvoditi parametrické vyjádření bodů na kružnici (Σ). Jsou-li všechny komplexní hodnoty proměnného parametru λ (inklusive $\lambda = \infty$) ve vzájemně jednoznačném vztahu s body ležícími na (Σ), shoduje se toto vyjádření s parametrickým vyjádřením povrchových přímek na