Antonín Libický

Úvod do vektorové analyse. [VII.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 36 (1907), No. 5, 480--483

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121738`

Úvod do vektorové analyse.

Napsal řed. **Ant. Libický.**

(Pokračování.)

V tom případě vyhovuje vektor **v** podmínečné rovnici

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial z^2} = 0, \tag{114^b}$$

která jest obdobnou k známé rovnici Laplace-ově pro veličiny skalární:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0\ ^{*});$$

pole takových vektorů zoveme také *polem Laplace-ovým*.

Poslední z výše vytčených výrazů jest ∇ *curl* **v**, což jest patrně dyada, jak vyplývá i z toho, že můžeme výraz ten psáti $\nabla [\nabla \times \mathbf{v}]$ čili (dle 22^a) $(\nabla\nabla)\,\mathbf{v}$; pro tuto dyadu obdržíme nonion

$$\nabla\ curl\ \mathbf{v} = \frac{\partial^2 v_y}{\partial z\,\partial x} - \frac{\partial^2 v_z}{\partial x\,\partial y},\ \frac{\partial^2 v_y}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2},\ \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 v_z}{\partial z\,\partial y}$$
$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial x\,\partial z},\ \frac{\partial^2 v_z}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial y\,\partial z},\ \frac{\partial^2 v_z}{\partial z\,\partial x} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}$$
$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v_y}{\partial y\,\partial x},\ \frac{\partial^2 v_x}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 v_y}{\partial z\,\partial x}. \tag{115}$$

Ke konci těchto úvah o differenciálním počtu pole vektorového připojíme jako příklad některé vývody o známém *poli gravitačním* či *Newtonově*. Všechny vektory tohoto pole směřují do středu přitažlivosti C; velikost jejich dána jest výrazem $\frac{\varkappa}{r^2}$, kde $\varkappa$ značí konstantu a r vzdálenost libovolného bodu M pole od C. Pročež v tomto případě vektor

$$\mathbf{v} = -\frac{\varkappa}{r^2}\,\mathbf{r}_1,$$

je-li $\mathbf{r}_1$ jednotkový vektor průvodiče $\mathbf{r}$, vedeného od počátku C k bodu M.

---

*) Viz Dr. A. Seydler: „Theorie potenciálu", pag. 27.

Trubice vektorové jsou patrně kuželovité o vrcholu C; protneme-li velice úzkou takovou trubici plochou kulovou, opsanou kolem bodu C, obdržíme plošný prvek, jemuž příslušející vektor $d\mathbf{p}$ má běh průvodiče a jehož velikost jest σr^2, jestliže σ znamená plochu podobného prvku na ploše kulové o témž středu C, mající poloměr rovný jednotce délky. Pročež tok vektorový

$$\mathbf{v} \,.\, d\mathbf{p} = -\frac{\varkappa}{r^2}\mathbf{r}_1 \,.\, \sigma r^2 \mathbf{r}_1 = -\varkappa\sigma,$$

jest tedy stálý, t. j. trubice vektorové jsou proudovými vlákny (ovšem v prostoru mimo těleso přitahující). Jest tedy pole gravitační polem solenoidálním, jak také vyplývá z hodnot $\nabla\mathbf{v}$, *div* $\mathbf{v}$ a *curl* $\mathbf{v}$, vypočtených pro kterýkoli bod M pole. Buď totiž střed přitažlivosti C počátkem pravoúhlé soustavy souřadnic, jinak libovolné, v níž bod M má souřadnice x, y, z; poněvadž

$$\mathbf{v} = -\frac{\varkappa x}{r^3}\mathbf{i} - \frac{\varkappa y}{r^3}\mathbf{j} - \frac{\varkappa z}{r^3}\mathbf{k},$$

jest nejprve dle (57)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = \frac{\varkappa(2x^2 - y^2 - z^2)}{r^5}\mathbf{i} + \frac{3\varkappa xy}{r^5}\mathbf{j} + \frac{3\varkappa zx}{r^5}\mathbf{k},$$

a podobně

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} = \frac{3\varkappa xy}{r^5}\mathbf{i} + \frac{\varkappa(-x^2 + 2y^2 - z^2)}{r^5}\mathbf{j} + \frac{3\varkappa yz}{r^5}\mathbf{k},$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = \frac{3\varkappa zx}{r^5}\mathbf{i} + \frac{3\varkappa yz}{r^5}\mathbf{j} + \frac{\varkappa(-x^2 - y^2 + 2z^2)}{r^5}\mathbf{k}.$$

I bude dle (63^a) symmetrický trojčlen dyadový

$$\begin{aligned}\nabla\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} = &\frac{\varkappa(2x^2 - y^2 - z^2)}{r^5}\mathbf{ii} + \frac{3\varkappa xy}{r^5}\mathbf{ij} + \frac{3\varkappa zx}{r^5}\mathbf{ik}\\ &+ \frac{3\varkappa xy}{r^5}\mathbf{ji} + \frac{\varkappa(-x^2 + 2y^2 - z^2)}{r^5}\mathbf{jj} + \frac{3\varkappa yz}{r^5}\mathbf{jk}\\ &+ \frac{3\varkappa zx}{r^5}\mathbf{ki} + \frac{3\varkappa yz}{r^5}\mathbf{kj} + \frac{\varkappa(-x^2 - y^2 + 2z^2)}{r^5}\mathbf{kk};\end{aligned}$$

z čehož plyne *div* $\mathbf{v} = 0$, *curl* $\mathbf{v} = 0$.

Pole gravitační jest tedy nejen beze zdrojů, ale i bez vírů.

Vypočtěme ještě hodnoty pro částečné differenciální poměry vektoru **v** dle **r**, a to nejprve ve směru průvodiče, jenž tvoří s osami souřadnými úhly α, β, γ. Budiž tuto připomenuto, že, postupujeme-li od bodu M v tomto směru, nemění se běh vektoru **v**, nýbrž toliko jeho velikost. Ustanovíme-li dle vzorce (58), který lze v tomto případě psáti

$$\frac{d\mathbf{v}}{dr}=\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}\cos\gamma$$

$$=\frac{x}{r}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}+\frac{y}{r}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}+\frac{z}{r}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z},$$

výraz pro $\frac{d\mathbf{v}}{dr}$, totiž (po náležitém zjednodušení)

$$\frac{d\mathbf{v}}{dr}=\frac{2\varkappa}{r^4}(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})=\frac{2\varkappa}{r^4}\mathbf{r}=\frac{2\varkappa}{r^3}\mathbf{r}_1,$$

obdržíme vzhledem k (59^b)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}}=\frac{2\varkappa}{r^3}\mathbf{r}_1\mathbf{r}_1.$$

Po druhé volme pro částečný differenciální poměr vektoru **v** dle **r** kterýkoli z běhů $\mathbf{s}_1$ v rovině R, vedené bodem M kolmo k průvodiči **r** toho bodu; postoupíme-li od M k neskonale blízkému bodu v tomto směru, nemění se velikost vektoru **v**, nýbrž toliko jeho běh. Nazveme-li α', β', γ' úhly, jež tvoří $\mathbf{s}_1$ s osami souřadnými, bude dle (58)

$$\frac{d\mathbf{v}}{ds}=\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}\cos\alpha'+\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}\cos\beta'+\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}\cos\gamma';$$

vložíce do této rovnice hodnoty pro $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}$, $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}$, $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}$, dostaneme

$$\frac{d\mathbf{v}}{ds}=\frac{\varkappa}{r^5}\left((2x^2-y^2-z^2)\cos\alpha'+3xy\cos\beta'+3zx\cos\gamma'\right)\mathbf{i}$$

$$+\frac{\varkappa}{r^5}\left(3xy\cos\alpha'+(-x^2+2y^2-z^2)\cos\beta'+3yz\cos\gamma'\right)\mathbf{j}$$

$$+\frac{\varkappa}{r^5}\left(3zx\cos\alpha'+3yz\cos\beta'+(-x^2-y^2+2z^2)\cos\gamma'\right)\mathbf{k}.$$

První trojčlen ve větší závorce na pravé straně lze také psáti

$$3x\,(x\cos\alpha'+y\cos\beta'+z\cos\gamma')-(x^2+y^2+z^2)\cos\alpha';$$

avšak z podmínky, že $\mathbf{s}_1$ stojí kolmo na $\mathbf{r}$, plyne

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0,$$

čili, poněvadž

$$r\cos\alpha = x,\ r\cos\beta = y,\ r\cos\gamma = z,$$

též

$$x\cos\alpha' + y\cos\beta' + z\cos\gamma' = 0.$$

Pročež zmíněný trojčlen má hodnotu $-r^2\cos\alpha'$ a výraz

$$\frac{\varkappa}{r^5}\left((2x^2 - y^2 - z^2)\cos\alpha' + 3xy\cos\beta' + 3zx\cos\gamma'\right) =$$

$$-\frac{\varkappa}{r^5}r^2\cos\alpha' = -\frac{\varkappa}{r^3}\cos\alpha'.$$

Upravíme-li podobně ostatní dva sčítance na pravé straně poslední rovnice pro $\frac{d\mathbf{v}}{ds}$, nabudeme

$$\frac{d\mathbf{v}}{ds} = -\frac{\varkappa}{r^3}(\cos\alpha'\,\mathbf{i} + \cos\beta'\,\mathbf{j} + \cos\gamma'\,\mathbf{k}) = -\frac{\varkappa}{r^3}\mathbf{s}_1;$$

tudíž dle (59[a])

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\mathbf{r}_s} = -\frac{\varkappa}{r^3}\mathbf{s}_1\mathbf{s}_1.$$

Zvolme nyní novou soustavu souřadnic, jejímž počátkem jest bod M pole; osa z'-ová spadá do směru průvodiče a osami x' a y' jsou dvě na sobě kolmo stojící přímky, vedené v rovině R kolmé k průvodiči. Poněvadž pak pro tuto soustavu $\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial z'} = \frac{d\mathbf{v}}{dr}$ a $\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x'} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial y'} = \frac{d\mathbf{v}}{ds}$, jest patrno, že ellipsoid, představující úplný differenciální poměr $\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}$ v poli gravitačním, jest ellipsoidem rotačním, jehož poloosa c ve směru průvodiče má délku $\frac{2\varkappa}{r^3}$, kdežto kružnice v rovině R má poloměr $\frac{\varkappa}{r^3}$, rovnající se tedy polovici poloosy c.