Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 36 (1907), No. 5, 507--564

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121733

24. *Zákryt* ι Tauri (vel. 5,4) z $10^h 22^m$ k $11^h 26^m$. Měsíc vrcholí ve $14^h 43^m$ — J I z $12^h 52^m 58^s$.
25. *Min. Algolu* $11^h 32^m$.
26. 20^h *Konjunkce* Venuše s α Librae (Venuše $5'$ severněji).
☽ 28.
29. *Konjunkce* Jupitera s Měsícem.
31. J I z $14^h 46^m 0^s$.

N.

Úlohy.

Řešení úloh.

a) Z mathematiky.

Úloha 4.

Dodatek k úl. 4. zaslal p. *J. Pilnáček* ze VII. tř. reál. v Kladně.

V řešení této úlohy č. 4. t. časopisu opomenut byl v *a)* případ

$$5x - 2y = -1$$
$$2x + 3y - 5 = 2n.$$

Z toho

$$x = 4k + 1, \quad y = 10k + 3.$$

Úloha 7.

Sestrojiti trojúhelník, jsou-li dány: t_c, v_c, γ.

Týž.

Řešení 1. zaslal p. *Antonín Nedoma* ze VII. tř. reálky ve Velkém Meziříčí.

Vedeme-li v trojúhelníku ABC příčku $A'B' \parallel AB$, vznikne $\triangle A'B'C \sim \triangle ABC$. Tento trojúhelník můžeme sestrojiti, neboť můžeme voliti základnu $A'B'$ a známe úhel γ a odchylku těžnice od základny (z trojúhelníka pravoúhlého o přeponě t_c a odvěsně v_c).

Z toho plyne *sestrojení*:

Zvolíme libovolnou úsečku $A'B'$ za základnu trojúhelníka hledanému podobného a opíšeme nad ní jakožto tětivou kružnici K pro obvodový úhel γ. Úsečku $A'B'$ rozpůlíme bodem M a vedeme jím přímku tak, aby od základny byla odchýlena o úhel

ω, který v pomocném trojúhelníku pravoúhlém, sestrojeném z t_c a v_c, jest proti v_c. Tato přímka protne kružnici v bodě C. Na těžnici CM naneseme od bodu C délku $\overline{CP} = t_c$ a vedeme bodem P přímku rovnoběžnou s $A'B'$, kteráž protíná přímky $\overline{CA'}$ a $\overline{CB'}$ v hledaných dalších vrcholech A a B.

Řešení 2. zaslal p. *K. Altmann* ze VI. tř. g. v Přerově.

Prodlužme těžnici CD přes bod D, aby $\overline{CM} = 2t_c$; pak je obrazec $AMBC$ rovnoběžník, ve kterém $\sphericalangle\, CBM = 2R - \gamma$. Sestrojíme tedy nad $2t_c$ oblouk pro obvodový úhel $2R - \gamma$. Nad CD jako přeponou sestrojíme pak pravoúhlý trojúhelník CDE o odvěsně $\overline{CE} = v_c$. Vrchol B je průsečík $\overline{DE}$ s kružnicí; pak $\overline{DA} = \overline{DB}$.

Úloha 8.

Sestrojiti trojúhelník, jsou-li dány: t_c, u_c, c (algebr. analysí).

Týž.

Řešení zaslal p. *Ladislav Vacík* ze VI. tř. reálky v Novém Městě na Moravě.

Obsah trojúhelníka jest (při obvyklém označení)

$$\triangle = \frac{1}{2} ab \sin \gamma = \frac{1}{2} au_c \sin \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} bu_c \sin \frac{\gamma}{2},$$

čili

$$2ab \cos \frac{\gamma}{2} = u_c (a + b). \tag{1}$$

Dále

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \tag{2}$$

a

$$a^2 + b^2 = 2 \left[t_c^2 + \left(\frac{c}{2} \right)^2 \right]. \tag{3}$$

Poznamenáme-li

$$t_c^2 - \left(\frac{c}{2} \right)^2 = m^2, \quad t_c^2 + \left(\frac{c}{2} \right)^2 = n^2,$$

$$\frac{m^2}{u_c} = d, \quad m^2 - d^2 = k^2, \quad \frac{k^2}{n} = h, \quad \frac{d^2}{n} = p;$$

tu po delší úpravě řešením prvních tří rovnic dostaneme

$$\cos \gamma = \frac{-h + \sqrt{h^2 + 4pn}}{2n},$$

pomocí kterého úhel γ dá se sestrojiti.

Pak přechází úloha na snadno řešitelnou úlohu: c, t_c, γ.

Úloha 9.

Dokažte: má-li mnohostěn, pro který platí věta Eulerova, býti omezen úhelníky o vesměs stejném počtu stran, nemůže tento počet stran přestoupiti číslo 5. Dr. *B. Bydžovský.*

Řešení zaslal p. *K. Holeček* ze VII. tř. reálky v Praze-III.

Jak známo, platí

$$s + v = h + 2$$
$$3v \leqq 2h.$$

Je-li počet stran jedné stěny m, jest

$$s + v = \frac{ms}{2} + 2,$$

čili

$$v = \frac{ms - 2s + 4}{2}.$$

Potom

$$\frac{3}{2}(ms - 2s + 4) \leqq ms,$$

nebo

$$s\,(6 - m) \geqq 12,$$

poněvadž oba činitelé musí býti větší nully, musí

$$6 - m > 0,$$

čili

$$m < 6, \quad \text{c. b. d.}$$

Úloha 10.

Dokažte: je-li těleso omezeno pětiúhelníky a mimo to úhelníky, jichž počet stran přesahuje 6, je pětiúhelníků vždy nejméně o 12 více než všech ostatních stěn dohromady.

Týž.

Řešení zaslal p. *Jaromír Pilnáček* ze VII. tř. reálky v Kladně.

Těleso budiž omezeno p pětiúhelníky a vedle toho s úhelníky o počtu stran $(7 + \varepsilon_1)$, $(7 + \varepsilon_2) \ldots (7 + \varepsilon_s)$, kdež ε_k je buď nulla, neb kterékoli číslo kladné. $(\varepsilon_k \geqq 0)$.

I jest pak počet hran

$$h = \frac{5p + 7s + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots \varepsilon_s)}{2}$$

a počet vrcholů dle věty Eulerovy

$$v = \frac{3p + 5s + 4 + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots \varepsilon_s)}{2}.$$

Dosazením hodnot pro h, v do známé relace

$$3v \leqq 2h$$

dostaneme po úpravě: $p \geqq 12 + s + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots \varepsilon_s)$, aneb, zavedeme-li ještě $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots \varepsilon_s) = x$; $(x \geqq 0)$, máme konečně $p \geqq 12 + s + x$; $(x \geqq 0)$, čímž důkaz proveden.

Úloha 11.

a) O čtyřúhelník daný opsati jest rovnoběžník pravoúhlý podobný danému.

b) Kdy jsou všechny pravoúhelníky, opsané danému čtyřúhelníku, navzájem podobny? Řed. *A. Strnad.*

Řešení zaslal p. *Rud. Novotný* z VIII. tř. gymn. v Kyjově.

a) Daný čtyřúhelník budiž A, B, C, D, strany obdélníka a, b. Vedeme-li v pravoúhelníku mezi protějšími stranami příčky na sobě kolmé, jsou tyto, jak snadno lze dokázati, v přímém poměru se stranami. Zvolme za jednu příčku diagonálu daného čtyřúhelníka, na př. BD a za druhou příčku kolmici z bodu C na BD spuštěnou a na tuto kolmici nanesme úsečku x, danou úměrou $x : BD = a : b$ (nebo úměrou $x : BD = b : a$). Úsečka $x = CE$ jest pak druhou příčkou v hledaném pravoúhelníku, jehož jedna strana prochází bodem E a zároveň bodem A, čímž jest sestrojena jedna strana opsaného pravoúhelníka. Učiňme dále $BA' \perp AE$, $DD' \perp AE$, $C'(C)B' \parallel AE$ a čyřúhelník $A'B'C'D'$ jest žádaný pravoúhelník.

Řešení jest obecně *8*, z nichž vybrati lze případy, kdy pravoúhelníky opravdu jsou čtyřúhelníku opsány.

b) Stojí-li v daném čtyřúhelníku diagonály na sobě kolmo, tvoří samy dvojici takových příček, o kterých byla dříve řeč, a tedy platí úměra $a : b = u : u_1$. Poněvadž poměr $u : u_1$ jest stálý, jest i poměr $a : b$ stálý a tedy všechny opsané pravoúhelníky jsou si podobny a nelze tedy takovému čtyřúhelníku obecně pravoúhelník libovolného tvaru opsati.

Úloha 12.

Jsou-li a, b, c, d délky stran čtyřúhelníka do kružnice vepsaného, kterou mocnost k této kružnici má průsečík úhlopříček?
Tý ř.

Řešení zaslal p. *Rud. Přidal* z VIII. tř. g. v Přerově.

Nazveme-li v čtyřúhelníku z tětiv $ABCD$ průsečík úhlopříčen O, jest jeho mocnost

$$M = -OA \,.\, OC.$$

Budiž $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$ atd.. $\sphericalangle ABO = \delta$, $\sphericalangle CBO = \gamma$ a úhel úhlopříček ω. Pak dle sinové věty

$$OA \,.\, OC = \frac{a \,.\, b \,.\, \sin\gamma \sin\delta}{\sin^2\omega}. \tag{1}$$

Spojíme-li vrcholy se středem kružnice, objeví se u středu středové úhly 2γ a 2δ, které kolmicemi ze středu na strany c a d spuštěnými se rozpůlí. Odtud

$$\sin\gamma = \frac{c}{2r}, \quad \sin\delta = \frac{d}{2r}.$$

Obsah čtyřúhelníka

$$P = \frac{a \,.\, c + b \,.\, d}{2} \sin\omega = \frac{1}{4r}\sqrt{(ab + cd)(bc + ad) \,.\, (ac + bd)},$$

z čehož

$$\sin\omega = \frac{1}{2r}\sqrt{\frac{(ab + cd)(bc + ad)}{ac + bd}}.$$

Dosadíme-li hodnoty sinů do rovnice (1), obdržíme

$$M = -\frac{abcd\,(ac + bd)}{(ab + cd)(bc + ad)}.$$

Úloha 13.

Buďtež ab ⊥ cd dva navzájem kolmé průměry kružnice, o její střed; poloměr oc jest tětivou ef kolmo půlen v bodě g. a) Přeneseme-li na ob délku $\overline{oh} = \overline{og}$, a protíná-li spojnice eh kružnici v bodě k, jest tětiva fk přibližně rovna straně pravidelného devítiúhelníka dané kružnici vepsaného.

b) Tětivy ac, ef protínají se v bodě l; přeneseme-li na oc délku cm = cl a protíná-li spojnice bm kružnici v bodě n, jest tětiva an přibližně rovna straně pravidelného jedenáctiúhelníka, vepsaného dané kružnici. Přesnost obou konstrukcí buď vyšetřena.

Týž.

Řešení zaslal p. *B. Pivnička* ze VI. tř. r. na Král. Vinohradech.

a) Z popsaného obrazce je zřejmo, že

$$tg\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}-1}{2},$$

z čehož $\alpha = 20^0 6' 14''$; z toho vyplývá pro středový úhel jedné strany chyba $40^0 12' 28'' - 40^0 = 12' 28''$ a pro celý obvod asi $+ 1^0 52'$. V délce strany objevuje se chyba

$$fk - s_9 = 2r\ sin\ \alpha - 2r\ sin\ 20^0 \doteq + 0{\cdot}00341\ r.$$

b) Z příslušného obrazce vyplývá

$$\overline{cm} = \overline{cl} = \frac{\overline{ac}}{2} = \frac{r}{2}\sqrt{2},$$

$$\overline{om} = r - \overline{cm} = r\ .\ \frac{2-\sqrt{2}}{2};$$

z $\triangle\ omb$ jest

$$tg\ \alpha = \frac{mo}{ob} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} = 0{\cdot}29289,$$

$$\alpha \doteq 16^0 19' 30''.$$

Chyba pro středový úhel jedné strany:

$$32^0 39' - 32^0 43' 38'' = - 4' 38'',$$

a pro celý obvod tedy asi $- 51'$.

V délce strany jeví se chyba asi $- 0{\cdot}0013\ r$.

Úloha 14.

Strany čtverce mají od průmětny odchylky α, β; které úhly tvoří s průmětnou jeho úhlopříčky? Týž.

Řešení zaslal p. *M. Trna* ze VII. tř. g. v Olomouci.

Nazveme stranu čtverce *a*, jeden vrchol jeho budiž v průmětně a budiž $\alpha > \beta$. Vzdálenosti koncových bodů jedné úhlopříčky u_1 od průmětny jsou

$$m = a \,.\, sin\,\alpha,$$
$$n = a \,.\, sin\,\beta.$$

Z pravoúhlého trojúhelníka, jehož přepona jest úhlopříčna $u_1 = a\sqrt{2}$ a jedna odvěsna $m - n$, vyplývá

$$sin\,\varepsilon_1 = \frac{a\,sin\,\alpha - a\,sin\,\beta}{a\sqrt{2}} = \frac{sin\,\alpha - sin\,\beta}{2}\sqrt{2}.$$

Odchylku ε_2 druhé úhlopříčny u_2 ustanovíme z pravoúhlého trojúhelníka, jehož přepona jest $u_2 = a\sqrt{2}$ a jedna odvěsna $m + n$; jest

$$sin\,\varepsilon_2 = \frac{sin\,\alpha + sin\,\beta}{2}\sqrt{2}.$$

Úloha 15.

Buďtež δ_1 a δ_2 dvě různé úhlopříčky klence omezeného shodnými stěnami, d_1 a d_2 úhlopříčky jedné stěny. Má se dokázati vztah

$$\delta_1^2 - \delta_2^2 = 2(d_1^2 - d_2^2)$$

a vyšetřiti podmínku, za které při daných δ_1 a δ_2 lze klenec takový sestrojiti. Dr. *Josef Tomáš.*

Řešení zaslal p. *E. Syrový* ze VII. tř. g. v Mladé Boleslavi.

Veďme v klenci řezy rovnoběžnými úhlopříčnami protějších stěn a obdržíme:

I. obdélník, mající strany d_1 a h (hrana klence); poněvadž

$$h = \tfrac{1}{2}\sqrt{d_1^2 + d_2^2},$$

jest

$$\delta_2^2 = d_2^2 + \tfrac{1}{4}(d_1^2 + d_2^2),$$

t. j.

$$4\delta_2^2 = 5d_2^2 + d_1^2; \qquad (1)$$

II. kosodélník mající strany h, d_1 a úhlopříčny δ_1 a δ_2. Nazveme-li úhel hranový ω, jest

$$\delta_1^2 = \tfrac{1}{4}(d_1^2 + d_2^2) + d_1^2 - 2hd_1\,cos\,\omega,$$
$$\delta_2^2 = \tfrac{1}{4}(d_1^2 + d_2^2) + d_1^2 + 2hd_1\,cos\,\omega,$$

a tedy

$$2(\delta_1^2 + \delta_2^2) = d_2^2 + 5d_1^2. \qquad (2)$$

Odečteme-li od rovnice (2) rovnici (1), dostaneme

$$2\delta_1^2 - 2\delta_2^2 = 4d_1^2 - 4d_2^2,$$

čili

$$\delta_1^2 - \delta_2^2 = 2\,(d_1^2 - d_2^2) \text{ c. b. d.}$$

Je-li dáno δ_1 a δ_2, lze d_1 a d_2 vypočítati z rovnic (1) a (2); vychází

$$d_2 = \tfrac{1}{2}\sqrt{3\,(9\delta_2^2 - \delta_1^2)}.$$

Aby výraz ten byl reálný, musí

$$\delta_2 > \frac{\delta_1}{3}.$$

Jsou-li dány d_1 a d_2 musí, jak lze se podobně přesvědčiti,

$$d_2 < d_1\sqrt{3}.$$

Úloha 16.

Úsečka spojující středy dvou mimoběžných hran pravid. čtyrstěnu budiž průměrem koule. Pomocí rozšířeného principu Cavalieriho odvoditi jest známý vzorec pro krychlový obsah koule z obsahu čtyrstěnu. Vysloviti ono rozšíření věty Cavalieriho, jak se ho zde užije. *Týž.*

Řešení zaslal p. *Jar. Krejzlík* z V. tř. kníž. arcib. semináře v Kroměříži.

Stěnové úhlopříčny krychle jsou hranami dvou pravidelných čtyrstěnů; jeden z nich si zvolme ke své úvaze. Úhlopříčna BD jedné stěny krychle a mimoběžná s ní úhlopříčna A_1C_1 v protější stěně krychle jsou protější hrany tohoto čtyrstěnu. Každá rovina s těmito úhlopříčkami a tedy i s těmi stěnami rovnoběžná seče čtyrstěn v pravoúhelníku.

Vedeme-li takovouto rovinu sečnou ve vzdálenosti v_1 od jedné stěny krychle a v_2 od protější stěny, jsou rozměry rovnoběžníka patrně $v_1\sqrt{2}$ a $v_2\sqrt{2}$ a tedy jeho obsah

$$p_1 = 2v_1 v_2.$$

Koule do krychle vepsaná dotýká se úhlopříčen A_1C_1 a BD v jejich středech a průměr její rovná se hraně krychle. Zmíněná rovina sečná protíná ji v kruhu, jehož obsah

$$p_2 = \pi\varrho^2 = \pi v_1 v_2.$$

Z toho

$$p_1 : p_2 = 2 : \pi.$$

Jestliže však dvě tělesa lze v prostoru umístiti tak, že každá rovina jisté osnovy protíná je v obrazcích stálého poměru, jsou i obsahy těch těles v témž poměru; tedy platí

$$O_s : O_k = 2 : \pi.$$

Obsah čtyrstěnu O_s však rovná se jedné třetině obsahu krychle, ze kteréž povstane odebráním čtyř jehlanů, které mají s krychlí stejnou výšku a poloviční základnu; jest tedy, protože hrana krychle má délku $2r$,

$$O_s = \tfrac{8}{3} r^3.$$

Z nahoře napsané úměry vyplývá pak

$$O_k = \tfrac{4}{3} \pi r^3.$$

Úloha 17.

Jak se početně vyšetří poloha bodu $m_4 (x_4, y_4)$ vzhledem k trojúhelníku o vrcholech $m_1 (x_1, y_1)$, m_2, m_3 (t. j. ve které ze sedmi částí roviny, které povstanou, prodloužíme-li strany trojúhelníka $m_1 m_2 m_3$, leží bod m_4)? Provésti ku př. pro $m_1 (-3, 1)$, $m_2 (5, -2)$, $m_3 (1, 6)$, $m_4 (0, 0)$ [nebo $m_4 (6, -3)$]. *rv.*

Řešení zaslal p. *Emil Syrový* ze VII. tř. gymn. v Ml. Boleslavi.

Nazveme-li vnitřek trojúhelníka P, část roviny mezi stranami přes vrchol m_k prodlouženými P_k a ostatní část roviny mezi týmiž stranami P'_k, rozdělí se celá rovina v sedm částí $P, P_1, P_2, P_3, P'_1, P'_2, P'_3$.

Z odvození vzorce pro obsah trojúhelníka $m_1 m_2 m_3$ vyplývá, že obsah ten vychází kladně, je-li smysl obvodu trojúhelníka kladný, t. j. obcházíme-li obvod v pořádku vrcholů m_1, m_2, m_3, je smysl našeho pohybu opačný než smysl pohybu konce rafije hodinové; v opačném případě obsah vychází záporně.

K řešení dané úlohy stačí ustanoviti znamení čtyř determinantů udávajících dvojnásobné obsahy trojúhelníků $m_1 m_2 m_3 = \Delta$, $m_1 m_2 m_4 = \Delta_3$, $m_2 m_3 m_4 = \Delta_1$ a $m_3 m_1 m_4 = \Delta_2$.

Dejme tomu, že $\Delta > 0$;

bod m_4 je pak v P, je-li $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$;
" m_4 " " " P_1, " $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 < 0$, $\Delta_3 < 0$;
" m_4 " " " P_2, " $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$;
" m_4 " " " P_3, " $\Delta_1 < 0$. $\Delta_2 < 0$, $\Delta_3 > 0$;
" m_4 " " " P'_1, " $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$;
" m_4 " " " P'_2, " $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 < 0$, $\Delta_3 > 0$;
" m_4 " " " P'_3, " $\Delta_1 > 0$ $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$.

Je-li $\Delta < 0$, pak platí věty právě napsané po změně všech směrů nerovností.

Je-li $\Delta_1 = 0$, jest bod na straně $m_2 m_3$, a to *mezi* těmito body, jestliže při $\Delta > 0$ jest $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$; jest *vně* úsečky $m_2 m_3$, a to na straně bodu m_2, jestliže při kladném Δ jest $\Delta_2 > 0$ a $\Delta_3 < 0$ atd.

V daných zvláštních případech jest *a*) $2\Delta = +52$, $2\Delta_1 = 33$. $2\Delta_2 = 19$, $2\Delta_3 = 2$; bod m_4 jest tedy v P. *b*) $2\Delta = 52$, $2\Delta_1 = -4$, $2\Delta_2 - 61$, $2\Delta_3 = -5$, bod m_5 je tedy v P_2.

Úloha 18.

Tři body a, b, c pohybují se po třech daných přímkách A, B, C danými rychlostmi v kladném směru (ve směru svírajícím daný úhel s kladnou částí osy X). Po které době dospějí do polohy a', b', c' stanovící trojúhelník minimálního nebo maximálního obsahu?
Řed. *A. Strnad.*

Řešení zaslal p. *Frant. Pražan* ze VI. tř. g. v Hradci Králové.

Nechť jsou body určeny v pravoúhlé soustavě $a(x_1, y_1)$, $b(x_2, y_2)$, $c(x_3, y_3)$ a jejich rychlosti buďtež c_1, c_2, c_3.

Pak po čase t dostanou se do polohy $a'(x'_1, y'_1)$, $b'(x'_2, y'_2)$, $c'(x'_3, y'_3)$, kdež

$$\begin{array}{l|l|l} x'_1 = x_1 + c_1 t \cos\alpha & x'_2 = x_2 + c_2 t \cos\beta & x'_3 = x_3 + c_3 t \cos\gamma, \\ y'_1 = y_1 + c_1 t \sin\alpha & y'_2 = y_2 + c_2 t \sin\beta & y'_3 = y_3 + c_3 t \sin\gamma. \end{array}$$

Je-li obsah $\triangle abc = \triangle$, $\triangle a'b'c' = \triangle'$, jest

$$2\triangle' = \begin{vmatrix} x_1 + c_1 t \cos\alpha, & y_1 + c_1 t \sin\alpha, & 1 \\ x_2 + c_2 t \cos\beta, & y_2 + c_2 t \sin\beta, & 1 \\ x_3 + c_3 t \cos\gamma, & y_3 + c_3 t \sin\gamma, & 1 \end{vmatrix}.$$

Determinant tento dá se vyjádřiti součtem determinantů:

$$\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix} + t \begin{vmatrix} x_1, & c_1 \sin\alpha, & 1 \\ x_2, & c_2 \sin\beta, & 1 \\ x_3, & c_3 \sin\gamma, & 1 \end{vmatrix} + t \begin{vmatrix} c_1 \cos\alpha, & y_1, & 1 \\ c_2 \cos\beta, & y_2, & 1 \\ c_3 \cos\gamma, & y_3, & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ t^2 \begin{vmatrix} c_1 \cos\alpha, & c_1 \sin\alpha, & 1 \\ c_2 \cos\beta, & c_2 \sin\beta, & 1 \\ c_3 \cos\gamma, & c_3 \sin\gamma, & 1 \end{vmatrix} = 2\triangle'$$

čili při zavedení stručného označení:

$$\triangle + t\,(\triangle_1 + \triangle_2) + \triangle_3\, t^2 = 2\triangle'.$$

Jest tedy $\triangle'$ vyjádřeno jako kvadratická funkce času. Maximum nebo minimum najdeme, buď položíme-li diskriminant rovným nulle, nebo jestliže derivujeme

$$2\,\frac{d\triangle'}{dt} = 2\triangle_3 t + (\triangle_1 + \triangle_2)$$

a položíme derivaci

$$2\triangle_3 t + \triangle_1 + \triangle_2 = 0.$$

Z toho hledaný čas

$$t = -\,\frac{\triangle_1 + \triangle_2}{2\triangle_3}$$

a extrémní hodnota

$$\triangle' = \frac{(\triangle_1 + \triangle_2)^2}{4\triangle_3} - \triangle.$$

Úloha 19.

Vyšetřiti útvar daný v soustavě pravoúhlé rovnicí

$$a)\; 3\sqrt{x} + 4\sqrt{y} = 5\sqrt{x+y}$$

$$b)\; 14\sqrt{x} + 5\sqrt{y} = 10\sqrt{x+y}$$

Týž.

Řešení zaslal p. *Josef Hendrich* z VIII. tř. g. v Přerově.

a) Po dvojím zmocnění a úpravě obdržíme rovnici

$$256x^2 - 288xy + 81y^2 = 0$$

čili

$$(16x - 9y)^2 = 0.$$

Rovnice tudíž značí dvě splývajících přímek jdoucích počátkem.

b) Po jednom zmocnění dostaneme rovnici

$$96x + 140\sqrt{xy} - 75y = 0.$$

Dělíme y a řešíme dle $\sqrt{\frac{x}{y}}$. I bude

$$\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{5}{12} \text{ nebo } \sqrt{\frac{x}{y}} = -\frac{15}{8}.$$

Tyto dvě rovnice a tudíž i rovnice předložená značí dvé přímek jdoucích počátkem a majících rovnice

$$y = \frac{144}{25}x$$

a

$$y = \frac{64}{225}x.$$

Úloha 20.

Dány jsou body $a(12, 8)$, $b(0, 2)$, $c(8, 0)$ *a přímky* $A \equiv x - 2y + 10 = 0$, $B \equiv 2x - y - 7 = 0$, $C \equiv x + y + 4 = 0$. *Ustanovte trojúhelník, jehož vrcholy* a_1, b_1, c_1 *leží po řadě na přímkách* A, B, C *a jehož strany* b_1c_1, c_1a_1, a_1b_1 *procházejí po řadě body* a, b, c. *Tý.*

Řešení zaslal p. *Bohumír Pivnička* ze VI. tř. reál. na Král. Vinohradech.

Bod $a_1(x_1, y_1)$ má býti na A, $b_1(x_2, y_2)$ na B a $c_1(x_3, y_3)$ na C; proto musí

$$x_1 - 2y_1 + 10 = 0, \tag{1}$$

$$2x_2 - y_2 - 7 = 0, \tag{2}$$

$$x_3 + y_3 + 4 = 0. \tag{3}$$

Body a, b_1, c_1 musí ležeti na jedné přímce; podobně b, a_1, c_1 a c, a_1, b_1; z toho

$$\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{y_2 - 8}{x_2 - 12}, \tag{4}$$

$$\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_1 - 2}{x_1}, \tag{5}$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2}{x_2 - 8}. \tag{6}$$

Z těchto 6 rovnic lze 6 neznámých vypočísti.

Z rovnic (1), (2), (3) vypočteme

$$x_1 = 2y_1 - 10, \quad y_2 = 2x_2 - 7, \quad y_3 = -x_3 - 4$$

a vložíme do upravených (4), (5), (6).

Tu jest

$$-x_2 x_3 + 4x_2 + 9x_3 = 12 \ldots x_2 = \frac{9x_3 - 12}{x_3 - 4}, \qquad \text{(I)}$$

$$x_3 y_1 + 4y_1 - 4x_3 = 20 \ldots y_1 = \frac{20 + 4x_3}{x_3 + 4}, \qquad \text{(II)}$$

$$x_2 y_1 - 2y_1 - 12x_2 = -42. \qquad \text{(III)}$$

Po dosazení do rovnice (III) a úpravě:

$$19x_3^2 + 82x_3 + 88 = 0;$$

z toho dvě hodnoty pro x_3:

$$x_3 = -2, \quad x'_3 = -2\tfrac{6}{19}.$$

Postupným dosazováním ostatní hodnoty.

Úloha jest dvojznačná.

Souřadnice vrcholů hledaného trojúhelníka jsou

$$a_1(2, 6), \quad b_1(5, 3), \quad c_1(-2, -2);$$

nebo

$$a'_1(2\tfrac{3}{4}, 6\tfrac{3}{8}) \quad b'_1(5\tfrac{1}{5}, 3\tfrac{2}{5}), \quad c'_1(-2\tfrac{6}{19}, -1\tfrac{13}{19}).$$

Úloha 21.

Vypočísti rovnici společné tečny parabol

$$y^2 = 2px$$
$$x^2 = 2qy$$

a obsah obrazce omezeného oběma parabolami a tou společnou tečnou. *Ant. Lochmann.*

Řešení zaslal p. *Josef Loutocký* z VIII. tř. g. v Olomouci.

Aby přímka $y = Ax + b$ byla tečnou obou parabol $y^2 = 2px$ a $x^2 = 2qy$, musí diskriminanty obou kvadratických rovnic, které dostaneme, dosadíme-li ku př. y, vypočtené z rovnice přímky, do obou rovnic parabol, býti rovny nulle, t. j.

$$p^2 - 2Abp = 0$$
$$A^2q^2 + 2bq = 0.$$

Z toho

$$A = \sqrt[3]{-\frac{p}{q}} \text{ a } b = -\frac{\sqrt[3]{p^2q}}{2}.$$

Rovnice společné tečny je tedy

$$y = -\sqrt[3]{\frac{p}{q}}\,x - \frac{\sqrt[3]{pq}}{2}.$$

Souřadnice dotyčných bodů jsou

$$m_1\left(\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{pq^2},\ -\sqrt[3]{p^2q}\right) \text{ a}$$
$$m_2\left(-\sqrt[3]{pq^2},\ \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{p^2q}\right).$$

Obsah obrazce omezeného oběma parabolami jest patrně

$$P_1 = \tfrac{1}{3}x_3y_3,$$

značí-li x_3, y_3 souřadnice průsečíku obou parabol.

Součin x_3, y_3 dostaneme, znásobíme-li spolu rovnice obou parabol. Vedle součinu $xy = 0$ příslušícímu počátku, máme $x_3y_3 = 4pq$ a tedy

$$P_1 = \tfrac{4}{3}pq.$$

Obsah obrazce omezeného spol. tečnou a oběma křivkami jest roven obsahu pravoúhlého trojúhelníka o stranách $x_1 + x_2$, $y_1 + y_2$, zmenšenému o obsah pravoúhelníka $x_1 . y_2$ a o obsah dvou parabolických úsečí $\frac{2}{3}x_1y_1$ a $\frac{2}{3}x_2y_2$, při čemž všechny souřadnice jest tu bráti pouze v absolutních hodnotách.

Tedy

$$\begin{aligned} P_2 &= \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - x_1y_2 - \tfrac{2}{3}(x_1y_1 + x_2y_2) \\ &= 3(x_2y_1 - x_1y_2) - (x_1y_1 + x_2y_2) \\ &= \frac{5}{24}pq. \end{aligned}$$

Úloha 22.

Která reciproká rovnice čtvrtého stupně má kořeny, tvořící řadu arithmetickou? Prof. *Jar. Doležal.*

Řešení zaslal p. *Jaromír Pilnáček* ze VII. tř. reálné v Kladně.

Kořeny hledané rovnice buďtež

$$x_1,\ x_1 + d,\ x_1 + 2d,\ x_1 + 3d.$$

Aby rovnice byla reciproká, musí buď

1. $x_1(x_1 + d) = (x_1 + 2d)(x_1 + 3d) = 1,$

odkud $x_1 = \pm\sqrt{3},\ d = -\dfrac{2}{3}x_1,$

nebo 2. $x_1(x_1+2d)=(x_1+d)(x_1+3d)=1$,

odkud $x_1=\pm i\sqrt{3}, d=-\frac{2}{3}x_1$,

nebo 3. $x_1(x_1+3d)=(x_1+d)(x_1+2d)=1$,

odkud $x_1=\pm 1,\ d=0$.

Poněvadž pak rovnice, mající kořeny x_1, x_2, x_3, x_4, má tvar

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)=0,$$

nabýváme jako výsledku rovnic:

$$3x^4\pm 10x^2+3=0$$
$$x^4\pm 4x^3+6x^2\pm 4x+1=0.$$

Úloha 23.

Vyhledejte kosoúhlý trojúhelník, ve kterém poloměr ϱ kružnice vepsané tvoří se stranami a, b, c řadu arithmetickou.

Tý ř.

Řešení zaslal p. *Amos Pokorný* ze VI. tř. I. g. v Brně.

Položme $a=b-d$, $c=b+d$, $\varrho=b-2d$; pak ϱ, a, b, c tvoří arithmetickou řadu o differenci d.

Obsah trojúhelníka dle vzorce Heronova jest

$$\triangle=\tfrac{1}{4}b\sqrt{3(b^2-4d^2)};$$

ale

$$\varrho=\frac{\triangle}{s},$$

$$\varrho=\frac{\frac{1}{2}b\sqrt{3(b^2-4d^2)}}{3b}=\sqrt{\frac{b^2-4d^2}{12}}=b-2d.$$

Z toho

$$b=\frac{26}{11}d,\ \varrho=\frac{4}{11}d,\ a=\frac{15}{11}d,\ c=\frac{37}{11}d.$$

Vyhovuje tedy naší úloze každý trojúhelník, ve kterém

$$\varrho:a:b:c=4:15:26:37.$$

Úloha 24.

Základny prismatoidu mají obsah Z_1, Z_2, střední řez má obsah S; který jest obsah řezu R se základnami rovnoběžného, jsou-li jeho vzdálenosti od těchto základen v poměru $m:n$?

Řed. *A. Strnad.*

Řešení zaslal p. *Jaroslav Krejzlík* z V. tř. arcib. sem. v Kroměříži.

Mějme prismatoid o základnách $abcd = Z_1$, $efg = Z_2$, $lmnpquv = S$, $l'm'n'p'q'u'v' = R$. Zvolme v základně Z_1 bod k a spojme s e, f, g i s a, b, c, d. Obdržíme:

1. trojboký jehlan $fgek$, jenž protíná střední řez v $\triangle f_1 g_1 e_1 \backsim Z_2$, tak že
$$T_2 = \triangle f_1 g_1 e_1 = \frac{Z_2}{4};$$

2. trojboké jehlany $abkg$, $bckg$, $cdke$, $dake$. Tyto jehlany pronikají středním řezem v trojúhelnících podobných podstavám abk, bck, cdk, dak. Součet oněch trojúhelníků jest
$$T_1 = \triangle npg_1 + \triangle pqg_1 + \triangle uve_1 + \triangle vle_1$$
$$= \frac{\triangle abk}{4} + \frac{\triangle bck}{4} + \ldots = \frac{Z_1}{4};$$

3. tři čtyrstěny $ckge$, $akef$, $akgf$. Tyto čtyrstěny protínají střední řez v rovnoběžnících que_1g_1, lmf_1e_1, mng_1e_1. Součet těchto rovnoběžníků jest
$$\Sigma = P_1 + P_2 + P_3 = S - (T_1 + T_2) = S - \frac{Z_1 + Z_2}{4}.$$

Uvažujme nyní o proniku týchž pomocných jehlanů s řezem R, dělícím výšku hranolce v poměru $m : n$. Jehlany sub 1. a 2. protínají ten řez v trojúhelnících podobných trojúhelníkům vzniklým na středním řezu. Nazveme-li obdobné obrazce k T_1 a T_2 znaky T'_1 T'_2, platí patrně:
$$T'_1 : Z_1 = n^2 : (m + n)^2$$
a
$$T'_2 : Z_2 = m^2 : (m + n)^2.$$

Čtyrstěny sub 3. uvedené protínají řez R v rovnoběžnících, jichž strany mají se k rovnoběžným stranám rovnoběžníků uložených v S jako $m : \frac{m + n}{2}$, resp. $n : \frac{m + n}{2}$, z toho součet jejich
$$\Sigma' : \Sigma = 4mn : (m + n)^2$$

Z toho a z rovnice sub 3. vyplývá:
$$\Sigma' = \frac{4mn}{(m + n)^2}\left(S - \frac{Z_1 + Z_2}{4}\right)$$
a
$$R = T'_1 + T'_2 + \Sigma' = \frac{4mnS + (m - n)(mZ_2 - nZ_1)}{(m + n)^2}.$$

Poznámka. Je-li $Z_1 = Z_2 = S$, jest

$$R = \frac{4mn + (m - n)^2}{(m + n)^2} \cdot S = S,$$

a je-li libovolné $R = Z_1 = Z_2$,
jest

$$(m + n)^2 Z_1 = (m - n)^2 Z_1 + 4mnS,$$

čili

$$S = Z_1,$$

nebo dle předešlého
každé

$$R = S.$$

Úloha 25.

Dokažte správnost rovnice

$$cotg\ 1^0 = 45 + tg\ 1^0 \,.\, tg\ 2^0 + tg\ 2^0 \,.\, tg\ 3^0 + tg\ 3^0 \,.\, tg\ 4^0 + \ldots + tg\ 44^0 \,.\, tg\ 45^0.$$

Dr. *M. Haas.*

Řešení zaslal p. *Josef Ščerba* z VIII. tř. g. v Místku.

Ze vzorce

$$tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{1 + tg\,\alpha\, tg\,\beta},$$

následuje

$$tg\,\alpha\, tg\,\beta = \frac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{tg(\alpha - \beta)} - 1.$$

Dosazujeme-li do této rovnice za α, β dvojice sousedních hodnot od $1^0 - 45^0$, dostáváme:

$$tg\ 1^0\ tg\ 2^0 = \frac{tg\ 2^0 - tg\ 1^0}{tg\ 1^0} - 1,$$

$$tg\ 2^0\ tg\ 3^0 = \frac{tg\ 3^0 - tg\ 2^0}{tg\ 1^0} - 1,$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$tg\ 44^0\ tg\ 45^0 = \frac{tg\ 45^0 - tg\ 44^0}{tg\ 1^0} - 1.$$

Sečtením těchto rovnic obdržíme:

$$tg\ 1^0\, tg\ 2^0 + tg\ 2^0\, tg\ 3^0 + \ldots + tg\ 44^0\, tg\ 45^0 = \frac{tg\ 45^0 - tg\ 1^0}{tg\ 1^0} - 44$$

čili

$$cotg\ 1^0 = 45 + tg\ 1^0\ tg\ 2^0 + \ldots + tg\ 44^0\ tg\ 45^0$$ c. b. d.

Poznámka. Z výsledku vyplývá (protože dokud $\alpha < 45^0$, $0 < tg\, \alpha < 1$), že

$$45 < cotg\, 1^0 < 89.$$

Vskutku

$$cotg\, 1^0 = 57{\cdot}2900 \ldots$$

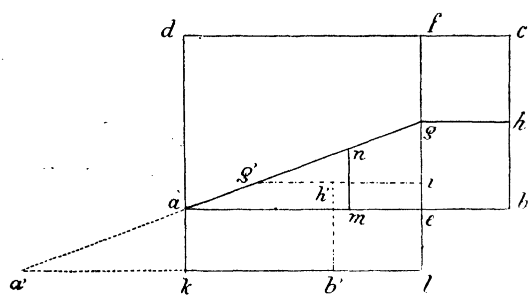
Úloha 26.

Rozložte daný obdélník úsečkami v takové části, aby z nich dal se složiti stejnoplochý čtverec. *rv.*

Úloha tato patří do třídy hlavolamů (casse-tête), známých už ze starověku *).

Četní pp. řešitelé užili výsledků, o nichž referováno bylo ve 2. čísle t. r. našeho časopisu. Rozdělili obdélník úhlopříčnou na dva trojúhelníky, jež proměňovali pak ve dva trojúhelníky pravoúhlé rovnoramenné a z nich složili pak žádaný čtverec. Toto řešení neliší se podstatně od už otištěného řešení a proto je zde pomíjíme. Jiná správná řešení podána tato:

1. řešení zaslal p. *Jar. Pilnáček* ze VII. tř. reálky v Kladně.



Obr. 1.

Otiskujeme jen obrazec, ze kterého je vše patrno. Připomenouti sluší, že toto řešení je omezeno podmínkou, že

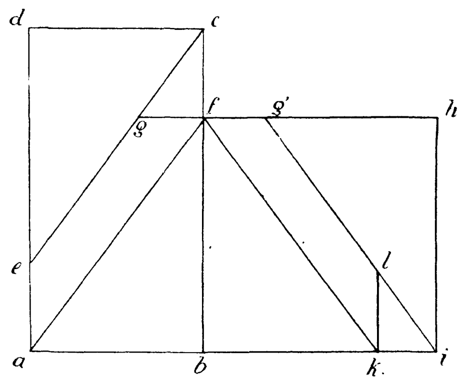
$$\frac{9}{4} > \frac{b}{a} > \frac{4}{9},$$

značí-li a, b rozměry obdélníka.

*) Ku př. t. zv. loculus Archimedius čili syntemachion, hra z 3. stol. př. Kristem známá, spočívala v tom, že čtvercovitá destička ze slonoviny rozřezána byla na čtrnáct různých kousků, ze kterých se měly mimo základní čtverec skládati různé jiné figury.

Při jiném poměru stran rozdělíme obdélník ku př. příčkou ve dva rozměry $\frac{a}{2}$, b a přiložíme je k sobě stranou $\frac{a}{2}$, což opakujeme dle potřeby tak dlouho, až poměr rozměrů uveden je v udané meze.

2. řešení zaslal p. *Josef Jandásek* z VIII. tř. g. v Strážnici.



Obr. 2.

Také zde při jistých poměrech $\overline{ab} : \overline{bc}$ bylo by třeba řešení upraviti.

Soustavné pojednání o této a podobných úlohách našli jsme nejnověji v knize hříček geometrických: Curiosités géométriques par E. Fourrey. Paris, Vuibert et Nony, 1907. Cena 5 fr.

Úloha 27.

Vypočísti obsah trojúhelníka, jehož vrcholy jsou body, ve kterých se kružnice do trojúhelníka vepsaná dotýká jeho stran, jsou-li dány strany zákl. trojúhelníka (ku př. $a = 13$, $b = 20$, $c = 21$). Prof. *A. Sýkora.*

Řešení zaslal p. *V. Šatava* ze VII. tř. g. v Písku.

Poloměry kružnice příslušné dotyčným bodům dělí trojúhelník, jehož obsah hledáme, ve tři rovnoramenné trojúhelníky, jichž úhly při středu kružnice jsou $2R - \alpha$, $2R - \beta$, $2R - \gamma$.

Jest tedy obsah jeho

$$P = \tfrac{1}{2}\varrho^2 (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma).$$

Ježto při obvyklém označení

$$\varrho = \frac{\Delta}{s},$$

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{2s}{abc}\Delta,$$

jest

$$P = \frac{2\Delta^3}{abc\,s}.$$

Pro dané zvláštní hodnoty

$$P = 27\tfrac{9}{65}.$$

Úloha 28.

Vypočísti obsah trojúhelníka, jehož vrcholy jsou body, ve kterých se kružnice trojúhelníku připsaná dotýká jeho stran (num. hodnoty jako v úloze 27.). Tý~~ř~~.

Řešení zaslal p. *V. Šatava* ze VII. tř g. v Písku.

Nazveme-li dotyčné body kružnice připsané trojúhelníku ABC ku straně a písmeny A_1, B_1, C_1, střed její O_1, poloměr ϱ_a, jest

$$\sphericalangle A_1O_1C_1 = \beta, \quad \sphericalangle A_1O_1B_1 = \gamma, \quad \sphericalangle B_1O_1C_1 = 2R - \alpha;$$

$$\triangle A_1B_1C_1 = P_1 = \triangle A_1O_1C_1 + \triangle A_1O_1B_1 - \triangle B_1O_1C_1$$
$$= \tfrac{1}{2}\varrho_a^2(\sin\beta + \sin\gamma - \sin\alpha).$$

Je známo, že

$$\varrho_a = \frac{\Delta}{s-a},$$

$$\sin\beta + \sin\gamma - \sin\alpha = 4\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2};$$

tedy

$$P_1 = \frac{2\Delta^3}{abc(s-a)}.$$

Obdobně

$$P_2 = \frac{2\Delta^3}{abc(s-b)}, \quad P_3 = \frac{2\Delta^3}{abc(s-c)}.$$

Při zvláštních hodnotách daných:

$$P_1 = 52\tfrac{22}{65}, \quad P_2 = 104\tfrac{44}{65}, \quad P_3 = 122\tfrac{8}{65}.$$

Úloha 29.

Vypočti prostor omezený českým klenutím zřízeným nad obdélníkem rozměrů a, b i velkost jeho lícní plochy. Tý*ř*.

Řešení zaslal p. *B. Brdička* ze VII. tř. g. v Chrudimi.

Prostor uzavřený českým klenutím rovná se obsahu polokoule zmenšené o součet obou úsečí vzniklých nad stranami obdélníka.

$$O = \tfrac{1}{2}K - (U_1 + U_2).$$

Poloměr koule $r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$; tedy

$$\tfrac{1}{2}K = \tfrac{2}{3}\pi r^3 = \tfrac{1}{12}\pi(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}.$$

$$U_1 = \tfrac{1}{2}\pi \cdot \tfrac{1}{4}a^2 \cdot \tfrac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} - b) + \tfrac{1}{6}\pi(\sqrt{a^2 + b^2} - b)^3$$

$$= \frac{\pi}{24}(\sqrt{a^2 + b^2} - b)(2a^2 + b^2 - b \cdot \sqrt{a^2 + b^2})$$

Obdobně

$$U_2 = \frac{\pi}{24}(\sqrt{a^2 + b^2} - a)(a^2 + 2b^2 - a\sqrt{a^2 + b^2}).$$

Tedy

$$O = \frac{\pi}{24}\left[a^3 + b^3 + (a + b)^3 - 2(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}\right].$$

Lícní plocha pak rovná se polovičnímu povrchu koule, zmenšenému o součet obou vrchlíků vzniklých nad stranami obdélníka.

$$L = 2\pi r^2 - (V_1 + V_2).$$

$$V_1 = \frac{\pi}{2}(a^2 + b^2 - b\sqrt{a^2 + b^2}),$$

$$V_2 = \frac{\pi}{2}(a^2 + b^2 - a\sqrt{a^2 + b^2}).$$

Tedy

$$L = \frac{\pi}{2}\left[(a + b)\sqrt{a^2 + b^2} - (a^2 + b^2)\right]$$

$$= \frac{\pi}{2}\sqrt{a^2 + b^2}\left[a + b - \sqrt{a^2 + b^2}\right].$$

Úloha 30.

Pobočné stěny trojbokého jehlanu jsou od podstavy stejně odchýleny. Vypočísti krychlový obsah jehlanu, jsou-li dány ploské obsahy podstavy i pobočných stěn

$$(\triangle = 84, \triangle_1 = 60, \triangle_2 = 56, \triangle_3 = 52).$$

Dr. *M. Haas.*

Řešení zaslal p. *L. Motka* z VIII. tř. g. v Přerově.

Obsah jehlanu $O = \frac{1}{3} \triangle \cdot v$.

Výšku v vypočteme z relace

$$v = \varrho \cdot tg\, \alpha,$$

kdež α značí odchylku pobočných stěn od podstavy a ϱ poloměr kružnice podstavě vepsané.

Úhel α vypočteme z rovnice

$$\triangle = (\triangle_1 + \triangle_2 + \triangle_3) \cdot \cos \alpha$$

vyjadřující, že podstava rovná se součtu průmětů stěn pobočných do roviny podstavné. Tedy

$$\cos \alpha = \frac{\triangle}{\triangle_1 + \triangle_2 + \triangle_3}.$$

K výpočtu ϱ třeba hran podstavných a, b, c. K tomu poslouží rovnice

$$\triangle_1 : \triangle_2 : \triangle_3 = a : b : c$$

(poněvadž výšky pobočných stěn jsou stejné) a

$$\triangle = \sqrt{s\,(s - a)\,(s - b)\,(s - c)}.$$

V našem zvl. případě vychází

$$a = 15, \quad b = 14, \quad c = 13,$$

z čehož $\varrho = \dfrac{\triangle}{s} = 4$.

Pak $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, tedy $\alpha = 60^0$.

Konečně

$$O = \tfrac{1}{3} \triangle \cdot \varrho\, tg\, \alpha = 112 \sqrt{3}.$$

Úloha 31.

Pobočné stěny komolého trojbokého jehlanu jsou od podstavy stejně odchýleny. Vypočísti krychlový obsah jehlanu, jsou-li dány ploché obsahy obou podstav i všech tří pobočných stěn ($z_1 = 756$, $z_2 = 336$; $A = 325$, $B = 350$, $C = 375$).

Týž.

Řešení zaslal p. *R. Přidal* z VIII. tř. g. v Přerově.

Nazveme v základně z_1 hrany a_1, b_1, c_1, ve druhé zákl. pak a_2, b_2, c_2. Poněvadž stěny pobočné mají stejnou výšku, jest

$$(a_1 + a_2) : (b_1 + b_2) : (c_1 + c_2) = A : B : C$$

a

$$a_1 : a_2 = b_1 : b_2 = c_1 : c_2,$$

tedy i

$$a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2 = A : B : C = 325 : 350 : 375.$$

Z toho

$$b_1 = \frac{14}{13} a_1, \quad c_1 = \frac{15}{13} a_1, \quad s_1 = \frac{21}{13} a_1;$$

$$b_2 = \frac{14}{13} c_2, \quad c_2 = \frac{15}{13} b_2, \quad s_2 = \frac{21}{13} a_2.$$

Z Heronova vzorce

$$a_1 = 39, \quad a_2 = 26$$

a

$$b_1 = 42, \quad c_1 = 45, \quad b_2 = 28, \quad c_2 = 30,$$

Výška pobočné stěny $v' = \dfrac{2A}{a_1 + a_2} = 10$, poloměry kružn. vepsaných do základen: $\varrho_1 = 12$, $\varrho_2 = 8$; výška jehlanu

$$v = \sqrt{v'^2 - (\varrho_1 - \varrho_2)^2} = 2\sqrt{21}.$$

Obsah jehlanu

$$O = \frac{v}{3}\left(z_1 + \sqrt{z_1 z_2} + z_2\right) = 1064 \sqrt{21}.$$

Úloha 32.

Dvěma koulím poloměrů a, b (a > b), které se vně dotýkají, opsána styčná rot. plocha kuželová. Jaký je obsah 1.) tělesa obsaženého mezi plochou kuželovou a plochami kulovými, 2.) celého hruškového tělesa částmi těch tří ploch omezeného?

Prof. *L. Borovanský.*

Řešení zaslal p. *J. Pilnáček* ze VII. tř. r. v Kladně.

Koulím středů o_1, o_2 a poloměrů a, b opsaná styčná plocha kuželová má vrchol v na centrále $o_1 o_2$. Tato plocha dotýká se kulových ploch v kružnicích, jichž středy buďte m_1, m_2 a poloměry ϱ_1, ϱ_2. Označme

$$\overline{o_1 v} = s_1, \quad \overline{o_1 m_1} = m_1, \quad \overline{m_1 v} = V_1,$$
$$\overline{o_2 v} = s_2, \quad \overline{o_2 m_2} = m_2, \quad \overline{m_2 v} = V_2.$$

Obsah úseče v na kouli o_1 (o_2) uťaté rovinou kružnice m_1, ϱ_1 (m_2, ϱ_2) budiž U_1 (U_2), výška její v_1 (v_2).

Pak snadno vychází

$$s_1 = \frac{a(a+b)}{a-b}, \quad s_2 = \frac{b(a+b)}{a-b},$$
$$m_1 = \frac{a^2}{s_1} = a \cdot \frac{a-b}{a+b}, \quad m_2 = b \cdot \frac{a-b}{a+b}$$
$$v_1 = a - m_1 = \frac{2ab}{a+b}, \quad v_2 = \frac{2ab}{a+b},$$
$$\varrho_1 = 2a \cdot \frac{\sqrt{ab}}{a+b}, \quad \varrho_2 = 2b \cdot \frac{\sqrt{ab}}{a+b},$$
$$V_1 = s_1 - m_1 = \frac{4a^2 b}{a^2 - b^2}, \quad V_2 = s_2 - m_2 = \frac{4ab^2}{a^2 - b^2}.$$

Obsah kužele o poloměru základny ϱ_1 (ϱ_2) a výšce V_1 (V_2) budiž K_1 (K_2).

Pak jest

$$K_1 = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{16a^5 b^2}{(a+b)^2 (a^2 - b^2)}, \quad K_2 = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{16a^2 b^5}{(a+b)^2 (a^2 - b^2)}$$
$$U_1 = \frac{2\pi a^2 v_1}{3} - \frac{\pi \varrho_1^2 m_1}{3} = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{a^3 b^2 (3a+b)}{3(a+b)^3}$$
$$U_2 = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{a^2 b^3 (a+3b)}{3(a+b)^3}.$$

Obsah tělesa obsaženého mezi plochou kuželovou a plochami kulovými jest

$$O = K_1 - K_2 - U_1 - U_2 = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{a^2 b^2}{a+b}.$$

Obsah hruškového tělesa pak

$$O' = O + O_1 + O_2 = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{a^5 - b^5}{a^2 - b^2}.$$

Úloha 33.

V pravoúhlé soustavě jsou dány dva pevné body m (a, o) a n $(-a, o)$. Bodem m vedena přímka P_1, utínající na ose Y úsek $\overline{oq_1}$; bodem n přímka P_2, utínající na téže ose úsek $\overline{oq_2}$. Ustanoviti rovnici geom. místa průsečíků přímek P_1 a P_2, pro které $\overline{oq_1} \cdot \overline{oq_2} = \pm b^2$. *Týž.*

Řešení zaslal p. *Vl. Úlehla* z VIII. tř. g. v Strážnici.

Nazveme-li $\overline{oq_1} = q_1$, $\overline{oq_2} = q_2$, jsou rovnice proměnných přímek

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{q_1} = 1$$

$$-\frac{x}{a} + \frac{y}{q_2} = 1;$$

tedy:

$$\frac{y}{q_1} = 1 - \frac{x}{a}$$

$$\frac{y}{q_2} = 1 + \frac{x}{a}.$$

Znásobíme-li souhlasné strany těchto rovnic, máme

$$\frac{y^2}{q_1 \cdot q_2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}.$$

Poněvadž dle podmínky $q_1 \cdot q_2 = \pm b^2$, má hledané geom. místo rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

což jak známo jsou ellipsa a hyperbola v zákl. poloze.

Úloha 34.

Dokázati, že obsah trojúhelníka vepsaného do paraboly rovná se trojnásobnému geometrickému průměru parabolických úsečí, příslušných stranám toho trojúhelníka. Dr. *M. Haas.*

Řešení zaslal p. *Amos Pokorný* ze VI. tř. I. g. v Brně.

Zvolme na parabole $y^2 = 2px$ tři body $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. Pak

$$\triangle ABC = \frac{1}{4p} \begin{vmatrix} y_1^2, & y_2^2, & y_3^2 \\ y_1, & y_2, & y_3 \\ 1, & 1, & 1 \end{vmatrix}, \quad \text{poněvadž} \quad x_1 = \frac{y_1^2}{2p},$$

$$\triangle = \frac{1}{4p}(y_1y_2^2 + y_1y_3^2 + y_3y_1^2 - y_1^2y_2 - y_2^2y_3 - y_3^2y_1).$$

Úseč paraboly příslušná k tětivě AB jest

$$U_3 = \frac{(y_1 - y_2)^3}{12p}.$$

Trojnásobný geometrický průměr parabolických úsečí příslušných k stranám trojúhelníka ABC jest

$$3\sqrt[3]{U_1U_2U_3} = \frac{(y_1 - y_2)(y_2 - y_3)(y_3 - y_1)}{4p}$$

$$= \frac{y_1y_2^2 + y_2y_3^2 + y_3y_1^2 - y_1^2y_2 - y_2^2y_3 - y_3^2y_1}{4p},$$

čímž předložená věta dokázána.

Úloha 35.

Ve sférickém trojúhelníku pravoúhlém o přeponě c tvoří úhly řadu arithmetickou; vypočtěte ty úhly, je-li 1.) $c = 60^0$, 2.) $c = 120^0$. Prof. *Jar. Doležal.*

Řešení zaslal p. *Karel Holeček* ze VII. tř. reálky v Praze-III.

Jsou-li α, β, $\gamma = 90^0$ úhly pravoúhlého trojúhelníka sferického, může úhel pravý býti v žádané arith. řadě buď *a*) krajním nebo *b*) prostředním členem řady.

a) $\beta = R - \delta$, $\alpha = R - 2\delta$.

Pak

$$\cos c = \operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta = \operatorname{tg} \delta \,.\, \operatorname{tg} 2\delta = \frac{2 \operatorname{tg}^2 \delta}{1 - \operatorname{tg}^2 \delta};$$

$$\operatorname{tg} \delta = \pm \sqrt{\frac{\cos c}{2 - \cos c}}.$$

b) $R = \frac{\alpha + \beta}{2}$, $\alpha + \beta = 2R$.

Pak

$$\cos c = \cotg \alpha \cotg (2R - \alpha) = - \cotg^2 \alpha,$$

$$\cotg \alpha = \pm \sqrt{- \cos c}.$$

Aby výsledek byl reálný, musí v případě *a*)

$$c < R,$$

v případě *b*)

$$c > R.$$

Je-li v příp. *a*) $c = 60^0$,

$$tg\,\delta = \pm \sqrt{\tfrac{1}{5}},\ \delta = 24^0 5' 42'',\ \beta = R - \delta,\ \gamma = R + \delta;$$

je-li v příp. *b*) $c = 120^0$,

$$tg\,\alpha = \pm \sqrt{2},\ \alpha = 54^0 44' 9'',\ \beta = 2R - \alpha,$$

nebo

$$\alpha = 125^0 15' 51'',\ \beta = 2R - \alpha.$$

Úloha 36.

Dokázati, že v obecném čtyřúhelníku leží průsečík úhlopříčen, průsečík spojnic středů protějších stran a těžiště jeho v jedné přímce. Jan Svoboda.

Řešení zaslal p. *J. Jurnečka* ze VI. tř. r. v Novém Městě na Moravě.

Nazveme ve čtyřúhelníku *abcd* průsečík úhlopříčen s, středy stran po pořádku e, f, g, h, průsečík spojnic eg, fh nazveme s_1, těžiště trojúhelníků bda, acb, bdc, cad, nazveme t_1, t_2, t_3, t_4, průsečík spojnic $t_1 t_3$ a $t_2 t_4$ jest pak těžištěm čtyřúhelníka, jež nazývejme s_2.

Čtyřúhelník $t_1 t_2 t_3 t_4$ jest podobný a podobně položený čtyřúhelníku *abcd*, neboť, jak vysvítá z trojúhelníka *abg*, jest

$$t_3 t_4 \parallel ab,$$

a kromě toho

$$\overline{t_3 t_4} : \overline{ab} = 1 : 3.$$

To platí i o ostatních stranách; tedy opravdu

$$t_1 t_2 t_3 t_4 \backsim abcd$$

při poměru podobnosti $- \frac{1}{3}$.

Hledejme střed podobnosti obou čtyřúhelníků. Spojnice $\overline{ge}$ v $\triangle\, \overline{abg}$ půlí patrně příčku toho trojúhelníka $t_3 t_4$ v bodu e'; avšak bod e' strany $t_3 t_4$ jest stejnolehlý s bodem e strany ab, a tedy $\overline{ee'}$ čili $\overline{eg}$ prochází středem podobnosti. Z téhož důvodu i $\overline{fh}$ jde středem podobnosti, čili *průsečík* s_1 *spojnic středů protějších stran jest středem podobnosti obou čtyřúhelníků.* Poněvadž pak těžiště s_2 čtyřúhelníka $abcd$ jest průsečíkem úhlopříčen ve čtyřúhelníku $t_1 t_2 t_3 t_4$, jsou body s a s_2 také body stejnolehlé a musí tudíž $\overline{ss_2}$ procházeti bodem s_1, což bylo dokázati. Kromě toho

$$\overline{s_2 s_1} : \overline{s s_1} = -\tfrac{1}{3}.$$

Poznámka. Většina pánů řešitelů řešila úlohu analyt. geometrií. Řešení to, jež vyžaduje dosti mnoho počítání, neotiskujeme pro nedostatek místa. Počet se usnadňuje vhodnou volbou soustavy, ku př. tím, že bod s_1 položíme do počátku, což má pro souřadnice vrcholů za následek relace

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,$$
$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0.$$

Úloha 37.

Odvoditi vztah, kterým jsou vázány rovníkové souřadnice (rektascense α, deklinace δ) tří bodů $[A_1\,(\alpha_1, \delta_1),\ A_2\,(\alpha_2, \delta_2),\ A_3\,(\alpha_3, \delta_3)]$, ležících v jedné hlavní kružnici nebeské.

Dr. *J. Kaván.*

Řešení zaslal p. *J. Šlechta* ze VII. tř. r. v Praze-III.

Nazveme sklon hlavní kružnice, v níž ony tři body leží, k rovníku φ a rektascensi průsečíku jejího s rovníkem ϱ. Z pravoúhlých sfér. trojúhelníků, jichž jeden úhel jest φ a protější odvěsna δ_1, nebo δ_2, nebo δ_3 a přilehlá odvěsna $(\alpha_1 - \varrho)$, resp. $(\alpha_2 - \varrho)$, $(\alpha_3 - \varrho)$, plynou tři rovnice

$$tg\, \delta_1 \, cotg\, \varphi = sin\, (\alpha_1 - \varrho) \qquad (1)$$
$$tg\, \delta_2 \, cotg\, \varphi = sin\, (\alpha_2 - \varrho) \qquad (2)$$
$$tg\, \delta_3 \, cotg\, \varphi = sin\, (\alpha_3 - \varrho). \qquad (3)$$

Abychom našli hledaný vztah, vyloučíme z těchto rovnic φ a ϱ. Za tím účelem dělme spolu rovnici (1) a (2) a pak (1) a (3). Pak

$$\frac{tg\,\delta_1}{tg\,\delta_2} = \frac{sin\,\alpha_1\,cos\,\varrho - sin\,\varrho\,cos\,\alpha_1}{sin\,\alpha_2\,cos\,\varrho - sin\,\varrho\,cos\,\alpha_2} \quad (4)$$

$$\frac{tg\,\delta_1}{tg\,\delta_3} = \frac{sin\,\alpha_1\,cos\,\varrho - sin\,\varrho\,cos\,\alpha_1}{sin\,\alpha_3\,cos\,\varrho - sin\,\varrho\,cos\,\alpha_3}. \quad (5)$$

Z těchto rovnic vypočteme $tg\,\varrho$ (po krácení pravých stran $cos\,\varrho$). I bude

$$tg\,\varrho = \frac{tg\,\delta_1\,sin\,\alpha_2 - tg\,\delta_2\,sin\,\alpha_1}{tg\,\delta_1\,cos\,\alpha_2 - tg\,\delta_2\,cos\,\alpha_1} \quad (6)$$

$$tg\,\varrho = \frac{tg\,\delta_1\,sin\,\alpha_3 - tg\,\delta_3\,sin\,\alpha_1}{tg\,\delta_1\,cos\,\alpha_3 - tg\,\delta_3\,cos\,\alpha_1}. \quad (7)$$

Srovnáním obou výsledků dostáváme hledanou relaci. Upravíme ještě tak, že po odstranění zlomků krátíme $tg\,\delta_1$ a obdržíme

$$tg\,\delta_1\,.\,sin\,(\alpha_2 - \alpha_3) + tg\,\delta_2\,.\,sin\,(\alpha_3 - \alpha_1)$$
$$+ tg\,\delta_3\,sin\,(\alpha_1 - \alpha_2) = 0.$$

b) Z deskriptivní geometrie.

Úloha 1.

Vyšetřete graficky všecky rozměry (= sestrojte průměty) kolmého kosočtverečného jehlanu komolého, je-li jedna jeho poboční stěna lichoběžník, mající půdice ab = 70 mm, cd = 40 mm a ramena ad = 26 mm a bc = 32 mm. *rv.*

Řešení zaslal p. *Frant. Kutnohorský* ze VI. tř. reálky v Telči.

Zobrazíme nejdříve z daných částí lichoběžník a umístíme jej do 1. průmětny. Prodloužením ramen obdržíme trojúhelník abv, který by byl stěnou úplného jehlanu příslušného k hledanému komolci. Průměty pobočných hran tohoto úplného jehlanu budou úhlopříčnami průmětu podstavy a průmět $a_1 b_1 v_1$ bude patrně pravoúhlý trojúhelník o přeponě $\overline{a_1 b_1} \equiv \overline{ab}$. Otáčíme-li abv kolem $\overline{ab}$, opisuje v_1 kolmici vedenou z v ku $\overline{ab}$. Pravou polohu v_1 najdeme v průsečíku kolmice spuštěné s v na stranu $\overline{ab}$ s kružnicí nad $\overline{ab} \equiv \overline{a_1 b_1}$ opsanou. Body c_1 a d_1 odvodíme na $\overline{a_1 v_1}$ a $\overline{b_1 v_1}$ podobně z c a d. Výška komolce je z_c, což vyšetří se z pravoúhlého trojúhelníka $b_1 c_1 c$, v němž známe jednu odvěsnu $\overline{b_1 c_1}$ a přeponu $\overline{b_1 c} = bc$.

Úloha 2.

Nalézti nejvyšší a nejnižší body čáry, ve které se pronikají pláště dvou těles rázu kuželového (kuželů nebo válců) s kruhovými podstavami v téže vodorovné rovině (I. prům.).

rv.

Řešení zaslal p. *Jar. Pilnáček* ze VII. tř. reálky v Kladně.

Kružnice K_1, K_2 v první průmětně buďtež řídícími křivkami kuželových ploch K_1, K_2, jichž vrcholy jsou v_1, v_2. Křivka průsečná P leží jak na ploše K_1, tak na ploše K_2. Tečna sestrojená v nejvyšším bodu křivky průsečné je tečnou k oběma plochám K_1, K_2, a je patrně rovnoběžna s π. Podobně tečna v bodě nejnižším sestrojená je s π rovnoběžna, majíc křivku, resp. body nejblíže sousední, nad sebou.

Tečná rovina ke kuželi K_1 neb K_2 sestrojená v bodě nejvyšším nebo nejnižším má stopu na rovině základny rovnoběžnou s tečnou v onom bodě ke křivce vedenou.

I lze ihned vysloviti tyto věty:

1. Stopy tečných rovin, v bodě nejvyšším neb nejnižším k oběma kuželům vedené, na rovině základen (π) jsou rovnoběžny.

2. Tyto stopy jsou zároveň tečnami ke křivkám řídícím K_1, K_2, jichž body dotyčné leží v jedné přímce s první stopou společného vrcholového paprsku.

Připomeňme si pak ještě větu: Libovolná sečna vedená vnějším neb vnitřním středem podobnosti dvou kružnic protíná tyto ve čtyřech bodech, v nichž tečny sestrojené jsou po dvou navzájem rovnoběžny.

Spojíme tedy vnější nebo vnitřní střed podobnosti obou základen s první stopou paprsku vrcholového. Obě tyto spojnice určují na křivkách řídících čtyři páry bodů. Příslušné povrchové přímky protínají se v hledaných bodech nejvyšších nebo nejnižších.

Řešení může podati nanejvýš čtyři takové body, může však, protínají-li se plochy vůbec, počet těchto bodů zmenšiti se na dva. Pro plochy válcové je tím ovšem řešení už také dáno.

Úloha 3.

Na ploše kulové dány dvě libovolné kružnice; sestrojiti ony hlavní kružnice, které obou kružnic daných se dotýkají.

rv.

Řešení zaslal p. *M. Bažant* z V. tř. reálky v Příboře.

Aby hledaná hlavní kružnice dotýkala se daných dvou kružnic, musí její rovina býti společnou tečnou rovinou dvou rotačních ploch kuželových, jichž společným vrcholem jest střed koule a řídícími křivkami jsou dané kružnice. Ke dvěma takovým plochám kuželovým lze vésti společné roviny tečné pomocí jisté plochy válcové. Vepíšeme oběma plochám kuželovým dvě stejně velké plochy kulové a těmto plochám kulovým opíšeme styčnou plochu válcovou. Hledané roviny tečné budou se dotýkati i této plochy a redukuje se tedy řešení na konstrukci rovin tečných středem koule ku této ploše válcové. Řešení jsou dvé.

Poznámka redakce. Udané řešení není úplné a žádné z ostatních četných řešení této a následující úlohy není — byť i některá řešení byla zcela vtipná — úplné a žádoucí jednoduchosti.

Jedná se vlastně o řešení úlohy: sestrojiti společné tečné roviny dvou rotačních ploch kuželových o společném vrcholu s.

Vepišme do každé z daných ploch kuželových libovolnou plochu kulovou. Hledané roviny tečné budou se dotýkati i těchto ploch kulových a musí tedy procházeti každá z nich jedním z obou středů podobnosti o, o' obou ploch kulových.*)

Poněvadž ale ony roviny tečné půjdou i společným vrcholem obou ploch kuželových (středem dané plochy kulové), tedy musí tyto hledané roviny jíti jednou z přímek $\overline{so}$ nebo $\overline{s'o}$. Najdeme průsečík p (p') jedné z těchto přímek s rovinou jedné kružnice kterékoli z daných ploch kuželových, vedeme z tohoto bodu p (p') k té kružnici tečny a spojnice dotyčných bodů s bodem s určují ony povrchové přímky, podél kterých se hledané roviny tečné plochy kuželové dotýkají. Řešení jsou obecně čtyři (když plochy kuželové se neprotínají a žádná není uvnitř druhé);

*) Zvolíme-li obě plochy kulové stejně veliké, vzdálí se jejich vnější střed podobnosti do nekonečna po středné přímce.

počet řešení může se zmenšiti na 3 (když se plochy kuželové vně dotýkají), 2 (když se protínají), 1 (když se vnitř dotýkají) a žádné (když jedna plocha kuželová je celá uvnitř druhé). Důsledky pro úlohu původně předloženou jsou jasny. Výhody řešení tohoto spočívají v tom, že není při něm potřebí rýsovati žádné pomocné ellipsy; vhodným otáčením lze se tomu vyhnouti.

Jiné řešení. Nebude od místa udati ještě jeden způsob řešení úlohy: ke dvěma rotačním plochám kuželovým o témže vrcholu sestrojiti společné roviny tečné. Stane se to dle této úvahy: Pomysleme si ke všem rovinám tečným dané plochy kuželové vrcholem jejím vztyčeny kolmice. Tyto kolmice vyplní novou rotační plochu kuželovou, kterou nazýváme polární ku ploše dané. Sestrojíme-li k oběma daným plochám plochy polární, budou se tyto polární plochy protínati ve čtyřech povrchových přímkách, kterým patrně budou odpovídati čtyři společné tečné roviny daných ploch kuželových. Máme tedy novou úlohu: sestrojiti společné povrchové přímky dvou rotačních ploch kuželových o témž vrcholu. To se stane nejlépe pomocnou plochou kulovou, opsanou z vrcholu těch ploch kuželových. Tato plocha protne obě kuželové plochy ve dvou párech kružnic. Průsečíky těchto dvou párů kružnic (jest jich celkem osm, z nichž ale vždy dva jsou diametrálně položeny) najdeme jako průsečíky průsečnic, ve kterých se protínají roviny těch kružnic, s plochou kulovou. I zde lze se tedy obejíti bez rýsování kuželoseček.

Úloha 4.

Dány dvě přímky A, B a bod m; položiti bodem m roviny, jež od přímek daných mají dané odchylky α, β (ku př. $A \perp \pi$, $B \parallel \nu$, bod m kdekoli). *rv.*

Tato úloha řešena jest v úloze předešlé, neboť se úloha snadno převádí na konstrukci spol. rovin tečných ke dvěma rotačním plochám kuželovým.

Úloha 5.

Vyhledati směr paprsků světelných, pro který vržený stín daného rovnoběžníka abcd na I. průmětnu je čtverec [ku př. $a\,(-1, 7{\cdot}5, 0{\cdot}5)$, $b\,(-4{\cdot}5, 6{\cdot}5, 3)$, $c\,(-4, 8{\cdot}5, 6)$].

Prof. *Jar. Doležal.*

Řešení zaslal p. *Boh. Pivnička* ze VI. tř. reálky na Král. Vinohradech.

Vržený stín rovnoběžníka je vždy rovnoběžník; aby to byl čtverec, musí to býti rovnoběžník pravoúhlý a musí úhlopříčna se stranou svírati úhel 45^0. K nalezení hledaného směru paprsku užijeme affinity existující mezi I. průmětem a jeho vrženým stínem na I. průmětnu. Osou affinity je půdorysná stopa. Nazveme průsečíky $\overline{a_1 b_1}$, $\overline{b_1 c_1}$, $\overline{c_1 d_1}$, $\overline{a_1 c_1}$ se stopou P^ϱ postupně I, II, III, IV. Pak dostaneme ku př. c'_1 jako průsečík kružnice nad průměrem II III s kružnicí, jíž pro tětivu III IV přísluší obvodový úhel 45^0. Spojnice $\overline{c_1 c'_1}$ ustanovuje S_1; c'_2 na ose $X_{1,2}$, $\overline{c_2 c'_2} \equiv S_2$. Poněvadž lze sestrojiti zmíněné oblouky kruhové po obou stranách stopy P^ϱ, jest úloha dvojznačná.

Úloha 6.

Dána základna trojbokého jehlanu abc v I. průmětně. Ustanoviti průměty čtvrtého vrcholu d, jsou-li dány odchylky hran pobočných od výšky α, β, γ. (Ku př. abc trojúhelník rovnostranný, $\alpha = 30^0$, $\beta = 60^0$, $\gamma = 45^0$.)

Stud. techn. *Jan Kučera.*

Řešení 1. zaslal p. *Jar. Jurnečka* ze VI. tř. r. v Novém Městě na Moravě.

Chtějme sestrojiti napřed jehlan hledanému podobný. Zvolme v prostoru bod. Položme jím přímky, které s prvním promítacím paprskem jeho svírají dané úhly α, β, γ. Tyto přímky vyplní tři souosé rotační plochy kuželové, které protnou první průmětnu ve třech soustředných kružnicích K', K'', K'''. Jest nyní úlohou umístiti do průmětny trojúhelník daného tvaru, aby jeho vrcholy padly na kružnice. Pro případ trojúhelníka rovnostranného počínáme si takto: Zvolíme jeden vrchol ku př. a_1 na K' a otočíme pak vše i s kružnicí K'' o 60^0. Otočený střed s_1 padne na K'. Druhý neznámý vrchol rovnostranného trojúhelníka b_1 padl by při tomto otočení do třetího vrcholu c_1. Ale s vrcholem b_1 otáčí se i kružnice K'' a bude tedy c_1 tam, kde otočená K'' se protne s K'''. Pak dokreslíme $\triangle\, a_1 b_1 c_1$ a zvětšíme jehlan tak, aby některá z daných úseček nabyla náležité velkosti. Úloha je patrně dvojznačná. Neprotnou-li se kružnice užité ke konstr. c_1, je úloha nemožnou. Tomu tak je při daných úhlech 30°, 60°, 45°.

Řešení 2. zaslal p. *J. Pilnáček* ze VII. tř. r. v Kladně.

Nazveme-li vrcholy podstavné $a \equiv a_1$, $b \equiv b_1$, $c \equiv c_1$ a průmět čtvrtého (neznámého) vrcholu v_1 jest patrně

$$\overline{a_1 v_1} : \overline{b_1 v_1} : \overline{c_1 v_1} = v \,.\, tg\, \alpha : v \,.\, tg\, \beta : v\, tg\, \gamma$$
$$= tg\, \alpha : tg\, \beta : tg\, \gamma.$$

Sestrojí se tedy v_1 jako bod, který má od tří bodů a_1, b_1, c_1 daný poměr vzdáleností. Řešení stane se dvěma Apolloniovými kružnicemi jakožto geometrickými místy bodů, které od bodů a_1, b_1, resp. a_1, c_1 mají daný poměr vzdáleností

$$m\, tg\, \alpha : m\, tg\, \beta, \text{ resp. } m\, tg\, \alpha : m\, tg\, \gamma,$$

kde m znamená libovolnou úsečku (v. Strnad, Planim. § 52. 1.).

Řešení jsou dvě; aby byla reálná, musí užité Apolloniovy kružnice míti reálné průsečíky.

Úloha 7.

Zobrazte šikmý kruhový kužel se základnou v I. průmětně, jehož jedna povrchová přímka jest k této průmětně kolmá. Přetněte pak kužel libovolnou rovinou a zkoumejte, jak se k sobě chovají I. průmět toho průseku a I. průměty různých povrchových kružnic té plochy kuželové. *rv.*

Řešení zaslal p. *J. Pilnáček* ze VII. tř. r. v Kladně.

I. průmět vrcholu v leží na K_1; průsek libovolné roviny sestrojíme všeobecně známým způsobem buď užitím kollineace nebo pomocnou průmětnou. Poněvadž rovina tečná podél oné k průmětně kolmé přímky povrchové je také k prům. kolmá, bude tečna ve v_1 ku K_1 zřízená dotýkati se průmětů všech čar, které na ploše kuželové jsou uloženy, čili v tomto bodě se budou průměty všech takových čar navzájem dotýkati. Tak zejména i průměty těch povrchových kružnic, jichž roviny jsou s průmětnou rovnoběžny. Představme si jednu z nich. Tato kružnice obecně protíná kuželosečku v prostoru ve dvou bodech, kterážto vlastnost se přenáší i na průměty obou čar. Tedy *průmět každé povrchové kružnice dotýká se průmětu kuželosečky* *v bodě v_1 a kromě toho protíná jej ve dvou bodech.* Naše kuželosečka má na oné kolmé povrchové přímce také jeden bod m ($m_1 \equiv v_1$). Položme tímto bodem m v prostoru povrchovou kružnici uvažované soustavy. Tato kružnice (a *jen* ona) protíná kuželosečku už jen v jediném bodě. V průmětně průmět její mimo bod dotyčný $v_1 \equiv m_1$ bude míti s průmětem kuželosečky už jen jeden průsečík. Kružnice tato bude se v bodě m_1 průmětu kuželosečky dotýkati a současně jej protínati. Kružnice taková (říkává se též, že má s křivkou tři soumezné body společné) nazývá se kružnicí křivosti onoho průmětu kuželosečky, který ovšem lze za samostatnou křivku pokládati. Dotyk nazývá se oskulací. Kdyby onen bod m byl současně nejvyšším bodem našeho průseku a tedy také jeho vrcholem, byl by i průmět jeho vrcholem průmětu kuželosečky a v bodě m_1 sešly by se pro příslušnou kružnici oba průsečíky a tedy celkem i s dvěma soumeznými tečnými body celkem čtyři nesmírně blízké body, oskulace by byla intensivnější.

c) Z fysiky.

Úloha 1.

Pod jakým úhlem jest vyhoditi z bodu A rychlostí C těleso, aby se srazilo s tělesem, které v okamžiku vyhození počne padati s výšky h kolmo nad místem B, jehož horiz. vzdálenost od A jest d? Jaká může býti nejmenší rychlost c′, aby srážka skutečně nad bodem B nastala? Dr. *B. Bydžovský.*

Řešení zaslal p. *Ant. Nedoma* ze VII. tř. vyšší reálky ve Val. Meziříčí.

1. Vypočítáme úhel, pod kterým musí býti těleso vrženo z bodu A rychlostí C, by za dobu t dosáhlo dálky d a výšky $(h - \frac{1}{2} gt^2)$. Za touž dobu t těleso padající s výšky h vykoná dráhu $s = \frac{1}{2} gt^2$, tak že obě tělesa se srazí.

$$h - \tfrac{1}{2} gt^2 = C \,.\, \sin\alpha \,.\, t - \tfrac{1}{2} gt^2,$$
$$d = C \,.\, \cos\alpha \,.\, t.$$

Spojením obou rovnic vyloučíme t:

$$\frac{h}{C \sin\alpha} = \frac{d}{C \cos\alpha}.$$

Z čehož

$$tg\ \alpha = \frac{h}{d}.$$

(Z řešení, jež podal p. *J. Jandásek*, st. VIII. tř. gymn. v Strážnici:

Let tělesa rozložíme ve známé složky: horizontální a vertikální (padání). Vrh a počátek padání udály se současně, dráha padání je tedy u obou těles stejně veliká. Musí tedy těleso z bodu A býti vrženo směrem do bodu, z něhož druhé začne padati, aby srážka obou nastala. Z toho $tg\ \alpha = \frac{h}{d}$.)

2. Je-li těleso vrženo z A pod tímto úhlem, ráz nastává při každé rychlosti c. Avšak na této rychlosti závisí doba, za kterou ráz nastane a tedy i dráha s, již těleso padající s výšky h až do rázu proběhne.

1. Je-li $s > h$, tělesa se srazí pod bodem B,
2. „ $s < h$, „ „ „ nad „ B,
3. „ $s = h$, „ „ „ v bodě B.

Vztah rychlosti tělesa vrženého a doby, za kterou ráz nastane, vyjadřuje se rovnicemi

$$c = \frac{d}{\cos \alpha} \cdot \frac{1}{t} \quad (t = \text{dvojnásobná doba výstupu}),$$

$$\cos \alpha = \frac{d}{\sqrt{h^2 + d^2}} \qquad c = \frac{1}{t}\sqrt{h^2 + d^2}.$$

V případě třetím, kdy $s = h$, doba $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$.

Příslušné $c' = \sqrt{\frac{g(h^2 + d^2)}{2h}}$ jest nejmenší rychlost, při níž nastane ještě srážka nad bodem B.

Úloha 2.

Na obvodu kružnice jsou umístěny ve stejných odlehlostech čtyři zdroje světelné stejné intensity. Dokažte, že ze všech bodů uvnitř kruhu nejméně je osvětlen střed. Rozšiřte tuto větu na případ 4 n stejných zdrojů rovnoměrně po obvodu rozdělených a na případ, že celý obvod je nepřetržitý zdroj světelný všude stejné intensity. *Týž.*

Řešení zaslal p. *J. Pilnáček* ze VII. tř. reálky v Kladně.

Čtyři zdroje na obvodu buďtež pořadem z_1, z_2, z_3 a z_4. Libovolný bod m uvnitř kruhu budiž určen vzdáleností s od středu o a úhlem $\sphericalangle moz_1 = \alpha$. Je-li intensita osvětlení středu všemi čtyřmi zdroji J, je intensita osvětlení bodu m zdrojem z_k rovna $\frac{1}{4}\frac{J \cdot r}{\overline{z_k m^2}}$, $k = 1, 2, 3, 4$.

Úhrnné osvětlení bodu m jest dle toho

$$J_m = \frac{1}{4} J \left(\frac{r^2}{\overline{z_1 m^2}} + \frac{r^2}{\overline{z_2 m^2}} + \frac{r^2}{\overline{z_3 m^2}} + \frac{r^2}{\overline{z_4 m^2}} \right)$$

$$= \frac{1}{4} J \cdot \sum_{k=1}^{4} \frac{r^2}{\overline{z_k m^2}}.$$

Hodnotu $\overline{z_k m^2}$ určíme z trojúhelníka $\triangle o z_k m$ dle věty cosinusové. Dle toho jest

$$\frac{\overline{z_k m^2}}{r^2} = 1 + \frac{s^2}{r^2} - 2\frac{s}{r} \cos\alpha = 1 + p^2 - 2p \cos\alpha$$

(pro $p = \frac{s}{r}$ platí z podmínky, že m jest uvnitř kruhu $p < 1$),

a podobně

$$\frac{\overline{z_2 m^2}}{r^2} = 1 + p^2 - 2p \sin\alpha,$$

$$\frac{\overline{z_3 m^2}}{r^2} = 1 + p^2 + 2p \sin\alpha,$$

$$\frac{\overline{z_4 m^2}}{r^2} = 1 + p^2 + 2p \cos\alpha.$$

Dosadíme-li tyto hodnoty do výrazu pro J_m, obdržíme po náležité úpravě

$$J_m = J \cdot \frac{(1 + p^2)(1 + p^4)}{(1 - p^4)^2 + 4p^4 \sin^2 2\alpha}.$$

Při proměnném úhlu α nastává minimální hodnota zlomku, je-li $\sin^2 2\alpha = 1$, čili $\alpha = \pm\left(\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4}\right)$. V tom případě má zlomek hodnotu $\frac{1 + p^2}{1 + p^4}$, jež jest při proměnném p v mezích od 0 do 1 minimální a to rovna 1 při $p = 0$ a $p = 1$. Pro $1 > p > 0$ jest hodnota zlomku > 1, neboť p^2 jest větší než

p^4. Z významu čísla p plyne, že nejméně je osvětlen střed kruhu o.

Je-li po obvodě rozloženo n čtveřin světelných zdrojů, zůstává věta v platnosti. Stane-li se n nekonečně velikým, pak je celý obvod svítícím a věta zase platí.

Úloha 3.

V kolmé vzdálenosti 1 m od středu kruhové zrcadlící desky (poloměr 50 cm) umístěn je bodový svítící zdroj: vzhledem k němu je se zrcadlem souměrně položena neprůhledná deska kruhová s prvou stejně veliká. Za ní ve vzdálenosti 1 m je postavena bílá stěna s oběma deskami rovnoběžná. Udejte, jaké je osvětlení této stěny, jestliže zrcadlo odráží 90% dopadajícího světla.

Tý?.

Řešení zaslal p. *Rud. Novotný* z VIII. tř. gymn. v Kyjově.

Vedeme-li řez osou obou desek bude průřez desky neprůhledné úsečka AB (střed její O_1), průřez desky zrcadlící CD (střed O_2). Svítící zdroj označme si S, obraz jeho S', průsečík osy obou desek se stěnou O. Nejblíže k bodu O dopadají paprsky, které odrazivše se na desce CD (v bodě E) dotýkají se kraje desky AB. Paprsky ony tvoří kružnici K_1. Paprsky, které přímo dopadají na stěnu, procházejíce bezprostředně při desce AB, tvoří kružnici K_2. Na touž kružnici přicházejí také paprsky odražené na kružnici F na desce CD. Poslední paprsky odražené, které ještě dopadají na stěnu, odrážejí se na okraji desky CD a tvoří kružnici K_3. Prostor uvnitř kružnice K_1 jest temný. Mezikruží $K_1 K_2$ jest osvětleno pouze paprsky odraženými, mezikruží $K_2 K_3$ paprsky odraženými i přímo dopadajícími, plocha vně kruhu K_3 paprsky přímo dopadajícími.

Ježto $O_1 A = O_2 C = 50\,cm$, $O_1 S = OO_1 = SO_2 = 100\,cm$, plynou pro jednotlivé délky tyto hodnoty:

$$O_2 E = \frac{50}{3}\,cm,\quad OK_1 = \frac{200}{3}\,cm,\quad OK_2 = 100\,cm,$$

$$O_2 F = 25\,cm,\quad OK_3 = 200\,cm.$$

K vůli zjednodušení můžeme zrcadlící desku nahraditi svítícím zdrojem, nalézajícím se v bodě S' a vydávajícím 90% toho světla, jež vysílá zdroj S.

Dráhy, které jednotlivé paprsky, o nichž byla výše řeč, proběhnou, jsou tyto:

$$SK_2 = \sqrt{50.000}\ cm, \qquad SK_3 = \sqrt{80.000}\ cm,$$

$$S'K_1 = \sqrt{\frac{1,480.000}{9}}\ cm, \quad S'K_2 = \sqrt{170.000}\ cm,$$

$$S'K_3 = \sqrt{200.000}\ cm.$$

Intensitu světla, které by dopadlo do bodu O, kdyby zde nebylo neprůhledné desky, položme rovnu i. Intensitu světla dopadajícího na K_1 označme si i'_1, intensitu světla z S' dopadajícího na K_2 i'_2 a na K_3 i'_3; intensitu světla z S přímo dopadajícího na K_2 označme i_2 a na K_3 i_3. Abychom stanovili intensity v jednotlivých případech, musíme bráti v úvahu také cosiny úhlů dopadu a při paprscích odražených také to, že 10% světla se absorbuje deskou zrcadlící. Bude tedy

$$i'_1 = \frac{SO^2 \,.\, i}{S'K_1^2} \cdot \frac{SO_2}{SE} \cdot \frac{90}{100} = \frac{40.000 i}{\frac{1480000}{9}} \cdot \frac{100}{\frac{50}{3}\sqrt{57}} \cdot \frac{9}{10};$$

$$i'_1 = \frac{243\sqrt{37}}{6845} \,.\, i,$$

$$i'_2 = \frac{SO^2 \,.\, i}{S'K_2^2} \cdot \frac{SO_2}{SF} \, \frac{9}{10} \qquad\qquad i'_2 = \frac{72 \,.\, \sqrt{17}}{1445} \,.\, i,$$

$$i'_3 = \frac{SO^2 \,.\, i}{S'K_3^2} \cdot \frac{SO_2}{SC} \cdot \frac{9}{10} \qquad\qquad i'_3 = \frac{9\sqrt{5}}{125}\, i,$$

$$i_2 = \frac{SO^2 \,.\, i}{SK_2^2} \cdot \frac{SO_1}{SA} \qquad\qquad i_2 = \frac{8\sqrt{5}}{25},$$

$$i_3 = \frac{SO^2 \,.\, i}{SK_3^2} \cdot \frac{SO}{OK_3} \qquad\qquad i_3 = \frac{1}{2}\, i.$$

Byla-li by tedy v bodě O intensita osvětlení i, jest osvětlení na kružnici K_1 $i'_1 = \frac{243\sqrt{37}}{6845}\, i$, na kružnici K_2 přechází intensita z i'_2 do $i'_2 + i_2$, čili z $\frac{72\sqrt{17}}{1445}\, i$ do

$$\left(\frac{72\sqrt{17}}{1445}\, i + \frac{8\sqrt{5}}{25}\right)$$

a na kružnici K_3 z $i'_3 + i_3$ do i_3, tedy z

$$\left(\frac{9\sqrt{5}}{125}\,i + \frac{i}{2}\right) \text{ do } \frac{i}{2}.$$

Výrazy obecné pro osvětlení určitých velmi úzkých kruhových pásů na stěně, obsahující cosinusy dopadových úhlů lze dle uvedeného snadno utvořiti.

Úloha 4.

Po vodorovné rovině kráčí chodec $1\frac{1}{2}$ m vysoký směrem přímým rychlostí $2\,\frac{m}{sec}$; ve vzdálenosti 4 m od jeho dráhy je vztyčena svítilna 3 m vysoká. Udejte, jaký pohyb vykonává stín temene hlavy chodcovy. *Týž.*

Řešení zaslal p. *Jar. Pilnáček* ze VII. tř. reálky v Kladně.

Poněvadž témě hlavy chodcovy se pohybuje v přímce, pohybuje se stín jeho také v přímce, která je průsečnicí horizontální roviny s rovinou určenou drahou temene hlavy chodcovy a bodem svítícím. Myslíme-li si v této rovině dva světelné paprsky od zdroje vycházející, vidíme ihned z číselných údajů dle podobnosti trojúhelníků, že, urazí-li chodec dráhu s, urazí stín temene jeho hlavy dráhu $2s$, neboť stín je dvakrát dále od svítilny než témě hlavy. Pohyb stínu je téhož druhu, t. j. rovnoměrný, děje se však s rychlostí dvojnásobnou, totiž 4 m/sec. Blíží-li se chodec svítilně, stín temene jeho hlavy ho dohání (touž rychlostí, kterou se chodec pohybuje, blíží se stín temene hlavy k chodci), vzdaluje-li se od svítilny, stín ho předbíhá (zase touž rychlostí) a jest od něho tak daleko, jako je chodec sám vzdálen od svítilny.

Úloha 5.

S výšky h m padá volně těleso úplně nepružné na nakloněnou rovinu (odchylka α) úplně nepružnou a pevnou. Jaký bude pohyb tělesa po dopadu? *Týž.*

Řešení zaslal p. *Rud. Novotný* z VIII. tř. gymn. v Kyjově.

Těleso, z bodu A s výše h na nakloněnou rovinu N spuštěné dopadne na ni do bodu B rychlostí $v = \sqrt{2gh}$. Avšak při dopadu se rychlost zmenší a sice hodnota její bezprostředně po dopadu $v = \sqrt{2gh} \, . \, sin\, \alpha$, kdežto druhá složka $\sqrt{2gh} \, . \, cos\, \alpha$ ruší se odporem roviny.

Upravíme-li rovnici $v' = \sqrt{2gh} \; sin\, \alpha$ na tvar

$$v' = \sqrt{2gh \; sin\, \alpha \, . \, sin\, \alpha},$$

a píšeme-li místo $h \, . \, sin\, \alpha$ krátce s, obdržíme rovnici

$$v' = \sqrt{2g \, . \, s \, . \, sin\, \alpha},$$

v níž s jest vzdálenost paty kolmice, s bodu A na rovinu spuštěné, od bodu dopadu B. Rovnice $v' = \sqrt{2gs \; sin\, \alpha}$ jest stejná s rovnicí udávající rychlost při pádu po rovině nakloněné. Kdybychom tedy s bodu C, který jest patou kolmice spuštěné s A na rovinu danou, pustili těleso, pak by rychlost jeho v bodě B rovnala se

$$\sqrt{2g \; sin\, \alpha \, . \, CB} = \sqrt{2gh \; sin^2 \alpha} = v'.$$

Z toho jest zřejmo, že pohyb tělesa po dopadu bude právě takový, jako by padalo s bodu C po dané nakloněné rovině N.

Úloha 6.

Z bodu m ležícího v $\frac{1}{n}$ *vzdálenosti (d) dvou stěn svislých, rovnoběžných a dokonale pružných je vržena pod úhlem* α *koule dokonale pružná proti stěně vzdálenější. Jaká musí býti rychlost vrhu, aby koule po odrazu od prvé stěny dopadla na druhou a odrazila se od ní zpět do bodu m? Pod jakým úhlem a s jakou rychlostí dopadne do bodu m? Jak by se změnily výsledky, kdyby koule byla vržena proti stěně bližší?*

Týž.

Řešení zaslal p. *J. Jurnečka* ze VI. tř. reálky v Novém Městě na Moravě.

Poněvadž stěny jsou svislé a dokonale pružné, koule pak též dokonale pružné, bude rychlost před odrazem rovna rychlosti po odrazu, úhel dopadu bude pak vzhledem k horizontální rovině kolmicí dopadu položené symmetrický úhlu odrazu. Lze tudíž stěny žertovně považovati za zrcadla, v nichž dráhy parabolické vykonané koulí se zobrazí. Tím přejde úloha daná v úlohu: Najíti rychlost c, kterou těleso vrženo byvši z bodu

m_1 pod daným úhlem α, dopadlo by do bodu m_2, vzdáleného $2d$, a ležícího v téže horizontální rovině.

$$2d = \frac{c^2 \sin 2\alpha}{g}, \quad c^2 = \frac{2\,dg}{\sin 2\alpha}, \quad c = \sqrt{\frac{2\,dg}{\sin 2\alpha}}.$$

Z toho vidno, že rychlost c nezávisí nikterak na poloze bodu m. Závisí toliko na vzdálenosti stěn, zrychlení tíhovém a úhlu α. Rovněž výsledky by se nezměnily, kdyby koule vržena byla proti stěně bližší, poněvadž dopadne zpět do bodu m pod stejným úhlem a se stejnou rychlostí, s jakou byla z něho vržena. Změnou polohy bodu m mění se pouze polohy bodů, kde se koule stěn dotkne.

Úloha 7.

Dokonale pružná koule je vržena pod úhlem 45° rychlostí 20 m proti stěně dokonale pružné stojící ve vzdálenosti 12 m a nakloněné k rovině vodorovné o úhel 80°. Kam dopadne koule po odrazu a s jakou rychlostí? *Týž.*

Řešení autorem úlohy podané.

Pokládáme směr vodorovný za osu X, kolmici k němu v bodu, z něhož těleso je vrženo, za osu Y. Parabola pohybu je udána rovnicemi

$$x = 10 \,.\, \sqrt{2} \,.\, t,$$
$$y = 10 \,.\, \sqrt{2} \,.\, t - \tfrac{1}{2}\, gt^2.$$

Vyloučením t obdržíme rovnici paraboly

$$y = x - \frac{9x^2}{400}. \tag{1}$$

Rovnice přímky, v níž rovina nákresná protíná stěnu, je

$$y = -\,x\, tg\, 80^0 + 12\, tg\, 80^0. \tag{2}$$

Řešením rovnic (1) a (2) obdržíme, počítáme-li jen na desetiny

$$x_1 = 10{\cdot}6\ m, \quad y_1 = 7{\cdot}9\ m.$$

Z toho pak

$$t_1 = \tfrac{3}{4}\ sec.$$

Tím je určen na stěně bod, do něhož těleso dopadne, a čas, za který náraz nastane Rychlost, kterou těleso narazí, skládá se ze dvou složek: horizontální

$$v_1 = 10\sqrt{2},$$

a vertikální

$$v_2 = 10\sqrt{2} - gt_1\,;$$

rychlost výsledná

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 15{\cdot}7\ m/sec.$$

Směr dráhy v místě nárazu je udán rovnicí

$$tg\,\alpha = \frac{v_1}{v_2}\,;\ \alpha = 25^0\,37'.$$

Úhel dopadu je

$$90^0 - (180^0 - 80 - 25^0\,37') = 15^0\,37'\,;$$

koule odrazí se od stěny v témže úhlu a počne se tedy pohybovati zpět ve směru, jenž svírá s horizontem úhel $\varphi = 5^0\,37'$, rychlostí 15·7 $m\ sec^{-1}$. Složka této rychlosti

vodorovná: $15{\cdot}7\ .\ cos\ \varphi$.
svislá: $15{\cdot}7\ .\ sin\ \varphi$.

Za dobu t od okamžiku nárazu urazí koule dráhu

$$s_1 = -15{\cdot}7\ .\ cos\ \varphi\ .\ t,$$

a dostane se do bodu, jehož úsečka je

$$x = x_1 - 15{\cdot}7\ cos\ \varphi\ .\ t,$$

a pořadnice

$$y = y_1 + 15{\cdot}7\ sin\ \varphi\ .\ t - \frac{g}{2}\,t^2.$$

Vyloučíme-li t, obdržíme rovnici dráhy:

$$y = y_1 + (x_1 - x)\,tg\,\varphi - \frac{g}{2\,(15{\cdot}7\,cos\,\varphi)^2}\,(x_1 - x)^2.$$

Místo, kam koule dopadne, má pořadnici $y = 0$; dosadíme-li do napsané rovnice tuto podmínku, vypočítáme

$$x_1 - x = 22{\cdot}2,$$

a tedy

$$x = -11{\cdot}6,$$

t. j. koule dopadne k zemi v této vzdálenosti od bodu, z něhož byla vyhozena. Rychlost při dopadu je rovna rychlosti, s kterou byla koule vyhozena, ježto nenastala ztráta energie a žádná energie kinetická se neproměnila v potenciálnou, poněvadž koule dopadla zpět do téže roviny vodorovné.

Úloha 8.

Železný stojan skládá se z podstavce, majícího tvar pravidelného jehlanu čtyřbokého komolého, a tyče válcové, zapuštěné kolmo do středu podstavce. Jaká je stálost polohy stojanu, jsou-li: hrana dolejší základny 50 cm, hořejší 25 cm, výška podstavce 10 cm, délka tyče 1 m, hmota tyče rovna hmotě podstavce a spec. hmota 7·6. Jaké nejmenší síly je třeba k postavení podstavce, byl-li zvrácen? *Tý.*

Řešení autorem úlohy podané.

Těžiště jehlanu pravidelného čtyřbokého leží ve čtvrtině výšky. Podstavec stojanu je jehlan zkomolený v polovině výšky, t. j. zmenšený o jehlan rovný obsahem a tedy i hmotou osmině původního. Těžiště komolého jehlanu nalezneme odtud dle pravidla o skládání dvou sil rovnoběžných a směru protivného, z nichž jedna je osmkráte větší než druhá; prvá působí v $\frac{1}{4}$, druhá v $\frac{5}{8}$ výšky původního jehlanu. Výslednice obou působí v $\frac{11}{56}$ výšky původního a tedy v $\frac{11}{28}$ výšky zkomoleného jehlanu. Leží tedy těžiště tohoto tělesa na jeho ose ve výšce 3·93 *cm* nad základnou. Těžiště válce je 60 *cm* nad základnou, těžiště celého stojanu t tedy $\frac{63{\cdot}93}{2} = 31{\cdot}96$ *cm* nad základnou.

Otáčíme-li stojan kol jedné hrany základny, opisuje těžiště kružnici o poloměru

$$r = \sqrt{31{\cdot}96^2 + 25^2} = 40{\cdot}58.$$

Má-li přejíti stojan v polohu vratkou, musí těžiště stoupnouti o $s = 40{\cdot}58 - 31{\cdot}96 = 8{\cdot}62$ *cm*. Ježto hmota celého stojanu je 221·7 *kg*, je práce potřebna ku zvrácení stojanu

$$P = 221{\cdot}7 \times 0{\cdot}0862 = 19{\cdot}11\ kgm,$$

což je míra jeho stálosti.

Je-li stojan již zvrácen, označme o střed hrany základny, na níž stojan spočívá, a m bod na hořejší podstavě válce, na němž stojan rovněž spočívá. $\overline{om}$ je pak přepona pravoúhlého trojúhelníka, v němž jsou odvěsny: výška celého stojanu a polovina hrany při základně zmenšené o poloměr ϱ válce; tedy

$$\overline{om} = \sqrt{110^2 + 18{\cdot}2^2} = 111{\cdot}5.$$

Ze známé hmoty a výšky válce určíme totiž jeho poloměr $\varrho = 6{\cdot}8$ a $25 - 6{\cdot}8 = 18{\cdot}2$.

Vzdálenost průmětu těžiště na rovinu horizontální od bodu o vypočítáme snadno z podobnosti jistých trojúhelníků; je rovna $35{\cdot}6\ cm$.

Zdvíháme-li stojan v bodu m, potřebujeme síly menší, než kdybychom podpírali stojan v kterémkoli jiném místě, jak lze snadno uvážiti; velikost síly ku zdvíhání potřebné pak plyne z rovnosti momentů:

$$P_1 \, . \, 111{\cdot}5 = 221{\cdot}7 \, . \, 35{\cdot}6,$$

t. j.

$$P_1 = 70{\cdot}8\ kg.$$

Stačí tedy ku vzpřímení síla asi 71 kg.

Úloha 9.

Na londýnské městské dráze nádraží jsou nad ostatní trať zvýšena za tím účelem, aby se ušetřilo na energii, jež jinak brzděním na zmar přichází. S obou stran nádraží je tedy trať skloněna. Vypočítejte, oč musí býti nádraží nad ostatní trať zvýšeno, aby vlak vyjíždějící na svah rychlostí 20 m sek^{-1} *na nádraží dojížděl rychlostí 5 m, obnáší-li délka svahu 250 m tření a odpor vzduchu* $\frac{1}{250}$ *váhy vlaku.*

V čem spočívá úspora na energii a jak veliká je při váze vlaku = 100 t? Dr. *F. Pietsch.*

Řešení zaslal p. *Jos. Jandásek* z VIII. tř. gymn. ve Strážnici.

Práce vlakem vykonaná rovná se ztrátě živé síly; byla-li rychlost vlaku pod svahem v_1, na nádraží v_0, je práce L dle zmíněného principu živých sil

$$L = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \frac{m}{2} \, . \, 4 \, . \, 10^6 - \frac{m}{2} \, . \, 25 \, . \, 10^4.$$

Práce tato spotřebuje se na zdvižení vlaku o hledanou výšku x a na tření, tak že

$$L = mg \, . \, x + \eta \, . \, mg \, . \, d,$$

kde η je koefficient tření, d délka svahu.

Numericky plyne srovnáním obou výrazů

$$\tfrac{1}{2} m \,.\, 4 \,.\, 10^6 - \tfrac{1}{2} m \,.\, 25 \,.\, 10^4 = m(981x + 98100),$$

z čehož $$x = 1811{\cdot}3 \; cm \doteq 18{\cdot}1 \; m.$$

Úspora energie záleží v tom, že se energie pohybu při zastavování nezmění brzděním v ztracenou energii tepelnou, nýbrž v energii polohy, jež, když vlak se svahu sjede, se zase ve formě energie kinetické objeví. Energie polohy jest rovna $m \,.\, g \,.\, x$, a obnáší při váze vlaku rovné

$$100 \; t = 10^5 \; kg \;\; 1811300 \; kgm = 17{\cdot}77 \,.\, 10^6 \text{ Joule.}$$

Úloha 10.

Text viz na str. 230.

Částečně dle řešení, jež zaslal p. *J. Loutocký* z VIII. tř. gymn. v Olomouci.

Označme odpor prvého vnějšího drátu (i s vnitřním odporem prvního dynama) r_1, odpor druhého vnějšího drátu (s vnitřním odporem druhého dynama) r_2, odpor prostředního drátu r_3. Odpor žárovek v hořejším spojení buď R_1, v dolejším R_2. Intensita proudu buď v prvém drátě J_1, v prostředním J_3, a směřujž od dynama k žárovkám, v druhém vnějším drátě J_2, jež směřujž od žárovek k dynamu. Jest patrno, že musí

$$J_3 = J_2 - J_1. \tag{1}$$

Poněvadž dle zákona Ohmova se rovná napětí součinu z intensity a odporu, při čemž nutno bráti zřetel k směru proudu, platí pro napětí prvého dynama e_1

$$e_1 = J_1 (r_1 + R_1) - J_3 r_3 \tag{2}$$

a pro napětí druhého e_2

$$e_2 = J_2 (r_2 + R_2) + J_3 r_3. \tag{3}$$

Těmito třemi rovnicemi jest úkol obecně řešen; lze z nich docela všeobecně vyčísliti J_1, J_2 a J_3 pro libovolná daná napětí a odpory, leč resultující vzorce jsou nepřehledné.

Pro prvý případ, kdy $r_1 = r_2 = r = 0{\cdot}5$ *Ohm*, $R_1 = R_2 = R = 1$ *Ohm* a $e_1 = e_2 = e = 120$ *Volt*, plyne ze součtu rovnic (2) a (3)

$$2e = (J_1 + J_2)(r + R) \text{ čili } J_1 + J_2 = \frac{2e}{r + R} = 160 \; Amp,$$

a odečtením rovnice (3) — rovnice (2) s dosazením z rovnice (1) $(J_2 - J_1)(r + R) + 2(J_2 - J_1) r_3 = 0$ čili $J_1 = J_2 = 80$ *Amp*, a $J_3 = 0$. Prostředním vodičem neprochází proud žádný, jsou-li obě strany stejně zatíženy.

Pro druhý daný případ $r_1 = r_2 = 0{\cdot}5$, $e_1 = e_2 = 120$, $R_1 = 1$, $R_2 = 0{\cdot}5$ plyne, jak se dosazením numerických hodnot snadno najde,

$$J_1 = 95\,{}^5/_{53}\ Amp,\quad J_2 = 97\,{}^{19}/_{53}\ Amp,\quad J_3 = 2\,{}^{14}/_{53}\ Amp.$$

Výhoda zařízení spočívá v tom, že místo čtyř přívodních drátů užíváme pouze tří a mimo to může býti drát prostřední slabší než oba krajní, ježto jím procházejí jen slabé proudy.

Řešení úloh

podaných na konci článku „Theorie maxim a minim" od dra. B. Bydžovského (v. str. 315.)

Úloha 1.

Z okna ležícího v metrů nad ulicí pozoruji chodce výšky l m, jenž kráčí ulicí ve vzdálenosti d m od domu (a s průčelím domu rovnoběžně). V kterém místě jeví se mi chodec v úhlu největším?

Řešení zaslal p. *Jaromír Pilnáček* ze VII. tř. reálky v Kladně.

Témě hlavy chodcovy označme a, výšku jeho $\overline{ab} = l$, místo z něhož pozorujeme v, místo na ulici pod námi p (tedy $\overline{pv} = v$) a nejbližší k nám bod dráhy chodcovy d (takže $\overline{pd} = v$).

Je-li $\overline{bd} = x$, jsou strany trojúhelníka abv:

$$\overline{ab} = l,\ \overline{va} = \sqrt{(v - l)^2 + d^2 + x^2},\ \overline{vb} = \sqrt{v^2 + d^2 + x^2}.$$

Carnotovou větou lze ustanoviti úhel φ, v němž jeví se chodec z místa v.

Uvažujme jakožto jednodušší funkci

$$tg\,\varphi = \frac{l\sqrt{d^2 + x^2}}{v^2 + d^2 + x^2 - vl}.$$

Tato funkce má nabýti krajních hodnot; položme

$$y = \frac{\sqrt{d^2 + x^2}}{v^2 + d^2 + x^2 - vl};$$

krajní hodnoty nastanou, když

$$y' = \frac{x(v^2 - d^2 - x^2 - vl)}{\sqrt{d^2 + x^2}\,(v^2 + d^2 + x^2 - vl)^2} = 0.$$

Tu může býti

$a)$ $x = \infty$ ($\varphi = 0$, minimum)

$b)$ $x_1 = 0$

$c)$ $x_2 = \pm\sqrt{v^2 - vl - d^2}$.

Utvořme druhou derivaci funkce y a dosaďme $x_1 = 0$, pak

$$y''_1 = \frac{v^2 - vl - d^2}{d(v^2 + d^2 - vl)^2} = \frac{x_2^2}{d(v^2 + d^2 - vl)^2}$$

$$x_2 = \pm\sqrt{v^2 - vl - d)^2}, \text{ pak}$$

$$y''_2 = \frac{-(v^2 - vl - d^2)}{2(v^2 - vl)^{\frac{5}{2}}} = \frac{-x_2^2}{2(v^2 - vl)^{\frac{5}{2}}}.$$

Hodnota x_2 poskytuje jen tehdy reálný výsledek, je-li $d < \sqrt{v(v - l)}$ a současně $v > l$. Hodnota x_2 činí pak úhel φ vždy maximální, neboť y''_2 je záporné. V tomto případě, kdy x_2 je reálné, jest úhel φ při $x_1 = 0$ minimální (relativně), neboť y''_1 jest kladné. Je-li x_2 imaginárné, jest y''_1 záporné a hodnota $x_1 = 0$ činí úhel φ maximálním.

Třeba rozlišovati tři hlavní případy:

1. $v < l$; tu pro φ nastává vždy maximum při $x = 0$, ať jest d jakékoliv;

$$tg\,\varphi = \frac{ld}{v^2 - vl + d^2}.$$

2. $v > l$, $d > \sqrt{v(v - l)}$; maximální hodnota jest jen při $x = 0$;

$$tg\,\varphi = \frac{ld}{v^2 - vl + d^2}.$$

3. $v > l$, $d < \sqrt{v(v - l)}$; při $x_1 = 0$ nastává pro φ hodnota minimální:

$$tg\,\varphi = \frac{ld}{v^2 - vl + d^2};$$

při $x_2 = \pm\sqrt{v^2 - vl - d^2}$ nastávají dvě stejné maximální hodnoty:

$$sin\,\varphi = \frac{l}{2v - l}.$$

Poslední výsledek je tím zajímavý, že φ není závislé na d, t. j. pro $d < \sqrt{v(v-l)}$ je maximum φ stálé, čili z určité výšky lze osobu určité délky viděti nejvýš pod úhlem určeným rovnicí

$$\sin \varphi = \frac{l}{2v - l}.$$

Geometrické místo jednotlivých poloh pro maximální φ jest při proměnném d

$$x_2^2 + d^2 = v^2 - vl = r^2,$$

kružnice K o středu p a poloměru $r = \sqrt{v^2 - vl}$.

Veškeré výsledky lze shrnouti takto:

Chodec jeví se v největším úhlu (při stálém v a l) tehdy, je-li na kružnici K (vždy dvě polohy souměrné dle d, v němž je relativní minimum), neprotíná-li jeho dráha kružnici K, jeví se v největším úhlu v bodech přímky pd, které leží vně kružnice K. Maximální hodnota φ na K je stálá

$$\left(\sin \varphi = \frac{l}{2v - l}\right);$$

na přímce $\overline{pd}$ ubývá s rostoucím d.

Mimo to správná řešení podali pp. *J. Jandásek* z VIII. tř. g. v Strážnici, *Frant. Pražan* ze VI. tř. g. v Hradci Králové, *Jan Svoboda* ze VII. tř. r. v Jevíčku a *Boh. Kladivo* z I. tř. č. g. v Brně.

Úloha 2.

Bodem m ležícím ve vodorovné rovině vedené středem koule o poloměru r jest položiti rovinu, po níž by těleso, padajíc z bodu m, dospělo k povrchu koule v době co nejkratší (vzdálenost bodu m od středu $d < r$). Jest provésti geom. konstrukci této roviny.

Řešení 1. zaslal p. *Fr. Pražan* ze VI. tř. g. v Hradci Králové.

Nazveme úhel, o který odchýlena bude rovina hledaná od roviny vodorovné α. Z rovin, které mají tento spád, bude jistě naší úloze vyhovovati ona, jež jest kolmá k svislé rovině položené body o, m (kde o je střed koule), neboť dráha po ní po přímce spádu k povrchu kulovému je patrně nejkratší a akcelerace pro všechny ty roviny stejná ($g \,.\, \sin \alpha$). Bod dopadu na ploše kulové nazveme a, $\overline{ma} = x$.

Pak $$d^2 + x^2 + 2dx \cos\alpha = r^2,$$
$$\cos\alpha = \frac{r^2 - d^2 - x^2}{2xd},$$
$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{2x^2(r^2+d^2) - x^4 - (r^2-d^2)^2}}{2xd}.$$

Pro pád na rovině nakloněné platí
$$t = \sqrt{\frac{2x}{g \sin\alpha}}.$$

Položíme-li $$\frac{t^2 g}{2} = y,$$

máme $$y = \frac{2x^2 d}{\sqrt{2x(r^2+d^2) - x^4 - (r^2-d^2)^2}};$$
$$y' = \frac{4xd\left(x^2(r^2+d^2) - (r^2-d^2)^2\right)}{\left(\sqrt{2x^2(r^2+d^2) - x^4 - (r^2-d^2)^2}\right)^3} = 0.$$

Ježto x nemůže býti nulla, musí
$$x_{1,2} = \pm \frac{r^2 - d^2}{\sqrt{r^2+d^2}},$$
kdež různá znamení výrazu nemají významu.

Tedy hledané $$x = \frac{r^2 - d^2}{\sqrt{r^2+d^2}}.$$

Druhá derivace
$$y'' = \frac{8d(r^2-d^2)^2}{8r^3d^3(r^2-d^2)^3} = \frac{1}{r^3d^2(r^2-d^2)}$$
jest kladná, tedy x minimální.

Pak jest $$tg\,\alpha = \frac{r}{d}$$

a $$t = \sqrt{\frac{2(r^2-d^2)}{g \cdot r}}.$$

Rovina hledaná prochází podle výsledku pro α polem dané vodorovné roviny.

Správná řešení podobnou cestou podali ještě pp. *Pilnáček, Jandásek, Svoboda* a *Kladivo.*

Kromě toho zaslal p. *Pilnáček* ještě dvě a p. *Jandásek* ještě 3 řešení, ze kterých pro zajímavost otiskujeme toto oběma řešiteli podané řešení:

Řešení 2. zaslal p. *Jandásek.*

Položme body o a m svislou rovinu, jež seče danou kouli v kružnici K; hledaný bod, v němž těleso dosáhne povrchu koule, nazveme a.

Tu jest $\overline{ma} = s = \frac{g}{2} \cdot t^2 \sin \alpha.$

Při konstantním t jest geom. místem bodu a kružnice K', jejíž střed o' jest na $mo' \perp om$. Má-li t býti minimum, musí i poloměr kružnice K' býti co nejmenší, při tom však musí naše těleso dopadnouti na nějaký bod kružnice K. Nejmenší K' které má s K nějaký bod společný je však kružnice dotýkající se v bodě m přímky om a kromě toho kružnice K. Hledaný dotyčný bod bude vnějším středem podobnosti obou kružnic. Tedy vedeme $op \perp om$, $\overline{op} = r$ a spojnice $\overline{pm}$ protíná K v hledaném bodě a.

Uloha 3.

Do rovnoramenného trojúhelníka o dané základně a výšce vepsati ellipsu, jejíž jedna osa by ležela v ose trojúhelníka, a jejíž obsah by byl maximální. Zvláštní případ: trojúhelník rovnostranný.

Řešení zaslal p. *J. Jandásek* z VIII. tř. g. v Strážnici.

Buď počátek prav. soustavy ve středu hledané ellipsy a osa trojúhelníka buď osou X.

I bude rovnice ellipsy

$$\left(\frac{x}{p}\right)^2 + \left(\frac{y}{q}\right)^2 = 1. \tag{1}$$

Rovnice horního ramene trojúhelníka bude, znamená-li c délku základny a v výšku našeho trojúhelníka,

$$y = \frac{\frac{c}{2}}{-p-(v-p)}\,[x-(v-p)]$$

čili
$$y = -\frac{c}{2v}\,x + \frac{c}{2v}\,(v-p), \tag{2}$$

tedy tvar
$$y = Ax + k. \tag{3}$$

Přímka ta je tečnou, platí-li

$$A^2p^2 + q^2 = k^2. \tag{4}$$

Tedy dle rovnice (2)

$$\frac{c^2}{4v^2}p^2 + q^2 = \frac{c^2}{4v^2}(v-p)^2,$$

z čehož

$$q^2 = \frac{c^2}{4v}(v - 2p).$$

Obsah ellipsy jest $O = \pi pq = \pi p \frac{c}{2\sqrt{v}} \sqrt{v - 2p}.$ (5)

Pro maximum stačí operovati s funkcí

$$f(p) = p\sqrt{v - 2p}. \quad (6)$$

Pak jest $f'(p) = \sqrt{v-2p} + p \cdot \frac{-2}{2\sqrt{v-2p}} = 0$

čili

$$p = \frac{v}{3},\ q = \frac{c}{6}\sqrt{3},\ O = \pi\frac{vc}{18}\sqrt{3}.$$

Druhá derivace

$$f''(p) = \frac{-2}{\sqrt{v-2p}} + \frac{-p}{(v-2p)^{\frac{3}{2}}};$$

čili po dosazení

$$f''(p) = -\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{v}},\ \text{tedy } f''(p) < 0.$$

V trojúhelníku rovnostranném $v = \frac{c}{2}\sqrt{3}$

a

$$p = q = \frac{c}{6}\sqrt{3},$$

ellipsa přechází ve vepsanou kružnici, jejíž obsah

$$O = \pi\frac{c^2}{12}.$$

Správná řešení této úlohy podali p. *Pilnáček* z Kladna (tři řešení), p. *Svoboda* z Jevíčka, p. *Pražan* z Hradce Králové a p. *B. Kladivo* z I. g. v Brně. P. *Jandásek* ze Strážnice mimo otištěné podal ještě 3 správná řešení jiná.

Pp. *Pilnáčkovi* z Kladna a *Jandáskovi* ze Strážnice byla udělena první cena: po 1 výt. Weyrova Počtu differenciálního; také ostatním třem pp. řešitelům zasláno bude po knize z nákladu Jednoty.

Správná *) řešení úloh v tomto ročníku zaslali pp.:

a) Z mathematiky:

Altmann Karel, VI. g. Přerov, 4., 6., 7., 12., 14.—16., 22., 23., 26.—33., 35.
Bažant Miloš, V. r. Příbor, 1., 3., 5., 11., 14., 22., 25.
Beck Ondřej, VIII. g. Olomouc, 7., 10., 13., 14, 16, 24., 25., 32.
Bílek Augustin, VII. r. Přerov, 4., 7, 9., 19., 20., 21., 23.—25., 27., 30., 33., 35.
Brdička Bohumil, VII. g. Chrudim, 4., 6., 7., 12., 19., 20., 23., 27., 29.—31.
Dominik Rudolf, VII. g. Boskovice, 1., 4., 10., 19., 21.—23., 25., 27., 33.—35.
Dudárek Arnošt, V. r. Č. Budějovice, 6., 7., 26.—28.
Fiala Josef, VI. r. Nové Město na Moravě, 13., 27., 28., 30., 31.
Gregor Alois, VIII. g. Kyjov, 5.
Halík Josef, VII. r. Tábor, 13., 20., 22.—25., 27., 28, 30.—34., 36.
Hanák Rudolf, VII. r. Prostějov, 4.—6., 13., 19., 22, 27., 32., 35.
Hendrich Josef, VIII. g. Přerov, 4., 6., 7., 9.—12., 19., 22., 23., 26.—32.
Holeček Karel, VII. r. Praha III., 1., 4., 5.—7., 9., 10., 13.—16., 19.—37.
Hraše Josef, VIII. g. Praha-III., 1., 4.—7., 9., 10., 13.—16., 19.—27., 33., 34., 36, 37.
Hrubíšek Otakar, VIII. g. Kyjov, 2.—15., 17., 19., 21., 23., 27.—34., 37.
Hulín Josef, VII. g. Strážnice, 1., 4.—6., 8., 9., 13., 14., 19., 21., 25.—34
Jandásek Josef, VIII. g. Strážnice, 1.—37.
Jarůšek Jaroslav, VI. g. Benešov, 4.
Jelínek František, VIII. rg. Praha, Křemencová, 4., 6.
Jurnečka Jaroslav, VI. r. Nové Město na Moravě, 1., 3., 4.—7., 12., 14., 23., 26.—32., 36.
Kaňa Jan, VII. r. Kroměříž, 3., 4., 6.—11., 13.—15.
Kloss Josef, V. g. Přerov, 6., 7.
Koláček Alois, g. Val. Meziříčí, 4., 20.

*) aspoň v principu.

Kolář Antonín. VII. g. Jindřichův Hradec, 4., 5., 13., 14., 23., 26.—29.

Krejzlík Jaroslav, V. tř. kníž. arcib. semináře,. 2., 4., 6., 7., 15., 16., 24., 27., 28., 29., 31., 32., 36.

Kubr Frant., VI. r. Kroměříž, 4., 6., 7., 13., 25., 27.

Kutnohorský Frant, VI. r. Telč, 4.—7., 9., 12.—14., 22., 23., 27., 28., 30., 31.

Kvapil Milan, VI. r. Jevíčko, 4., 7., 9., 26.—28.

Kymla K., VII. r. Tábor, 4., 6., 13., 19., 20., 22., 24., 25., 27., 28., 30., 31., 33.

Lavička Josef, VII. g. Místek, 1., 4., 5., 7., 14.

Loutocký Josef, VIII. g. Olomouc, 3.—25., 27., 28., 30.—36.

Machytka B., VI. r. Karlín, 7., 9., 23., 30.

Malina Rudolf, VII. r. Nové Město na Moravě, 1., 2., 4.—23., 25.—31., 33., 35.—37.

Miklica Martin, VII. r. Hodonín, 4., 7., 9., 14., 17., 19., 21.

Motka Leopold, VIII. g. Přerov, 4., 6., 7., 12., 19., 22., 23., 26.—31. 32., 34.

Nedoma Antonín, VII. r. Velké Meziříčí, 4.—7., 23., 27., 28., 30.—32.

Nováček Frant., VIII. g. Třebíč, 1., 4., 6.—8., 12.—14., 19.—23., 25., 27.—29., 32.—34.

Novák Josef, VII. g. Pelhřimov, 6., 14., 17.

Novotný Rudolf, VIII. g. Kyjov, 4.—15., 17., 19., 21., 23., 26.—34.

Obhlídal Ludvík, VII. r. Hodonín, 4., 7., 9., 14., 17. 19., 21., 23., 25., 27., 28., 30.—35.

Pelikán Em., V. r Praha-II., 17., 26.

Pilnáček Jaromír, VII. r. Kladno, 1.—37.

Pivnička Jaromír, VI. r. Kr. Vinohrady, 1., 5.—7., 13., 14., 19.—23., 25.—37.

Pokorný Amos, VI. I. č. g. Brno, 4., 6., 7., 9., 10, 12.—14., 17., 19.—21., 23., 25, 26.—29., 33.—37.

Pražák Josef, VI. g. Č. Budějovice, 4., 7., 23, 27.—30.

Pražan Frant., VI. g. Hradec Králové, 2., 4., 5., 7., 9., 10., 13., 14., 18., 20.—23., 25.—34., 36.

Přidal Rudolf, VIII. g. Přerov, 4, 6., 7., 12., 14., 19., 22., 23., 27.—32.

Ptačovský Jan, VII. r. Kutná Hora. 4.
Rek František, VII. r. Lipník. 4 7., 14., 19., 27.—35.
Řehoř Vojtěch, VI. g. Budějovice. 4., 7., 26., 27.
Schwarz Rudolf. VII. r. Kutná Hora, 4.
Syrový Emil, VII. g. Ml. Boleslav, 1., 3.—10., 12., 14.—19., 21.
Šatava Václav, VII. g. Písek, 3., 5.—7., 9., 10., 12.—14., 19., 20., 22.—31
Ščerba Josef, VIII. g. Místek, 21.—23., 25., 27. 28., 30.—36.
Šercl Karel, VI. r. Louny, 22., 23., 27., 28.
Šlechta Jan, VII. r. Praha-III., 1., 4., 6., 7., 14., 20.—23., 25., 29., 30., 32.—35., 37.
Šmíd Karel, VI. r. Jičín, 13., 27., 32.
Teige Karel, IV. g. Praha, Žitná ul., 4., 5., 14., 20.
Trna Methoděj, VII. g. Olomouc, 6., 7., 9., 10., 13., 14., 20., 23., 27., 28. 30. - 32., 36.
Úlehla Vlad., VIII. g. Strážnice, 1., 6., 13., 14., 19., 25.—27., 30., 33., 34.
Vacek Vratislav, VII. g. Třebíč, 4., 14.
Vacík Ladislav, VI. r. Nové Město na Moravě, 1., 3.—23., 25.—33., 36.
Vincik Jakub, V. I. č. g. Brno, 4.—10., 14., 16., 19., 29.
Vojtek Jan, VIII. g. Přerov, 4.—7., 9.—14., 16., 17., 19.—23., 26.—35.
Žídek Josef, stud. v Opavě, 27.
Zejda Ed., r. Velké Meziříčí, 7., 22., 23., 25., 27., 29.—35.

b) Z deskriptivní geometrie:

Bažant Miloš, V. r. Příbor, 3., 4., 6.
Bílek Augustin, VII. r. Hodonín, 3., 4.
Hraše Josef, VII. g. Praha-III., 3., 4.
Jandásek Josef, VIII. g. Strážnice, 1., 3.—7.
Jurnečka Jar., VI. r. Nové Město na Moravě, 1., 3.—6.
Kaňa Jan, VII. r. Kroměříž, 1., 3., 4.
Kubr František, VI. r. Kroměříž, 1., 5.
Kutnohorský František, VI. r. Telč, 1., 3.—5.
Kvapil Milan, VI. r. Jevíčko, 5., 6.
Machytka B., VI. r. v Karlíně.
Miklica Martin, VII. r. Hodonín, 3., 4.

Nedoma Antonín, VII. r. Velké Meziříčí, 1., 4., 5.
Novotný Rudolf, VIII. g. Kyjov, 1., 4., 5.
Obhlídal Ludvík, VII. r. Hodonín, 3., 4., 7.
Pilnáček Jaromír, VII. r. Kladno, 1.–7.
Pivnička Boh., VI. r. Král. Vinohrady, 1., 5.
Ptačovský Jan, VII. r. Kutná Hora, 1., 3., 4.
Rek František, VII. r. Lipník, 4., 6.
Schwarz Rudolf, VII. r. Kutná Hora, 1., 3., 4.

c) Z fysiky*):

Dominik Rudolf, stud. VII. tř gymn. v Boskovicích, úl. 1., 5.
Fiala Josef, stud. VI. tř. reálky v Novém Městě, úl. 4.
Gregor Alois, stud. VIII. tř. gymnasia v Kyjově, úl. 1., 4., 5.
Holeček Karel, stud. VII. tř. reálky v Praze III., úl. 3., 4.
Hraše Josef, stud. VIII. tř. gymnasia v Praze III., úl. 3., 4.
Hrubíšek Otakar, stud. VIII. tř. gymnasia v Kyjově, úl. 6., 8.
Jandásek Josef, stud. VIII. tř. gymnasia v Strážnici, úl. 1., 2., 3., 4., 5., 6., 9.
Jurnečka Jaroslav, stud. VI. tř. reálky v Novém Městě, úl. 1., 2., 3., 4., 5., 6.
Kolář Antonín, stud. VII. tř. gymnasia v Jindř. Hradci, úl. 4.
Krejzlík Jaroslav, stud. V. tř. kníž. arcib. semináře v Kroměříži, úl. 4.
Loutocký Josef, stud. VIII. tř. gymnasia v Olomouci, úl. 4., 5., 9.
Machytka Bohumil, stud. VI. tř. reálky v Karlíně, úl. 5.
Nedoma Antonín, stud. VII. tř. reálky ve Vel. Meziříčí, úl. 1.
Novotný Rudolf, stud. VIII. tř. gymnasia v Kyjově, úl. 1., 3., 4., 5., 6., 7., 8., 9.
Pilnáček Jaromír, stud. VII. tř. reálky v Kladně, úl. 1., 2., 4., 5., 6., 7., 10.
Šatava Václav, stud. VII. tř. gymnasia v Písku, úl. 4.
Trna Metoděj, stud. VII. tř. gymnasia v Olomouci, úl. 4., 5.

---

*) v některých případech až na numerickou chybu v úl. 7.

Udělení cen.

Ceny za správná řešení úloh přisouzeny takto:

a) z mathematiky obdrželi

cenu první:

pp. *Jandásek Josef* z VIII. tř. g. ve Strážnici,
Holeček Karel ze VII. tř. r. v Praze III.,
Hrubíšek Otakar z VIII. tř. g. v Kyjově,
Loutocký Josef z VIII. tř. g. v Olomouci,
Malina Rudolf ze VII. tř. r. v Novém Městě na Moravě,
Pilnáček Jaromír ze VII. tř. r. v Kladně,
Pivnička Jaromír ze VI. tř. r. na Král. Vinohradech,
Pokorný Amos ze VI. tř. g. v Brně,
Pražan František ze VI. tř. g. v Hradci Králové,
Vacík Ladislav ze VI. tř. r. v Novém Městě na Moravě,
Vojtek Jan z VIII. tř. g. v Přerově;

cenu druhou:

pp. *Altmann Karel* ze VI. tř. g. v Přerově,
Hendrich Josef z VIII. tř. g. v Přerově,
Hraše Josef z VIII. tř. g. v Praze-III.,
Hulín Josef z VIII. tř. g. ve Strážnici,
Jurnečka Jaroslav ze VI. tř. r. v Novém Městě na Moravě,
Krejzlík Jaroslav z V. tř. arcib. sem. v Kroměříži,
Nováček František z VIII. tř. g. v Třebíči,
Novotný Rudolf z VIII. tř. g. v Kyjově,
Syrový Emil ze VII. tř. g. v Mladé Boleslavi,
Šatava Václav ze VII. tř. g. v Písku,
Šlechta Jan ze VII. tř. r. v Praze-III.;

cenu třetí:

pp. *Bažant Miloš* z V. tř. r. v Příboře,
Bílek Augustin ze VII. tř. r. v Přerově,
Brdička Bohumil ze VII. tř. g. v Chrudimi,
Dominik Rudolf ze VII. tř. g. v Boskovicích,
Halík Josef ze VII. tř. r. v Táboře,
Kaňa Jan ze VII. tř. r. v Kroměříži,
Kutnohorský Fr. ze VI. tř. r. v Telči,
Kymla K. ze VII. tř. r. v Táboře,
Motka Leopold z VIII. tř. g. v Přerově,

Obhlídal Ludvík ze VII. tř. r. v Hodoníně,
Přidal Rudolf z VIII. tř. g. v Přerově,
Rek František ze VII. tř. r. v Lipníku,
Trna Methoděj ze VII. tř. g. v Olomouci,
Úlehla Vlad. ze VII. tř. g. v Strážnici,
Vincík Jakub z V. tř. I. č. g. v Brně,
Zejda Ed. z reálky ve Vel. Meziříčí;

b) z deskriptivní geometrie:

cenu první:
p. *Pilnáček Jaromír* ze VII. tř. r. v Kladně,
cenu druhou
p. *Jurnečka Jaroslav* ze VI. tř. r. v Novém Městě na Moravě,
cenu třetí:
pp. *Bažant Miloš* z V. tř. r. v Příboře,
Jandásek Josef z VIII. tř. g. v Strážnici,
Kutnohorský Fr. ze VI. tř. r v Telči,
Nedoma Antonín ze VII. tř. r ve Velkém Meziříčí,
Obhlídal Ludvík ze VII. tř. r. v Hodoníně,
Ptačovský Jan ze VII. tř. r. v Kutné Hoře,
Schwarz Rudolf ze VII. tř. r. v Kutné Hoře;

c) z fysiky:

cenu první:
p. *Novotný Rudolf* z VIII. tř. g. v Přerově,
cenu druhou:
pp. *Jandásek Jos.* z VIII. tř. g. v Strážnici,
Jurnečka Jar. ze VI. tř. r. v Novém Městě na Moravě,
Pilnáček Jar. ze VI. tř. r. v Kladně,
Loutocký Jos. z VIII. tř. g. v Olomouci

Opravy (viz též str. 344).

Str. 171 ř. 7. zdola místo 01 má býti 0·1,
» 172 ř. 12. » » 2505 » » 2·505,
» 178 ř. 15. » » 126, 133 » » 12·6, 13·3,
» 178 ř. 13. » » 126 » » 12·6,
» 180 ř. 18. shora v x_2 místo + má býti —,
» 180 ř. 5. zdola místo *podobné* má býti podobně,
» 181 ř. 9. » » + 5 má býti — 5,
» 186 ř. 5. » » 699 . . . má býti 6·99 . . .,
» 194 ř. 11. shora » $sin\,\frac{\pi}{2}$ má býti $sin\,\frac{\pi}{4}$,
» 305 ř. 8. a 9. shora místo f má býti f'.
