Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Karel Zahradník

Geometrie kruhu. [III.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 5 (1876), No. 4, 151--157

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121719

Kdybychom tedy ve vzorci (49) položili

$$\cos\varphi = 0, \text{ tedy } \sin\varphi = 1,$$

což nastává podlé vzorce (47) pro

$$a_0 = 0,$$

při čemž tedy se redukuje kvaternion na svou část ideální, obdržíme spojením vzorce (49) a (58)

$$I\alpha = M(I\alpha)(i_1 \cos\varrho + i_2 \sin\varrho \cos\sigma + i_3 \sin\varrho \sin\sigma), \quad (59)$$

kterýmžto vzorcem určena jest v prostoru délka přímky i směr její; neb dáme-li dřívějším délkám všeobecnější význam a položíme-li

$$OA = a_1, \quad AB = a_2, \quad BC = a_3,$$

bude patrně značiti

$$OC = \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2} = M(I\alpha)$$

vzdálenost bodu C od bodu počátečního O, a poněvadž každý bod na kouli poloměru OC má tutéž vzdálenost, nutno znáti směrnici jeho polohy, ana jest vyjádřena vzorcem (58), z čehož jde, že vzorec (59) oběma požadavkům vyhovuje.

Poněvadž tu ideální části kvaternionů hlavní hrají úlohu, nutno se blíže s nimi seznámiti a zvláštní zákony, jež se u nich jeví, vyšetřiti a vytknouti.

(Pokračování.)

Geometrie kruhu.

Pro žáky středních škol sestavil

Dr. **Karel Zahradník.**

(Pokračování.)

XIV. Souvislost mezi plochami dvou sdružených trojúhelníků.

25. Označíme-li plochu trojúhelníku daného ABC písmenem p, a plochu trojúhelníku sdruženého $A'B'C'$ zkrátka P, bude *)

---

*) Viz Dr. *Fr. Studnička:* „Geometrické upotřebení některých pouček o determinantech". Časop. II. díl, pag. 70 a 72.

$$p = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix},$$

$$P = \frac{r^4 \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}^2}{2\,(x_1 y_2)\,(x_2 y_3)\,(x_3 y_1)},$$

a tudíž když determinant v čitateli vyloučíme,

$$P = \frac{r^4 p^2}{4\,.\,OAB\,.\,OBC\,.\,OCA}, \tag{1}$$

aneb

$$A'B'C = \frac{r^4}{4}\,\frac{\overline{ABC}^2}{OBA\,.\,OBC\,.\,OCA}. \tag{2}$$

Je-li trojúhelník ABC danému kruhu vepsán, tvoří tečny vrcholů trojúhelníku ABC trojúhelník sdružený $A'B'C'$. V případě tomto jest jak známo,

$$ABC = \frac{AB\,.\,BC\,.\,CA}{4r} \tag{3}$$

$$AB = 2r \sin C, \tag{4}$$

$$OAB = \frac{r^2}{2} \sin 2C, \tag{5}$$

načež BC, CA, OBC, OCA obdržíme cyklickou záměnou.

Zavedeme-li hodnoty tyto do rovnice (2), obdržíme

$$A'B'C' = r^2\, tg\, A\; tg\, B\; tg\, C. \tag{6}$$

Je-li trojúhelník ABC stejnostranný, bude $A = B = C = 60^0$, tudíž plocha sdruženého jemu trojúhelníka

$$A'B'C' = 3r^2 \sqrt{3}. \tag{7}$$

XV. Rovnice kruhu opsaného trojúhelníku.

26. Dány buďtež tři body $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, jež tvoří trojúhelník ABC. Máme určiti rovnici kruhu, jenž by probíhal body A, B, C, vrcholy to trojúhelníka ABC (obr. 12).

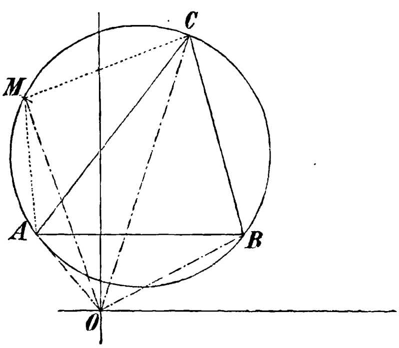
Rovnice kruhu ve tvaru normálném zní

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c^2 = 0. \tag{1}$$

V rovnici této shledáváme tři veličiny stálé a, b, c^2, třeba tedy znáti tři podmínky, z nichž bychom mohli veličiny a, b, c^2 jednoznačně určiti, má-li býti úloha určitá. Takové tři podmínky jsou na př., že kruh probíhati má třemi body. Body A, B, C budou ležeti na kruhu, tedy musí souřadnice jejich rovnici kruhu (1) vyhověti. Obdržíme tak následující tři rovnice

$$\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 - 2ax_1 - 2by_1 + c^2 &= 0, \\ x_2^2 + y_2^2 - 2ax_2 - 1by_2 + c^2 &= 0, \\ x_2^2 + y_3^2 - 2ax_3 - 2by_3 + c^2 &= 0. \end{aligned} \qquad (2)$$

Obr. 12.



Z rovnic těchto můžeme si neznámé a, b, c^2 určiti a pak zavésti do rovnice (1), aneb což totéž, můžeme vyloučiti z rovnic (1) a (2) veličiny a, b, c^2, načež výsledek vyloučení bude hledaná rovnice kruhu. Obdržíme tedy v případě druhém

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (3)$$

Rozložíme-li si determinant tento dle prvého sloupce, zjednáme si

$$(x^2+y^2)\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} - (x_1^2+y_1^2)\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ (x_2^2+y_2^2)\begin{vmatrix} x_3 & y_3 & 1 \\ x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} - (x_3^2+y_3^2)\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & x_2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (4)$$

Značí-li M bod kruhu, vyjádřený souřadnicemi (xy), a jestli O počátkem souřadnic, tu bude

$$x^2 + y^2 = \overline{OM}^2, \quad x_1^2 + y_1^2 = \overline{OA}^2$$
$$x_2^2 + y_2^2 = \overline{OB}^2, \quad x_3^2 + y_3^2 = \overline{OC}^2,$$
$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 2ABC, \quad \text{atd.}$$

Zavedeme-li hodnoty tyto do rovnice (4), obdržíme po zkrácení dvěma

$$\overline{OM}^2 . ABC - \overline{OA}^2 . BCM + \overline{OB}^2 . CMA - \overline{OC}^2 . MAB = 0. \quad (5)$$

Geometrický význam rovnice (5) jest jasný a netřeba podotýkati, že nezávislá jest rovnice tato na poloze bodu O (co počátku souřadnic).

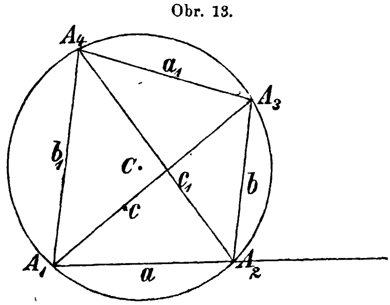
Rovnici (5) můžeme též psáti přehledněji takto:

$$\overline{OM}^2 . ABC = \overline{OA}^2 . MBC + \overline{OB}^2 . MCA + \overline{OC}^2 . MAB.$$

XVI. Podmínka, za kterou čtyři body leží na kruhu.

27. Buďtež dány čtyři body A_1, A_2, A_3, A_4. Za osu x volme přímku $\overline{A_1 A_2}$ a bod A_1 za počátek souřadnic (obr. 13.)

Obr. 13.



Označme délky $A_1A_2 = a$, $A_2A_3 = b$, $A_3A_4 = a_1$, $A_4A_1 = b_1$, $A_1A_3 = c$, $A_2A_4 = c_1$, a tudíž budou souřadnice těchto čtyř bodů $A_1\,(o, o)$, $A_2\,(a_1, o)$, $A_3\,[c \cos (ac), c \sin (ac)]$, $A_4\,(b \cos (ab_1), b_1 \sin (ab_1)]$.

Obecná rovnice kruhu zní

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2. \quad (1)$$

Jelikož procházeti má tento kruh bodem A_1, musí souřadnice bodu A_1 rovnici (1) vyhověti, tedy býti

$$p^2 + q^2 = r^2, \quad (2)$$

načež přejde rovnice (1) ve

$$x^2 - 2px + y^2 - 2qy = 0. \qquad (3)$$

Jelikož tento kruh též body A_2, A_3, A_4 probíhati má, musí souřadnice těchto bodů též rovnici (3) vyhověti, takže obdržíme zároveň

$$\begin{aligned} a &- 2p = 0, \\ c &- 2p\cos(ac) - 2q\sin(ac) = 0, \\ b_1 &- 2p\cos(ab_1) - 2q\sin(ab_1) = 0. \end{aligned} \qquad (4)$$

Vyloučíme-li *) z rovnice (4) souřadnice středu p, q, obdržíme hledanou podmínečnou rovnici:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ c & \cos(ac) & \sin(ac) \\ b_1 & \cos(ab_1) & \sin(ab_1) \end{vmatrix} = 0. \qquad (5)$$

Pomníme-li, že

$$\cos(ac)\sin(ab_1) - \cos(ab_1)\sin(ac) = \sin(b_1 c),$$

přejde rovnice (5) ve

$$a\sin(b_1 c) + b_1\sin(ac) = c\sin(ab_1). \qquad (6)$$

Jest pak (obr. 12.)

$$\sin(b_1 c) = \frac{a_1}{2r}, \quad \sin(ac) = \frac{b}{2r}, \quad \sin(ab_1) = \frac{c_1}{2r}.$$

Zavedeme-li hodnoty tyto do rovnice (6), obdržíme hledanou rovnici podmínečnou

$$aa_1 + bb_1 - cc_1 = 0, \qquad (7)$$

kteráž známou Ptolemeovu větu podává.

XVII. Jiný spůsob odvození téže podmínky.

28. Buďtež $M(xy)$, $A(x_1 y_1)$, $B(x_2 y_2)$, $C(x_3 y_3)$ čtyři body určitého kruhu; tu dle čl. 27. platí

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad (1)$$

z čehož přeložením dvou sloupců povstává nejprvé

*) Odvození toto podal jsem ve „Zprávě II. pag. 87. a v Grunertově: „Archiv für Mathem. und Physik“ díl 56. pag. 15.

$$\begin{vmatrix} x_1{}^2+y^2 & 1 & x & y \\ x_1{}^2+y_1{}^2 & 1 & x_1 & y_1 \\ x_2{}^2+y_2{}^2 & 1 & x_2 & y_2 \\ x_3{}^2+y_3{}^2 & 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0, \tag{2}$$

a dalším přeměněním podlé známých pravidel

$$\begin{vmatrix} 1 & x^2+y^2 & -2x & -2y \\ 1 & x_1{}^2+y_1{}^2 & -2x_1 & -2y_1 \\ 1 & x_2{}^2+y_2{}^2 & -2x_2 & -2y_2 \\ 1 & x_3{}^2+y_3{}^2 & -2x_3 & -2y_3 \end{vmatrix} = 0, \tag{3}$$

Znásobíme-li poslední dva determinanty a zavedeme-li označení

$$d^2_{ij} = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \tag{4}$$

obdržíme determinant *)

$$\begin{vmatrix} 0 & d_{01}{}^2 & d_{02}{}^2 & d_{03}{}^2 \\ d_{10}{}^2 & 0 & d_{12}{}^2 & d_{13}{}^2 \\ d_{20}{}^2 & d_{21}{}^2 & 0 & d_{23}{}^2 \\ d_{30}{}^2 & d_{31}{}^2 & d_{32}{}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0, \tag{5}$$

kdež patrně $d_{rs}{}^2 = d_{sr}{}^2$. Značí totiž na př. $d_{13}{}^2$ čtverec přímky spojující body A, C. Determinant tento je souměrný, a rozložíme-li jej, obdržíme: **)

---

*) Provedení toto pochází od Cayleye, an je uveřejnil v „Journal de Cambridge“ díl II.

Co se tkne násobení determinantů, dovolím si následující poznámku zde mimochodem připojiti. Dány-li determinanty na př. stupně třetího

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \varDelta' = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix},$$

tu označíme si řádky determinantu $\varDelta$ písmenem r příponou řádku a podobně u determinantu $\varDelta'$ písmenem s; součin obou determinantů bude

$$\varDelta \varDelta' = \begin{vmatrix} r_1 s_1, & r_2 s_1, & r_3 s_1 \\ r_1 s_2, & r_2 s_2, & r_3 s_2 \\ r_1 s_3, & r_2 s_3, & r_3 s_3 \end{vmatrix}, \tag{1}$$

Kdež značí symbolicky

$$r_h s_k = a_h \alpha_k + b_h \beta_k + c_h \gamma_k . \tag{2}$$

Chceme-li určiti na př. $\varDelta^2$, tu třeba pouze $r_i = s_i$ klásti, a jelikož dle (2) $r_h r_k = r_k r_h$, vysvítá ihned známé pravidlo, že čtverec každého determinantu jest determinant souměrný.

**) Viz dr. R. Baltzer: „Theorie und Anwendung der Determinanten“ Leipzig 2. Aufl. pag. 26.

$$d_{01}{}^2 d_{23}{}^2 + d_{02}{}^2 d_{13}{}^2 + d_{03}{}^2 d_{12}{}^2 - 2d_{01} d_{23} d_{02} d_{13} - 2d_{02} d_{13} d_{03} d_{12} - 2d_{03} d_{12} d_{01} d_{23} = 0,$$

oneb rozložíme-li součet na levé straně v součin

$$(d_{01} d_{23} + d_{02} d_{13} + d_{03} d_{12}) (-d_{01} d_{23} + d_{02} d_{13} + d_{03} d_{12}) \times \times (d_{01} d_{23} - d_{02} d_{13} + d_{03} d_{12}) (d_{01} d_{23} + d_{02} d_{13} - d_{03} d_{12}) = 0. \quad (6)$$

Porovnáme-li rovnici tuto s výsledkem čl. 27, shledáváme, že rovnice (6) zahrnuje již rovnici (7) článku předcházejícího co svého činitele a tedy větu Ptolemaeovu podává. Podmínku, by čtyři body ležely na kruhu, můžeme tudíž různě vyjádřiti, buď plochami (čl. 26) neb délkami (čl. 27, 28), jež určeny jsou těmi čtyřmi body aneb i relací mezi úhly čtyřúhelníku *ABCD*, kteráž z planimetrie známá, totiž, že součet úhlů na úhlopříčce ve čtyrúhelníku rovná se 180 stupňům.

(Pokračování.)

O středu optickém a hlavních bodech čoček.

Sepsal

prof. **V. Baudys** v Písku.

(Dokončení.)

Někdy však není dovoleno tloušťku čočky zanedbati a pak musíme užiti úplných formulí, jak byly vyvinuty v rov. (III) a γ (recte V). Tyto jsou ovšem složitější, nicméně dají se vhodnou transformací přivésti na jednodušší, podobně oněm, jež jsme s opominutím tloušťky čočky vyvinuli v rov. (IV) a (17), při čemž dlužno počítati vzdálenosti místo od vrcholů čočky ode dvou jiných bodů, které se hlavními body čočky nazývají. Jsou pak hlavní body takové dva body na ose, že jeden jest obrazem druhého.

Jejich poloha tím jest určena, že nějaký předmět, který se nachází v rovině v jednom hlavním bodě kolmo na osu postavené, (nazýváme ji první hlavní rovinu), dává obraz v druhé hlavní rovině, který jest mu rovný a vzpřímený (geometrický).