

# Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

---

August Seydler

Historický rozvoj problému tří těles. [I.]

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 15 (1886), No. 1, 7--15

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/121701>

## Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1886

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

konstrukcí svrchu vyloženou, šetříce toho, že body  $p, \beta$  jsou na téže straně osy A (body  $p, \alpha$  na protivranných stranách osy B); paprsky  $as \perp a_1b, \beta s \perp ab$  sekou se ve středě  $s$  kružnice K. Na to vedme bodem  $o$  kolmici ku přímce  $so$  a přenesme na ni  $\overline{oa'} = \overline{oa^+}$ ; čímž sestrojíme bod  $a^+$  kružnice K. Kružnicí K protneme ellipsu E v bodech  $q'_1, \dots$  a vedme jimi — stejnosměrně s paprskem  $aa'$  — tetivy  $q'_1q_1, \dots$  ellipsy E;  $pq_1, \dots$  jsou pak normály žádané.

---

## Historický rozvoj problému tří těles.

Podává

A. Seydler.

*Připomenutí.* V ročníku IX. tohoto Časopisu podal jsem Dějiny všeobecné gravitace v řadě článků, jichž poslední jednal o tvaru země, načež měl následovati výklad o problému tří těles. Z různých příčin nebyl tehdy článek ten podán; co tenkrát zmeškáno, budiž doplněno nyní, při čemž se ovšem obmeziti musím na stručné vytknutí nejdůležitějších stránek, nemá-li se z přítomného článku státi objemná kniha.

---

Oběžnice, mezi nimiž nejdůležitější pro nás místo zaujímá naše země, pohybují se kolem slunce v ellipsách dle zákonů Keplerových, jež jsou ve své větší složitosti prostým následkem jednoduššího zákona gravitace. Tento zákon Newtonem objevený a odůvodněný, vedl však ihned k nové otázce, jež zdála se, že uvede v pochybnost zákon samý. Je-li gravitace všeobecnou vlastností hmoty, nepřitahuje pouze slunce oběžnice a tyto své družice tak, aby první kolem slunce, druhé kolem oběžnic v elliptických drahách se pohybovaly; nýbrž oběžnice též vzájemně se mezi sebou přitahují a jsou i družicemi přitahovány, zkrátka každé těleso nebeské přitahuje každé jiné těleso, máme složitou osnovu vzájemných působení a přirozeně vzniká otázka: jaký jest skutečný pohyb těles nebeských následkem tohoto rozmanitého působení; může býti vyjádřen zákony Keplerovými, a je-li jimi vyjádřen, není to důkazem, že zákon gravitace jest poblouzněním ducha lidského?

Otázky a námitky tyto neušly genialnému původci zákona gravitace, avšak, místo co by jim podlehl, učinil z nich nové podpory téhož zákona. V skutku jeví se v pohybech měsíce a oběžnic *odchylky* od přesných zákonů Keplerových, odchylky ty jsou však nepatrné a vysvětlují se plně nepatrným poměrně působením těles druhých, přemocný vliv centralného tělesa — slunce při oběžnicích, té které oběžnice při družicích — v malé jen míře měnicích. Všeobecně nazýváme ony odchylky *perturbacemi* (poruchy), ve kterém názvu již leží, že máme na mysli poměrně malé změny pohybu přibližně již ze zákonů Keplerových určeného.

*Dvě* jsou příčiny, pro něž v soustavě naší malé jen odchylky od přesného pohybu se vyskytují; buď jsou *rušivé* hmoty u porovnání s hmotou *centralnou* nepatrné, buď jest vzdálenost rušivé hmoty u porovnání se vzdáleností tělesa centralného velmi značná. První případ vyskytuje se u oběžnic, jichž sloučená hmota sotva se rovná 700. dílu hmoty slunečné; druhý případ jeví se u měsíců, kde jedna z rušivých hmot — slunce — nepoměrně jest mohutnější nežli centralné těleso — příslušná oběžnice, u našeho měsíce na př. země; kde však vzdálenost slunce jest tak značná, že navzdor velké hmotě vliv jeho pouze modifikuje pohyb měsíců, jenž se alespoň v hlavních rysech děje též dle zákonů Keplerových. Týž druhý případ platí ostatně též při otázce, zda-li též stálice mohou rušivý vliv vykonávat v naší soustavě; shledalo se, že ne, a to pro ohromnou vzdálenost jejich. Rozumí se samo sebou, že tím příznivější bude kombinace obou okolností, a že nám ani nenapadne zkoumatí vliv měsíců Jupiterových neb Saturnových na pohyb země kolem slunce, neb vliv Neptuna na pohyb měsíce kolem země. V případech kde jedna i druhá výhoda nás opouští, jeví se vskutku úplná změna zákonů Keplerových alespoň na ten čas, pokud se opět vytknuté výhody neobjeví. V naší soustavě nastává to pouze při pohybech komet, které v kuželosečkách z pravidla velmi prodloužených kolem slunce putují. Následkem tohoto tvaru jakož i polohy dráh svých mohou se k některé oběžnici přiblížiti v té míře, že rušivý vliv její stává se ohromným a úplně mění původní tvar dráhy, tj. vlasatice dle zákonů Keplerových k oběžnici se blížící opisuje část dráhy v nejbližším sousedství oběž-

nice zcela jiným způsobem a vystupujíc z oboru nejmocnějšího působení oběžnice vzdaluje se od ní opět sice přibližně dle zákonů Keplerových, avšak na dráze úplně změněné. Tak zjištěno jest podrobným výpočtem, že Lexelova kometa objevená r. 1770 tři leta před tím byla se přiblížila Jupiterovi v té míře, že dráha její původně velmi výstřední (podlouhlá) proměněna jest v dráhu málo výstřednou krátkého oběhu ( $5\frac{1}{2}$  let); r. 1779 přiblížila se ohromné oné oběžnici znova tak, že po setkání tom se dráha její stala opět velmi podlouhlou.

V případech takových stává se výpočet dráhy vlasatice velice nesnadným a obšrným; totéž platilo by však též pro oběžnici, s níž se kometa byla setkala, kdyby hmota vlasatic nebyla tak nepatrnou, jakou v skutku jest. Při počítání perturbací oběžnic a družic můžeme tudíž vždy upotřebiti jedné z uvedených výhod; to má však alespoň v mnohých případech v zápětí ještě jinou výhodu. Určivše totiž dráhu tělesa, jehož pohyb vyšetřujeme tak, jakoby žádných rušících těles nebylo, můžeme nyní *o sobě* v úvahu vzíti vliv *jedné* z rušivých hmot, tak jakoby ostatních nebylo; potom opět *o sobě* vliv hmoty *druhé* bez ohledu na ostatní atd. Jsou ovšem výminky, totiž případy, kde se potřeba jeví současně v úvahu vzíti působení všech hmot.

Mysleme si, že bychom zanedbali hmoty měsíců, asteroidů a komet; při studium pohybů naší soustavy měli bychom před sebou vždy ještě nad míru složitý problem: stanovení pohybu *devíti hmot* (slunce a osmi hlavních oběžnic), jež vesměs na sebe vzájemně působí dle zákona gravitace. Dle poznámky právě učiněné zjednodušuje se nám tento problem na vyšetření pohybu tří těles, neb vlastně na vyšetření pohybu jednoho tělesa v soustavě tří (slunce, oběžnice, jejíž pohyb vyšetřujeme, oběžnice, jež rušivě působí) a stojíme před slavným *problemem tří těles*.

Z toho výkladu vidíme, že má problem tří těles eminentně *praktický* význam pro astronomii, a že také většinou z tohoto stanoviska byl pojmán, ze stanoviska, jež nám káže všech výhod použití, jimiž si můžeme zjednatí řešení třeba jen přibližně, pokud jen se skutečností se v mezích pozorování srovnává. Duch lidský, jehož lákají překážky nepřemožitelné, položil sobě však v problému tří těles, též otázku všeobecnější mající význam více *theoretický* (nehledíme-li k některým, posud ne příliš akutním

otázkám astronomie stálic): má se totiž určití pohyb tří vzájemně gravitujících těles ve vší všeobecnosti, bez ohledu na jakékoli zjednodušení, jež by plynulo buď z přílišné vzdálenosti neb z nepatrné hmoty, jednoho z oněch těles. Uvážíme-li, jak jednoduchý jest pohyb dvou gravitujících hmot, mohli bychom předpokládati, že komplikace přibráním třetí hmoty způsobená nebude tak přílišnou. V skutku však shledáme, že jest nám dán problem nesmírně nesnadný, jenž posud není řešen, aniž je naděje, že dosavadními pomůckami matematiky řešení dojde. Neboť zde neběží více o určení dráhy přibližně elliptické a o nepatrné změny její — perturbace — působením rušící hmoty podmíněné; zde jsou všechna tři tělesa at tak díme stejné váhy neb důležitosti, opisující dráhy, o jejichž tvaru dosud ani tušení nemáme.

Nelze nám tudíž diviti se, že jen řešení poměrně snadnějšího, vždy ještě však velmi komplikovaného problemu praktického, potřebami astronomie podmíněného, v jistých mezích k šťastnému konci jest dovedeno. I takto zjednodušený problem vyžadoval ku svému překonání spojeného úsilí Newtona, Eulera, Laplace-e, Lagrange-e, Hansena, Leverriera a jiných mistrů, a stále se ještě o zdokonalení jeho pracuje.

Základní rysy theorie perturbací — neboť problem tří těles takto pojatý v jedno splyvá s problemem poruchů — lze dosti jednoduchým způsobem nakresliti. Dráhy oběžnic v problemu dvou těles jsou ellipsy; známost *šesti* veličin, t. zv. *elementů*, dostačí ku přesnému stanovení takovéto dráhy, čili k určení polohy oběžnice na obloze v jakýkoli čas. Ve volbě těchto elementů máme jakousi volnost; leč následující soustava jejich ukázala se býti nejhodnější pro potřeby astronomie:

1. *Sklon*  $\varphi$  roviny dráhy k pevné rovině v prostoru; obyčejně se tu volí rovina ekliptiky, t. j. dráhy zemské.

2. *Délka úzlu vystupujícího*  $\Omega$ , t. j. úhel, jež tvoří průsek obou rovin (čára úzlová) s pevnou přímkou v prostoru; obyčejně bývá touto pevnou přímkou průsek ekliptiky a rovníku, a to směr vedoucí od slunce k *jarnímu bodu*  $\gamma$ .

Z obou směrů čáry úzlové volí se ten, jenž jest namířen k úzlu vystupujícímu, t. j. k bodu, v kterém přechází oběžnice vzhledem k ekliptice z jižní na severní stranu oblohy.

3. *Délka perihelia  $\Pi$* , t. j. úhel, jež tvoří přímka od slunce k nejbližšímu bodu elliptické dráhy (k periheliu) vedená s čarou úzlovou, rozmnožený o délku vystupujícího úzlu.

4. *Velká polosa a elliptické dráhy.* \*)

5. *Numerická výstřednost e této ellipsy.*

6. *Epocha*, t. j. místo na dráze, kde se oběžnice v určitý čas nachází. K tomu cíli může býti dán pro tento čas úhel, jež přímka od slunce k oběžnici vedená (průvodič) tvoří s přímkou k periheliu vedenou (čarou apsid). Místo tohoto úhlu, t. zv. *pravé anomalii*, udává se z pravidla *anomalie střední  $M$* , t. j. úhel, jež by průvodič tvořil s čarou apsid, kdyby se oběžnice se stálou rychlostí pohybovala na kružnici o poloměru  $a$ , tak že by doba oběhu jejího se při tom nezměnila; aneb *střední délka  $L$* , t. j. střední délka anomalie zvětšena o délku perihelia.

Proč právě tyto veličiny co elementy dráhy oběžnic jsou zvoleny, nelze bez příslušného detailu astronomického vyložit; budiž proto jen k tomu poukázáno, že  $\varphi$ ,  $\Omega$ ,  $\Pi$ , tvoří o sobě skupinu veličin (úhlových), určujících *polohu dráhy* v prostoru,  $a$ ,  $e$  druhou skupinu určující *tvar dráhy*, kdežto epocha  $M$  neb délka  $L$  určuje *polohu oběžnice na dráze*, družic se v mnohých ohledech k skupině první, z které opět můžeme vyřaditi sklon  $\varphi$  a připojiti k skupině druhé. \*\*)

Těchto šest elementů můžeme vypočítati pro každou oběžnici na základě šesti pozorovaných veličin, na př. tří rektascensí a tří deklinací, různými methodami, z nichž v ohledu věcném i historickém vyniká slavná metoda Gaussova. Učínice tak, byli bychom s prací mathematickou při takové oběžnici hotovi, kdyby se pohybovala přísně dle zákonů Keplerových; dostačilo by, pozorovati ji ob čas a nepatrné odchylky mezi výpočtem a pozorováním odstraniti poopravením prvních elementů, tak že bychom si konečně zjednali *definitivní soustavu elementů*, pro všechny doby budoucí i minulé platnou.

V skutku mají se věci však jinak; při sebe pečlivějším určení elementů z jisté řady pozorování vyskytnou se nám

\*) Dle třetího zákona Keplerova může tento element zastupovati *doba oběhu  $T$*  neb *střední denní pohyb* (úhlový)  $\mu$ .

\*\*) Srv. v roč. XIII. článek: Poznámka ku rovnicím, které vyjadřují stabilitu slunečné soustavy.

v dalších pozorováních rostoucí rozdíl mezi výpočtem a pozorováním, jichž odstranění dalším opravením elementů více možné není. Rozdíly ty jsou právě následek *perturbací*, vlivem ostatních oběžnic způsobené. Znajíce alespoň přibližně, t. j. tak jak plynou z Keplerových zákonů, polohy těchto ostatních oběžnic, můžeme vypočítati též výslednici sil jimi způsobených a tudíž i změnu v urychlení pohybující se oběžnice; při čemž se ukáže, že jen několik hmotou neb blízkým sousedstvím vynikajících oběžnic patrný vliv má. Z numerických hodnot této změny v urychlení můžeme zvláštní početní methodou, t. zv. *mechanickou kvadraturou*, vypočítati změny v poloze samé, t. j. opravy, jež dlužno připojiti k souřadnicím bez ohledu na rušivý vliv určeným, abychom obdrželi souřadnice pravé. Tyto změny neb opravy jsou t. zv. *specialné perturbace*; pomocí nich můžeme sice at tak dím krok za krokem stopovati pohyb oběžnice, nějakou zákonitost v odchylkách od pohybu elliptického bychom však z těži as vyčetli z řady jejich. Jsou pouhými mechanickými pomůckami k docílení shody mezi výpočtem a pozorováním, neumožňují však žádné hlubší vniknutí v řešení problému tří těles.

Vzhledem k nepatrnému vlivu rušivé síly můžeme po krátkou dobu považovati pohyb oběžnic za ryze elliptický, a můžeme po celou dobu tu příslušné jakési elementy podržeti; v následující taktéž velmi krátké době můžeme opět dráhu oběžnice považovati za elipsu, jejíž elementy jsme však poněkud byli pozměnili; v třetí částici takové budeme míti opět elliptickou dráhu s elementy znova změněnými, atd. V tomto pojmání pohybu tají se plodný princip *variae konstant*, jenž nám poskytuje mnohem jasnější obraz vlivu perturbací, nežli methoda předešlá. Dráha oběžnice jest dle něho elipsa, co do tvaru i co do polohy zvolna avšak stále se měnící, tak že můžeme po případě pro kratší dobu elementy dráhy považovati za konstanty (voliti pro ně na př. hodnoty proměnlivých elementů na začátku, neb uprostřed, neb ke konci té doby) a pomocí nich vypočítati polohy oběžnic po trvání doby té. Perturbace netýkají se zde souřadnic samých, nýbrž elementů.

Ve smyslu právě naznačeném rozeznáváme dva druhy *perturbací* čili *nerovností* (störungen, inégalités): *periodické* a *sekulární*.

Každý element oběžnice jest podroben neobmezené řadě velmi malých změn, jež průběhem dosti krátké doby (pro každou změnu jiné) obdrží všechny hodnoty mezi jistým kladným maximum a stejně velkým záporným minimum. Zákon, dle kterého roste a menší se každá taková změna, jest zákon harmonického pohybu, a všeobecný tvar pro ni tudíž:

$$c \sin \left( \frac{2\pi t}{T} + \gamma \right),$$

je-li  $c \sin \gamma$  hodnota její na začátku času;  $c$  absolutní hodnota maxima i minima, a  $T$  délka periody, po jejíž uplynutí se opět vrací tatáž řada hodnot pro vytčenou část celé změny. Hodnoty konstant  $c$ ,  $\gamma$ ,  $T$  mění se od členu ku členu řady vyjadřující celou změnu, není tudíž divu, že zákon, dle něhož se řídí tato změna, jest velmi komplikovaný, ačkoli jest zákon jednotlivých členů tak jednoduchý. Na štěstí jest řada členů těch dosti sbíhavou, a dostačí obmeziti se na několik prvních, t. j. podržeti ze všech těchto *periodických nerovností* pouze numericky důležité.

Délky period závisí jednoduchým způsobem na dobách oběhu obou oběžnic (té, jejíž pohyb, i té, jejíž rušivý vliv vyšetřujeme); perioda stává se tím delší, čím menší jest rozdíl mezi jakýmsi násobky obou period. Pět oběhů Jupitera vyplňuje 21663 dní, dva oběhy Saturnovy 21518 dní; při nepatrném rozdílu obou čísel bude perioda perturbace závislé na tomto rozdílu velmi dlouhou, obnášejíc skoro 900 let. Tyto periodické nerovnosti tvoří tudíž přechod k druhé skupině, k nerovnostem *sekulárným*, které mění elementy průběhem velmi dlouhých věků v stejném směru. Tak mění se sklon dráhy, tak mění se výstřednost, přibývajíce neb ubývajíce po dlouhý čas, až dosáhnou jisté hodnoty maximalné neb minimalné, načež v opačném směru mění se počnou. Ano délka úzlu a délka perihelia mění se stále v témž směru, tak že se přímka určená průsekem dráhy a pevné roviny (ekliptiky) zvolna otáčí kolem slunce, a podobně i v rovině dráhy čára apsid. Jen velká polosa nemění se v celku během věků, doznávajíc jen nepatrných změn periodických: kteráž okolnost nad míru jest důležitá pro *stabilitu* naší soustavy světové.

Abychom si zjednali jakýsi obraz o rušivém vlivu oběžnic na pohyb některé z nich, na př. naší země, myslíme si, že by



náhle *všechny* síly přestaly na ni působiti. Následkem toho pohybovala by se země na přímce ve směru posledně zjednaném tak, že by urazila za hodinu 106000 kilometrů. Působení slunce jeví se tím, že se země z této přímé dráhy odchýlí za hodinu o 38 *km*; Jupiter, největší ze všech oběžnic, ~~nemůže~~ i za nejpríznivějších okolností změnití odchylku tu o více než 2,10 *m*; a působení Venuše jeví na nejvyš odchylku 1,25 *m*. Kdybychom si znázornili dráhu země bez ohledu na perturbace ellipsou, jejíž velká osa obnáší 10 metrů, a která se velmi málo rozeznává od kružnice o poloměru 5 metrů, jsouc pouze ve směru kolmém k velké ose, tedy ve směru malé osy stlačena as o 1,4 millimetru, vinula by se *skutečná* dráha země, se zřetelem k perturbacím určená, kolem této ellipsy, tak že by se nikdy od ní neodchylovala o více než 1 millimetr.

Velká osa této dráhy otáčí se ve své rovině ročně o velmi malý úhel 12", tedy za tři století asi o 1°, tak že se za 108000 let vrátí do původní své polohy. Toť příklad sekularné variace. Variace tyto, jichž periody čítají 50000 až 2000000 let právem byly nazvány „hodinami věčnosti, jež udávají věky, jako naše hodiny sekundy.“

Poněkud jiné úkazy jeví se nám při vyšetření pohybu měsíce kolem země. Rušivou hmotou jest zde slunce, a tato ohromná hmota působí na měsíc, ačkoli jest 400-krát vzdálenější země, přece více než dvakrát tak silně; na štěstí pro astronomy-počítáře působí slunce též na zemi a záleží pouze na *rozdílu* působení jeho na zemi a na měsíc, kterýž rozdíl obnáší na nejvyš 179-tý díl působení země na měsíc. Však i tento rušivý vliv jest velmi značný a není tudíž divu, že náleží theorie pohybu měsíce k nejnamahavějším a nejtrudnějším částím mechaniky nebeské. \*)

Měsíc opisuje kolem země ellipsu, jejíž velká osa — čára apsid — zvolna se v rovině dráhy otáčí, vyžadujíc k úplnému oběhu 3232,57 dní. Kdyby však ani tohoto pohybu nebylo, změnila by se vzájemná poloha této čáry a čáry syzygií, t. j. čáry vedené

---

\*) *Delaunay* zanašel se s theorií pohybu měsíce 25 let; vydal o pohybu tom dva ohromné svazky, v nichž jediná formule vyplňuje 137 kvartových stránek!

od země k ouplňku neb k novému měsíci. Splývají-li obě tyto čáry, t. j. nastane-li nový měsíc neb ouplněk, když se měsíc nachází v perigeu neb v apogeu, má působení slunce ten účinek, jakoby se výstřednost dráhy měsíce zvětšila; jsou-li obě čáry k sobě kolmy, t. j. přichází-li měsíc do perigea neb apogea v čas první neb poslední čtvrti, jeví se vliv slunce tím, že se výstřednost dráhy měsíce zmenší. Tato nerovnost slove *evekce* a má za následek, že se měsíc může nalézati až o  $1^{\circ}16'$  před neb za místem dle jednoduché theorie elliptické určeným.

Jinou nerovností jest *variace*. Blíží-li se měsíc ouplňku neb novému měsíci, působí naň země a slunce souhlasně, t. j. v témž směru; vzdaluje-li se měsíc od syzygií, působí slunce proti zemi, zeslabuje působení její. Vliv této okolnosti jest patrný v oktantech (mezi čtvrtěmi) a mizí ve čtvrtích, t. j. ve čtyřech hlavních jevech měsíce. Největší hodnota variace obnáší přes půl stupně.

Třetí nerovností jest *rovnice roční*, \*) způsobená tou okolností, že země při pohybu svém ročním k slunci se blíží a opět od něho vzdaluje. Následkem toho zrychluje se pohyb měsíce v čas leta (při největší vzdálenosti slunce) a uvolňuje v čas zimy (při nejmenší vzdálenosti slunce). Změna v poloze měsíce touto okolností způsobená obnáší až pětinu stupně.

K těmto *velkým* nerovnostem měsíce druží se nepřehledná řada *malých*, jež činí podrobný výpočet pohybu měsíce úlohou velmi obtížnou.

Tento stručný výklad věcný vidělo se mi předeslati vlastnímu vypravování historickému, k němuž se nyní obracím.

(Pokračování.)

---

\*) Odchylky od jednoduchého kruhového pohybu nazývali staří *aequationes* ve smyslu veličin, jež připočtény k pohybu tomu jej *vyrovnávají*, t. j. se skutečností v souhlas uvádějí. Tento dosti nepřiměřený výraz přešel do všech moderních jazyků (*équation*, *Gleichung* atd.) a nezbývá než voliti proň v češtině slovo stejného významu, tedy rovnice.