František Machovec

Jednoduchý důkaz dvou vět o trojúhelnících, jejichž vrcholy jsou na třech přímkách jediným bodem procházejících

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 6 (1877), No. 5, 266--269

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121683

$$tg\,\delta = \frac{u}{t},$$

z níž δ plyne; známe-li δ, obdržíme z jedné z rovnic (α) hodnotu pro s neb q, dle toho, je-li q neb s známo.

Jednoduchý důkaz dvou vět o trojúhelnících, jejichž vrcholy jsou na třech přímkách jediným bodem procházejících.

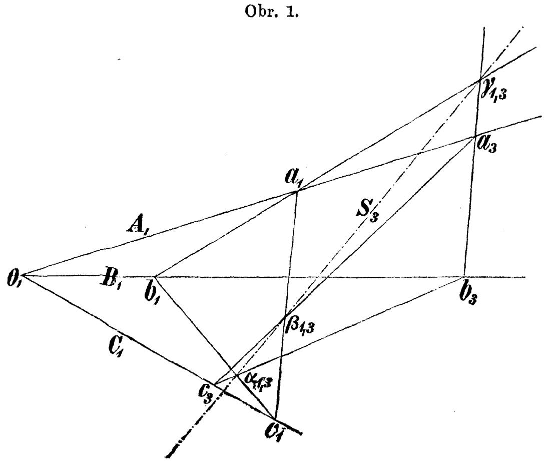
Sepsal

F. Machovec.

1. Procházejí-li tři přímky A, B a C určené vrcholy dvou trojúhelníků jediným bodem, pak jsou tři průsečníky souhlasných stran těchto trojúhelníků na jediné přímce.

2. Tři přímky určené k sobě přináležejícími průsečníky nesouhlasných stran těchto trojúhelníků určují nový trojúhelník, jehož vrcholy jsou na týchž třech přímkách A, B, C.

Obr. 1.

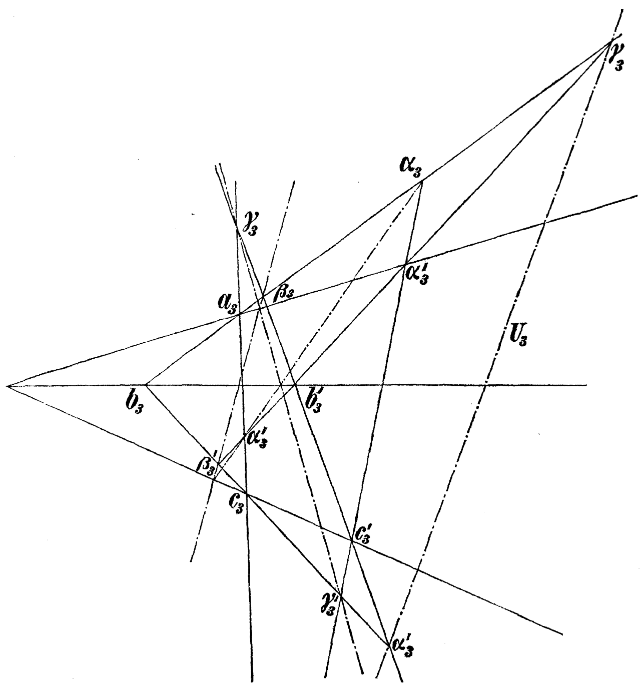


V obr. 1. buďtež ony dva trojúhelníky zobrazeny v $a_1 b_1 c_1$ a $a_3 b_3 c_3$; obrazy vrcholů k sobě přináležejících jsou na přímých čarách A_1, B_1, C_1, které procházejí jedinou tečkou o_1.

Bereme-li tečku o_1 co obraz průmětu orthogonálného středu promítání o na libovolnou rovinu průmětnou M, můžeme považovati tečky a_1 a a_3, b_1 a b_3, c_1 a c_3 za obrazy průmětů orthogonálných a centrálných a středu o tří bodů a, b, c, při čemž jsou A_1, B_1, C_1 obrazy orthogonálných průmětů přímek promítajících, neb z geometrie deskriptivné jest známo, že obrazy průmětu centrálného a orthogonálného jakéhokoliv bodu jsou na přímé čáře procházející obrazem orthog. průmětu středu promítání.

Tři body a, b, c určují jistou rovinu R, jejíž stopou na rovině M jest určitá přímka, která obsahuje stopy všech přímek roviny R na rovině M, tedy i přímek ab, bc a ca. Obrazy stop

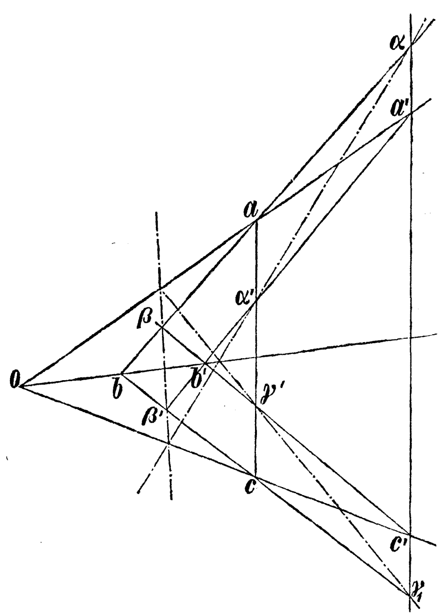
Obr. 2.



těchto tří přímek jsou ale tam, kde se obrazy orthogonálných a centrálných průmětů těch přímek protínají, tedy jsou to průsečníky čar a_1b_1 s a_3b_3, b_1c_1 s b_3c_3 a c_1a_1 s c_3a_3, t. j. průsečníky $\gamma_{1,3}$, $\beta_{1,3}$ a $\alpha_{1,3}$ a musejí býti na obrazu stopy roviny R, tedy na jediné přímé čáře $S_{1,3}$*). Tím dokázána věta první.

V obr. 2. buďtež zobrazeny opět dva trojúhelníky téže vlastnosti. Znamenejme trojúhelníky ty $a_3b_3c_3$ a $a_3'b_3'c_3'$. Přímou čáru, na níž jsou průsečníky souhlasných stran těchto trojúhelníků, (která byla dříve znamenána $S_{1,3}$), poznamenejme U_3 a považujme ji za obraz průmětu centrálného nekonečně vzdálené přímky U jisté roviny R; jsou pak na př. a_3b_3 a a'_3b_3' obrazy centrálné dvou stejnoměrných přímek roviny R, poněvadž mají tentýž nekonečně vzdálený bod γ, jehož centrálný obraz jest γ_3; taktéž jest $bc \parallel b'c'$ a $ac \parallel a'c'$, poněvadž obrazy centrálných průmětů každého páru těchto přímek mají společný obraz průmětu centrálného bodu nekonečně vzdáleného. Ony dva trojúhelníky $a_3b_3c_3$ a $a_3'b_3'c_3'$ můžeme tedy považovati za obrazy

Obr. 3.



centrálných průmětů dvou trojúhelníků abc a $a'b'c'$ roviny R, jejichž strany jsou stejnoměrné.

*) Znamenány jsou tečky a přímá ta čára $\gamma_{1\cdot3}$, $\beta_{1\cdot3}$, $\alpha_{1\cdot3}$ $S_{1\cdot3}$, poněvadž v nich jsou obrazy průmětů orthogonálných i centrálných stop α, β, γ, S. Průmět orthog. o sobě opatřen ukazovatelem 1 a centrálný ukazovatelem 3.

Vlastnosti, které dokážeme o poloze průsečníků stran trojúhelníků abc a $a'b'c'$, budou platiti i o trojúhelnících $a_3b_3c_3$ a $a_3'b_3'c_3'$, poněvadž tyto jsou obrazy oněch a jestli bod na přímce, jest i obraz průmětu toho bodu na obrazu průmětu té přímky.

Zobrazme si v obr. 3. dva trojúhelníky abc a $a'b'c'$, které mají strany stejnoměrné. O těch dvou trojúhelnících snadno dokážeme druhou větu nadepsanou a bude tím tedy dokázána i o dvou trojúhelnících, jejichž vrcholy určují tři přímky jediným bodem procházející. Stranu ab protíná nesouhlasná strana $a'c'$ v α a strana $a'b'$ stranu ac v α', jsou pak α a α' ty průsečníky, které jsme ve větě druhé nazvali k sobě přináležejícími; taktéž sestrojí se i $\beta\beta'$ a $\gamma\gamma'$. Snadno dokážeme nyní, že $\beta\beta'$ a $\gamma\gamma'$ se protínají na aa' $\alpha\alpha'$ a $\gamma\gamma'$ na bb' a $\alpha\alpha'$ a $\beta\beta'$ na cc'. Hledíme-li na př. k trojúhelníkům $\gamma\beta'\alpha'$ a $\alpha\beta\gamma'$, jsou strany jejich stejnosměrné a dle známé věty, která jest zvláštním případem věty první, musejí přímky určené k sobě příslušnými vrcholy jejich procházeti bodem jediným, to jsou však přímky $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ a aa', t. j. $\beta\beta'$ a $\gamma\gamma'$ protínají se na aa'. Totéž dokáže se o druhých dvou párech těch přímek, hledí-li se 1. k $\triangle\, ab\gamma$ a $\triangle\, \alpha'b'\gamma'$ a 2. k $\triangle\, \alpha'\beta'c$ a $\alpha\beta c'$. Stanoví tedy tři přímky $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ a $\gamma\gamma'$ skutečně trojúhelník, jehož vrcholy jsou na třech přímkách A, B a C, čímž zároveň dokázána i věta druhá.

O troj- a čtyrúhelnících.

Od

A. Strnada.

1. Předpokládáme-li v stranách trojúhelníka ABC tři body, v straně $\overline{BC}$ bod A', v straně $\overline{CA}$ bod B' a C' v straně $\overline{AB}$, stanoví tyto trojúhelník nový $A'B'C'$, původnímu vepsaný. Jest úlohou poznámky této vyjádřiti poměr mezi obsahem trojúhelníka opsaného a vepsaného. — Aby úvahy naše zcela všeobecnými byly, nutno při označení ploch ohled míti ku vztahu kladnému neb zápornému. Ustanovme se tedy na př. na tom, považovati plochu trojúhelníka za kladnou, byl-li obvod jeho vy-