Vzájemná souvislost prémií vypočtených dle různých tabulek úmrtnostních a dle různé úrokové míry.

Napsal Dr. **Antonín Hrazdil.**

V pojišťovací praxi vyskytne se mnohdy potřeba vypočísti prémii nebo prémiovou zálohu některého druhu životního pojištění buď dle jiné tabulky úmrtnostní aneb dle jiné úrokové míry, než jsou ty, pro něž má pojišťovna podrobné výpočty tabelovány. V takové situaci vypomáhá si pojišťovna různými methodami interpolačními, jež sice mají výhodu, že vedou rychle k cíli, ale též značnou nevýhodu, že jsou výsledky jejich málo spolehlivé.

Obecné a naprosto spolehlivé řešení této úlohy není možno podati, poněvadž není znám dosti přesně vztah, jak souvisí navzájem úmrtnostní poměry různých krajů a různých životních povolání. Ale v jednom případě jest řešení této úlohy přece možné a to tehdy, jestliže tabulky úmrtnostní, dle nichž prémie jsou vypočteny, jsou vyrovnány dle Gomperz-Makehamovy formule

$$l_x = k \, . \, s^x \, . \, g^{c^x}.$$

Poněvadž hodnoty všech druhů prémií a prémiových záloh lze vyjádřiti pomocí polhůtných doživotních důchodů, omezíme svoje řešení jen na tento specielní případ a určíme vzájemnou souvislost polhůtných doživotních důchodů, vypočtených dle různých tabulek úmrtnostních, ale při téže úrokové míře i z jedničky.

Počet žijících ve věku x let dle první tabulky úmrtnostní nechť jest dán G. Makehamovou formulí

$$l_x = k \, . \, s^x \, . \, g^{c^x} \tag{1}$$

určenou konstantami: k, s, g, c na sobě navzájem nezávislými. Pak doživotní polhůtný důchod má dle ní hodnotu

$$a_x = v \, . \, {}_1p_x + v^2 \, . \, {}_2p_x + v^3 \, . \, {}_3p_x + \ldots + v^{\omega - x} \, . \, {}_{\omega - x}p_x,$$

kdež

$$v = \frac{1}{1+i}$$

a

$${}_{n}p_{x} = \frac{l_{x+n}}{l_{x}} = \frac{k \,.\, s^{x+n} \,.\, g^{c^{x+n}}}{k \,.\, s^{x} \,.\, g^{c^{x}}} = s^{n} \,.\, g^{c^{x}(c^{n}-1)}$$

aneb

$$a_{x} = v \,.\, s \,.\, g^{c^{x}(c-1)} + v^{2} \,.\, s^{2} \,.\, g^{c^{x}(c^{2}-1)} +$$
$$+ v^{3} \,.\, s^{3} \,.\, g^{c^{x}(c^{3}-1)} + \ldots = \sum_{n=1}^{\omega-x} v^{n} \,.\, s^{n} \,.\, g^{c^{x}(c^{n}-1)}. \tag{2}$$

Dle druhé tabulky úmrtnostní nechť jest tento počet žijících ve věku x let dán obdobným vzorcem:

$$l'_{x} = k' \,.\, s'^{x} \,.\, g'^{c'^{x}}, \tag{3}$$

určeným konstantami: k', s', g', c'.

Pak hodnota doživotního polhůtného důchodu při téže úrokové míře i, jako dříve, jest dle této tabulky úmrtnosti:

$$a'_{x} = v \,.\, s' \,.\, g'^{c'^{x}(c'-1)} + v^{2}\, s'^{2} \,.\, g'^{c'^{x}(c'^{2}-1)} + \ldots$$
$$= \sum_{n=1}^{\omega-x} v^{n} \,.\, s'^{n} \,.\, g'^{c'^{x}(c'^{n}-1)}. \tag{4}$$

Konstanty: k, s, g, c a k', s', g', c' obojích těchto tabulek jistě se budou navzájem lišiti a sice tak, že bude:

$$\left.\begin{aligned} s' &= s + \triangle s \\ g' &= g + \triangle g \\ c' &= c + \triangle c. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Na hodnotě konstant k a k' nezáleží, poněvadž ty se ve vzorcích pro důchod nevyskytují.

Položíme-li

$$a_{x} = \sum_{n=1}^{\omega-x} v^{n} \,.\, s^{n} \,.\, g^{c^{x}(c^{n}-1)} = f\,(s,\ g,\ c) \tag{6}$$

jest obdobně

$$a'_{x} = \sum_{n=1}^{\omega-x} v^{n} \,.\, s'^{n} \,.\, g'^{c'^{x}(c'^{n}-1)} =$$
$$= f\,(s',\ g',\ c') = f\,(s + \Delta s,\ g + \Delta g,\ c + \Delta c).$$

Předpokládáme-li, že $f(s', g', c')$ jest funkce spojitá, můžeme na ni použíti Taylorova rozvoje a psáti

$$
\begin{aligned}
f(s+\Delta s, g+\Delta g, c+\Delta c) &= f(s, g, c) \\
&+ \frac{\partial f}{\partial s}\,\Delta s + \frac{\partial f}{\partial g}\,.\,\Delta g + \frac{\partial f}{\partial c}\,.\,\Delta c \\
&+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial f}{\partial s}\,.\,\Delta s + \frac{\partial f}{\partial g}\,.\,\Delta g + \frac{\partial f}{\partial c}\,.\,\Delta c\right)^2 + \ldots
\end{aligned} \tag{8}
$$

aneb

$$
\begin{aligned}
a'_x &= a_x + \frac{\partial a_x}{\partial s}\,.\,\Delta s + \frac{\partial a_x}{\partial g}\,.\,\Delta g + \frac{\partial a_x}{\partial c}\,.\,\Delta c \\
&+ \frac{1}{2!}\,.\left(\frac{\partial a_x}{\partial s}\,.\,\Delta s + \frac{\partial a_x}{\partial g}\,.\,\Delta g + \frac{\partial a_x}{\partial c}\,.\,\Delta c\right)^2 + \ldots
\end{aligned} \tag{9}
$$

Difference Δs, Δg a Δc bývají — jak praxe ukazuje — malé.

Užitím methody King-Hardyho na vyrovnání statistického materiálu H^M 20 britských společností nalezeny byly pro konstanty s, g, c hodnoty

$$
\begin{aligned}
s &= 0{\cdot}993\,827\,2 \\
g &= 0{\cdot}998\,946\,5 \\
c &= 1{\cdot}095\,612\,2
\end{aligned}
$$

a užitím methody nejmenších čtverců na vyrovnání statistického materiálu M^S, který si zjednalo na rakouských pojištěních sdružení: „Mathematisch-statistische Vereinigung des österreich.-ungar. Verbandes der Privatversicherungsanstalten“, našel G. Rosmanith pro konstanty hodnoty:

$$
\begin{aligned}
s' &= 0{\cdot}998\,070 \\
g' &= 0{\cdot}995\,894 \\
c' &= 1{\cdot}080\,740.
\end{aligned}
$$

Dle toho mají difference Δs, Δg a Δc hodnoty:

$$
\begin{aligned}
\Delta s &= 0{\cdot}004\,242\,8 \qquad [0{\cdot}4\%] \\
\Delta g &= -0{\cdot}003\,052\,5 \qquad [0\,3\%] \\
\Delta c &= -0{\cdot}014\,872\,2 \qquad [\;1\%]
\end{aligned}
$$

Poněvadž jsou tyto rozdíly malé, můžeme se v rozvoji (9) omeziti jen na členy 1. řádu a klásti přibližně:

$$
a'_x = a_x + \frac{\partial a_x}{\partial s}\,.\,\Delta s + \frac{\partial a_x}{\partial g}\,.\,\Delta g + \frac{\partial a_x}{\partial c}\,.\,\Delta c. \tag{10}
$$

Pro parciálné derivace

$$\frac{\partial a_x}{\partial s}, \frac{\partial a_x}{\partial g} \text{ a } \frac{\partial a_x}{\partial c}$$

plynou z rovnice:

$$a_x = \sum_{n=1}^{\omega-x} v^n \cdot s^n \cdot g^{c^x(c^n-1)}$$

hodnoty:

$$\frac{\partial a_x}{\partial s} = \sum_{n=1} n \cdot v^n \cdot s^{n-1} \cdot g^{c^x(c^n-1)} = \frac{1}{s} \cdot \sum_{n=1} n \cdot v^n \cdot s^n \cdot g^{c^x(c^n-1)} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_x}{\partial g} &= \sum_{n=1} c^x \cdot (c^n - 1) \cdot v^n \cdot s^n \cdot g^{c^x(c^n-1)-1} \\ &= \frac{c^x}{g} \cdot \sum_{n=1} (c^n - 1) \cdot v^n \cdot s^n \cdot g^{c^x(c^n-1)} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_x}{\partial c} &= \sum_{n=1} [(x+n) \cdot c^{x+n-1} - xc^{x-1}] \cdot v^n \cdot s^n \cdot g^{c^x(c^n-1)} \cdot Log\ g = \\ &= Log\ g \cdot \sum_{n=1} (x+n)\ c^{x+n-1} \cdot v^n \cdot s^n \cdot g^{c^x(c^n-1)} \\ &\quad - x \cdot c^{x-1} \cdot Log\ g \cdot \sum v^n \cdot s^n \cdot g^{c^x(c^n-1)}. \end{aligned} \quad (13)$$

Položíme-li k vůli zkrácení:

$$v^n \cdot s^n \cdot g^{c^x(c^n-1)} = K_n,$$

obdržíme

$$\frac{\partial a_x}{\partial s} = \frac{1}{s} \cdot \sum_{n=1} n \cdot K_n$$

$$\frac{\partial a_x}{\partial g} = \frac{c^x}{g} \cdot \sum (c^n - 1) \cdot K_n$$

$$\frac{\partial a_x}{\partial c} = Log\ g\ [\sum_{n=1} (x+n)\ c^{x+n-1} \cdot K_n - x \cdot c^{x-1} \cdot \sum_{n=1} K_n],$$

takže

$$\begin{aligned} a'_x &= a_x + \frac{\Delta s}{s} \cdot \sum_{n=1} n \cdot K_n + \frac{\Delta g}{g} c^x \cdot \sum_{n=1} (c^n - 1) \cdot K_n \\ &\quad + \Delta c \cdot Log\ g \cdot [\sum_{n=1} (x+n)\ c^{x+n-1} \cdot K_n - x \cdot c^{x-1} \cdot \sum_{n=1} K_n]. \end{aligned} \quad (14)$$

Avšak součty, které se v této formuli vyskytují, nejsou v tabulkách pojišťoven publikovány a proto upravíme si je na tvar, který umožňuje použití tabelovaných hodnot.

Jest totiž

$$\sum_{n=1}^{\omega-x} n \,.\, K_n = \Sigma\, n \,.\, v^n \,.\, s^n \,.\, g^{c^x(c^n-1)} = \sum_{n=1} n \,.\, v^n \,.\, {}_n p_x$$

$$= \sum_{n=1} n \,.\, v^n \frac{l_{x+n}}{l_x} = \sum_{n=1} n \,.\, \frac{v^{x+n} \,.\, l_{x+n}}{v^x \,.\, l_x} = \sum_{n=1} n \,.\, \frac{D_{x+n}}{D_x},$$

kdež položeno

$$v^x \,.\, l_x = D_x$$

(diskontovaný počet žijících) aneb

$$\sum_{n=1} n \,.\, K_n = \frac{1}{D_x} \,.\, \sum_{n=1} n \,.\, D_{x+n}.$$

Avšak

$$\sum_{n=1} n \,.\, D_{x+n} = D_{x+1} + 2D_{x+2} + 3D_{x+3} + 4D_{x+4} + \ldots =$$

$$\begin{aligned} = D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + D_{x+4} + \ldots + D_\omega \\ + D_{x+2} + D_{x+3} + D_{x+4} + \ldots + D_\omega \\ + D_{x+3} + D_{x+4} + \ldots + D_\omega \\ D_{x+4} + \ldots + D_\omega \\ \ldots + D_\omega \end{aligned}$$

Ježto

$$\begin{aligned} D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \ldots + D_\omega &= N_{x+1} \\ D_{x+2} + D_{x+3} + \ldots + D_\omega &= N_{x+2} \\ + D_{x+3} + \ldots + D_\omega &= N_{x+3} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ D_\omega &= N_\omega \end{aligned}$$

a dále

$$N_{x+1} + N_{x+2} + N_{x+3} + \ldots + N_\omega = S_{x+1},$$

jest

$$\sum_{n=1} n \,.\, K_n = \frac{S_{x+1}}{D_x}. \qquad (15)$$

Dále jest

$$\sum_{n=1} K_n = \sum_{n=1} v^n \,.\, s^n \,.\, g^{c^x(c^n-1)} = a_x, \qquad (16)$$

podobně

$$\sum_{n=1} c^n K_n = \sum_{n=1} c^n \,.\, v^n \,.\, g^{c^x(c^n-1)} = \sum_{n=1} c^n \,.\, v^n \,.\, \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

$$= \sum_{n=1} \frac{c^n \,.\, D_{x+n}}{D_x} = \frac{1}{D_x} \,.\, \sum_{n=1} c^n \,.\, D_{x+n} \qquad (17)$$

a konečně

$$\Sigma (x+n)\, c^{x+n-1} K_n = \sum_{n=1} x \,.\, c^{x-1} \,.\, c^n K_n + \sum_{n=1} c^{x-1} \,.\, n \,.\, c^n \,.\, K_n$$

$$= x \,.\, c^{x-1} \,.\, \sum_{n=1} c^n \,.\, K_n + c^{x-1} \,.\, \sum_{n=1} n \,.\, c^n \,.\, K_n$$

$$= \frac{x \,.\, c^{x-1}}{D_x} \,.\, \sum_{n=} c^n \,.\, D_{x+n} + \frac{c^{x-1}}{D_x} \,.\, \Sigma\, c^n \,.\, n \,.\, D_{x+n} \qquad (18)$$

Tudíž

$$a'_x = a_x + \frac{\Delta s}{s} \,.\, \frac{S_{x+1}}{D_x} + \frac{\Delta g}{g} \,.\, c^x \,.\, \frac{1}{D_x} \,.\, \sum_{n=1} c^n \,.\, D_{x+n} - \frac{\Delta g}{g} c^x \,.\, a_x$$

$$+ \Delta c \,.\, Log\, g \,.\, \frac{x \,.\, c^{x-1}}{D_x} \,.\, \sum_{n=1} c^n \,.\, D_{x+u}$$

$$+ \Delta c \,.\, Log\, g \,.\, \frac{c^{x-1}}{D_x} \,.\, \sum_{n=1} n \,.\, c^n \,.\, D_{x+n} - \Delta c \,.\, Log\, g \,.\, x \,.\, c^{x-1} \,.\, a_x$$

aneb

$$a'_x = a_x\left(1 - \frac{c^x \,.\, \Delta g}{g} - x \,.\, c^{x-1} \,.\, \Delta c \,.\, Log\, g\right) + \frac{S_{x+1}}{D_x} \,.\, \frac{\Delta s}{s}$$

$$+ \frac{c^{x-1}}{D_x} \,.\, \left(\frac{c \,.\, \Delta g}{g} + x \,.\, \Delta c \,.\, Log\, g\right) \sum_{n=1} c^n \,.\, D_{x+n}$$

$$+ \frac{c^{x-1} \,.\, Log\, g \,.\, \Delta c}{D_x} \,.\, \sum_{n=1} n \,.\, c^n \,.\, D_{x+n}. \qquad (19)$$

Položíme-li

$$1 - \frac{c^x \,.\, \Delta g}{g} - \Delta c \,.\, x \,.\, c^{x-1} \,.\, Log\, g = A$$

$$\frac{S_{x+1}}{D_x} \,.\, \frac{\Delta s}{s} = B$$

$$\frac{\Delta g}{g} \,.\, \frac{c^x}{D_x} + \frac{x \,.\, c^{x-1}}{D_x} \,.\, \Delta c \,.\, Log\, g = C$$

$$\frac{c^{x-1}}{D_x} \,.\, \Delta c \,.\, Log\, g = E$$

jest konečně

$$a'_x = A \,.\, a_x + B + C \sum_{n=1} c^n \,.\, D_{x+n} + E \sum_{n=1} n \,.\, c^n \,.\, D_{x+n} \qquad (20)$$

Z výrazů potřebných pro vyčíslení této formule vyskytují se v tabulkách úmrtnostních

$$a_x,\ D_x,\ S_x$$

a jest nutno vypočísti

$$\Sigma\, c^n D_{x+n}$$

a

$$\Sigma\, n \,.\, c^x \,.\, D_{x+n},$$

což se stane snadno vypočtením tabulky, obsahující sloupce

n	$x+n$	D_{x+n}	$log\, D_{x+n}$	$log\, c^n$	$log\, c^n \,.\, D_{x+n}$	$c^n\, D_{x+n}$	$n\, c^n\, D_{x+n}$

a sečtením posledních dvou sloupců.

Kdyby ale také úroková míra při vypočtení prémie polhůtného důchodu předpokládaná byla jiná než i, ku příkladu

$$i + \Delta i,$$

mohli bychom hodnotu polhůtného důchodu, založeného na jiné tabulce úmrtnostní a jiné úrokové míře

$$a''_x,$$

vypočísti pomocí hodnoty a'_x.

Jest totiž

$$a'_x = \varphi\,(i),$$

kdežto

$$a''_x = \varphi\,(i + \Delta i).$$

Rozvineme-li dle řady Taylorovy, najdeme

$$a''_x = a'_x + \frac{da'_x}{di} \,.\, \Delta i + \frac{1}{2!} \,.\, \frac{d^2 a'_x}{di^2}\,(\Delta i)^2 + \ldots$$

aneb v prvém přiblížení

$$a''_x = a'_x + \frac{da'_x}{di}\,\Delta i. \tag{21}$$

Avšak rychleji vede k cíli, předpokládáme-li, že

$$a_x = \sum_{n=1} v^n \,.\, s^n \,.\, g^{c^x(c^n-1)} = f\,(s,\ g,\ c,\ i)$$

a

$$a''_x = \sum_{n=1} v'^n\, s'^n \,.\, g'^{c'^x(c^n-1)} = f\,(s + \Delta s,\ g + \Delta g,\ c + \Delta c,\ i + \Delta i)$$

a rozvedeme li a''_x dle řady Taylorovy:

$$a''_x = a_x + \frac{\partial a_x}{\partial s} \,.\, \Delta s + \frac{\partial a_x}{\partial g} \,.\, \Delta g + \frac{\partial a_x}{\partial c} \,.\, \Delta c + \frac{\partial a_x}{\partial i} \,.\, \Delta i + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial a_x}{\partial s} \,.\, \Delta s + \frac{\partial a_x}{\partial g} \,.\, \Delta g + \frac{\partial a_x}{\partial c} \,.\, \Delta c + \frac{\partial a_x}{\partial i}\,\Delta i\right)^2 + \ldots$$

aneb zase přibližně

$$a''_x = a_x + \frac{\partial a_x}{\partial s} . \Delta s + \frac{\partial a_x}{\partial g} . \Delta g + \frac{\partial a_x}{\partial c} . \Delta c + \frac{\partial a_x}{\partial i} . \Delta i \qquad (22)$$

Tento vzorec liší se od formule (10) pouze posledním členem, jehož hodnotu najdeme parciálnou derivací rovnice

$$a_x = \sum_{n=1} v^n . s^n . g^{c^x(c^n-1)} = \sum \frac{s^n . g^{c^x(c^n-1)}}{(1+i)^n}$$

dle i, takže

$$\frac{\partial a_x}{\partial i} = -\sum_{n=1} n . \frac{s^n . g^{c^x(c^n-1)}}{(1+i)^{n+1}} = -\sum_{n=1} n . v^{n+1} . s^n . g^{c^n(c^x-1)}$$

$$= - v \sum_{n=1} n . v^n . s^n . g^{c^x(c^n-1)} = - v \sum_{n=1} n . K_n$$

$$= - v . \frac{S_{x+1}}{D_x}. \qquad (23)$$

Dosadíme li do rovnice (22) za parciálné derivace příslušné nalezené hodnoty, obdržíme

$$a''_x = a_x \left(1 - \frac{c^x . \Delta g}{g} . - x c^{x-1} Log\, g\right) + \frac{S_{x+1}}{D_x} . \frac{\Delta s}{s}$$

$$+ \frac{c^{x-1}}{D_x} . \left(\frac{c . \Delta g}{g} + x . \Delta c .. Log\, g\right) \sum_{n=1} c^n . D_{x+n}$$

$$+ \frac{c_{x-}{}^{1} . \Delta c . Log\, g}{D_x} . \sum_{n=1} n . c^n . D_{x+n} - v . \Delta i \frac{S_{x+1}}{D_x}$$

čili

$$a''_x = A a_x + B + C \sum_{n=1} c^n . D_{x+n} + E . \sum_{n=1} n . c^n . D_{x+n}$$

$$- v . \Delta i . \frac{S_{x+1}}{D_x}$$

aneb konečně položíce

$$\frac{\Delta s}{s} . \frac{S_{x+1}}{D_x} - v . \Delta i \frac{S_{x+1}}{D_x} = \frac{S_{x+1}}{D_x} \left(\frac{\Delta s}{s} - v . \Delta i\right) = B'$$

najdeme

$$a''_x = A . a_x + B' + C \sum_{n=1} c^n . D_{x+n} + E \sum_{n=1} n . c^n . D_{x+n}. \qquad (24)$$

Ovšem nezbytným předpokladem při tom jest, aby oboje tabulky úmrtnostní byly vyrovnány dle formule G. Makehamovy a aby pomocná čísla

$$D_x, \; N_x, \; S_x$$

byla vypočtena dle tabulky úmrtnostní takto vyrovnané.

O ploše vytvořené šroubovicí, vykonávající pohyb šroubový.

Dr. Fr. Kadeřávek.

Buď dána šroubovice S o ose O; bod s buď její stopou na rovině $\pi \perp O$; S_1, O_1 buďtež orthogonálné průměty daných útvarů do roviny π. Suneme-li šroubovici S ve směru osy O rovnoměrně, otáčí se její stopa s v rovině π kol bodu O_1 rovněž rovnoměrně. Spojme tento pohyb dané šroubovice s rovnoměrnou rotací kol osy $\Omega \| O$. Bod O_1 otáčí se tu rovnoměrně kolem orthog. průmětu Ω_1 osy Ω do roviny π a kolem tohoto hybného bodu O_1 otáčí se rovnoměrně stopa s okolo Ω se otáčející a současně směrem O nad rovinu π vystupující šroubovice S, vyplňujíc cykloidu C o středu Ω_1; libovolný bod o ose O vytvořuje šroubovici Σ o ose Ω, šroubovice S vyplní určitou plochu šroubovou, označme ji **P**, jejímž normálným řezem jest cykloida C. I platí věta:

Vykonává-li šroubovice S o ose O pohyb šroubový určený šroubovicí Σ o ose $\Omega \| O$, vznikne plocha šroubová **P**, jejíž normálný řez jest *cykloida.*

Vyšetřme kružnici základní Σ' a kotalecí S' normálného řezu C. Zvolme si dvě šroubovice S, Σ o osách $O \| \Omega$, jejichž stopy O_1, Ω_1 na rovině π kolmé k O ležtež se stopami s a σ šroubovic S a Σ v jedné přímce X (obr. 1.). Výšky návitků šroubovic daných buďtež b, β, poloměry průmětů S_1, Σ_1 do roviny π r a ϱ. Vysune-li se šroubovice S ve směru osy O o celou výšku návitku b, otočí se její stopa s kol O_1 o úhel plný, osa O však