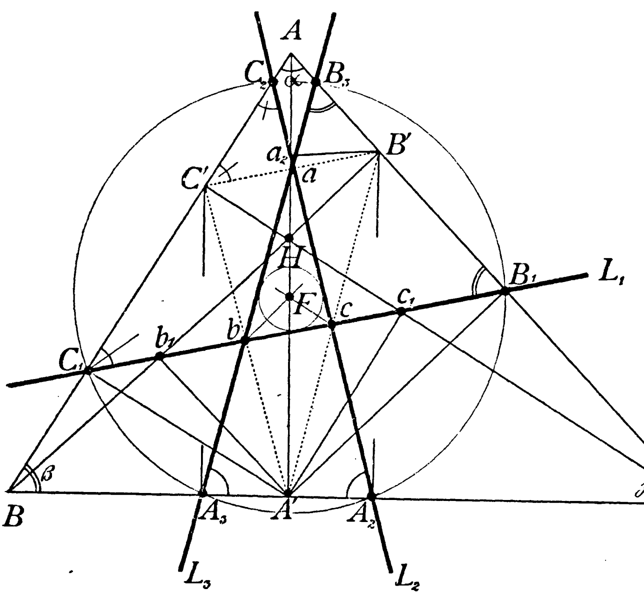
Poznámky ku geometrii trojúhelníku.

Dr. Jos. Tomáš, professor v Kroměříži.

Úloha osmá předešlého ročníku „Přílohy“ žádá důkazu o zvláštních přímkách trojúhelníku. Důkaz hlavně analytický a algebraický podán. Je však zajímavo studovati úlohu a dokazovati všeobecné věty methodami, jichž skýtá planimetrie, po případě trigonometrie, aniž třeba zabočovati do geometrie analytické. Ukáží se takto ještě jiné vztahy, zvláště k trojúhelníku orthickému, čemuž ať poslouží tento příspěvek.



Obr. 1.

1. Spustíme-li s paty výšky trojúhelníku kolmice na druhé dvě strany, leží paty těchto čtyř kolmic v jedné přímce. Takové přímky dostaneme v obecném trojúhelníku tři.

B_1, C_1, b_1, c_1 buďtež paty čtyř kolmic: $A'B_1$, $A'C_1$, $A'b_1$, $A'c_1$! Čtyrúhelníky (tětivové) $A'b_1C_1B$ a CB_1c_1A' jsou si podobny ve smyslu souhlasném a středově položeny. Proto $B_1c_1 \parallel b_1C_1$. Také čtyrúhelníky $A'B_1AC_1$ a $Hb_1A'C_1$ (tětivové) jsou si podobny, ale ve smyslu protivném, jsou také v poloze středové; tudíž $B_1C_1 \parallel - b_1c_1$. Kdyby body B_1, C_1. b_1, c_1, tvořily čtyrúhelník, musil by to býti rovnoběžník, t. j. musilo by $B_1c_1 \#\, b_1C_1$, $B_1C_1 \# - b_1c_1$, což však není současně a obecně možno. Jediné kdyby $\sphericalangle\, \alpha$ byl pravý, bylo by $B_1c_1 = b_1C_1 = 0$, $B_1C_1 = - b_1c_1$, dva body by vždy spadly v jeden.

B_1C_1 a b_1c_1 musí tedy ležeti v přímce. K témuž výsledku vede také trojúhelník tupoúhlý. Jiný důkaz podán v řešení úlohy osmé loňské Přílohy.

Přímku, na níž leží body B_1, C_1, b_1, c_1, označme písmenem L_1! Kromě této přímky má trojúhelník obecný ještě přímky L_2, L_3.

2. Přímky L_1, L_2, L_3 se po dvou protínají vždy ve středu stran trojúhelníku orthického $A'B'C'$, jsou tedy rovnoběžny se stranami tohoto trojúhelníku, omezují trojúhelník do orthického vepsaný a jemu podobný, utínají s daného trojúhelníku tři trojúhelníky, jež jsou danému trojúhelníku podobny.

Důkaz: Čtyrúhelník $A'B_1B'b_1$ je pravoúhlý, proto $A'B' = B_1b_1$. Tyto dvě příčky se navzájem půlí jakožto úhlopříčky pravoúhelníku. Také $A'A_2B'a_2$ je pravoúhelník, proto $A'B' = A_2a_2$, obě příčky se půlí. Přímky L_1 a L_2 protínají se s příčkou $A'B'$ v jednom bodě **c**, jenž jest středem této příčky. Je tedy $A_2c = B_1c = \frac{1}{2}\overline{A'B'}$. Poněvadž je $\triangle A_2B_1c$ rovnoramenný, jest symmetrála podstavy A_2B_1 symmetrálou úhlu $A_2cB_1 = \sphericalangle\, acb$.

Stejně dokážeme, že L_2, L_3 se protínají v bodě a uprostřed příčky $B'C'$, přímky L_3. L_1 pak v bodě b uprostřed příčky $A'C'$. Trojúhelník $A'B'C'$, jehož vrcholy jsou paty výšek daného trojúhelníku, sluje *orthický* vzhledem k trojúhelníku ABC.

Přímky L_1, L_2, L_3 tvoří trojúhelník abc orthickému podobný a do něho vepsaný. Vrcholy $\triangle\, abc$ jsou středy stran trojúhelníku orthického. Příslušné strany obou trojúhelníků jsou střídavě v protivném smyslu rovnoběžny. Jsou tedy přímky L_1, L_2, L_3 rovnoběžny s příslušnými stranami trojúhelníku orthického, což patrno také ze středové podobnosti čtyrúhelníkův $AB_1A'C_1$, $AB'HC'$ a t. p.

Kromě toho: symmetrály úhlů $\triangle\, abc$ jsou symmetrálami příček A_2B_1, B_3C_2, C_1A_3.

Úhly trojúhelníku orthického jsou $2R - 2\alpha$, $2R - 2\beta$, $2R - 2\gamma$, je-li $\triangle ABC$ ostroúhlý; pro tupoúhlý $\triangle ABC$ jsou úhly trojúhelníku orthického (je-li na př. $\sphericalangle \gamma$ tupý): $2\gamma - 2R$, 2α, 2β. Pro úplnost budiž zde tvrzení dokázáno:

Čtyrúhelník $BA'HC'$ je tětivový; skládáť se ze dvou trojúhelníků pravoúhlých nad společnou přeponou BH. Proto $\sphericalangle HA'C' = \sphericalangle HBC' = R - \alpha$. Též čtyrúhelník $A'HB'C$ je tětivový, odtud $\sphericalangle B'A'H = \sphericalangle B'CH = R - \alpha$. Výška AA' trojúhelníku ABC je symmetrálou $\sphericalangle B'A'C'$ trojúhelníku orthického. Týž vztah je mezi ostatními výškami $\triangle ABC$ a symmetrálami trojúhelníku orthického.

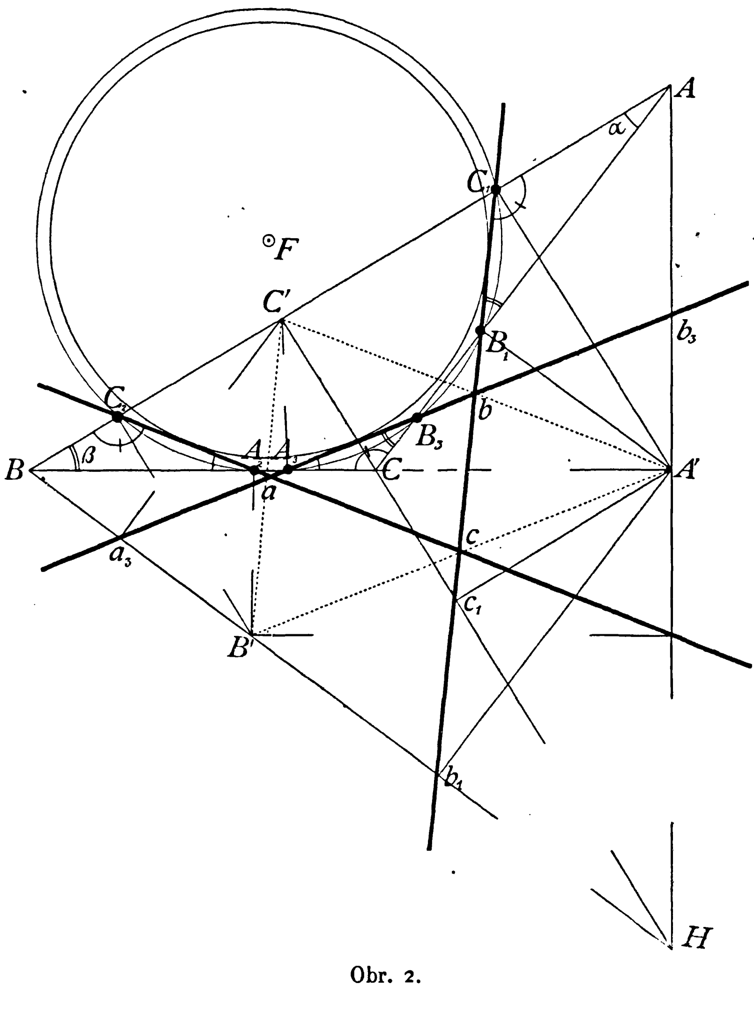
Je tedy $\sphericalangle B'A'C' = 2(R - \alpha) = 2R - 2\alpha$, podobně o ostatních úhlech. Kdyby byl na př. $\sphericalangle \gamma$ tupý, tu snadno dokážeme, že příslušný úhel $\triangle$ orthického jest $2\gamma - 2R$ a ostatní 2α, 2β. $\sphericalangle C'A'B = \alpha$, poněvadž $\sphericalangle HA'C' = R - \alpha$, $\sphericalangle BC'A' = \gamma$. Stejně jest i $\sphericalangle B'A'C = \alpha$, $\sphericalangle A'B'C = \beta$, atd. $\triangle A'BC' \sim \triangle ABC \sim \triangle A'B'C \sim \triangle AB'C'$. Podobně mutatis mutandis o $\triangle$ tupoúhlém.

Poněvadž přímky L_1, L_2, L_3 jsou rovnoběžny s příslušnými stranami $\triangle$ orthického, bude i $\triangle A_2BC_2 \sim \triangle ABC \sim \triangle A_3B_3C \sim \triangle AB_1C_1$. Průsek H výšek daného trojúhelníku je průsekem symmetrál úhlů $\triangle$ orthického a tedy středem kruhu trojúhelníku orthickému vepsaného, je-li daný $\triangle$ ostroúhlý. Pro $\triangle$ tupoúhlý obdržíme symmetrály dvou úhlů vnějších a třetího vnitřního, průsek výšek H jest pak středem kruhu vnějšího (trojúhelníku orthickému připsaného).

Trojúhelník ostroúhlý i trojúhelník tupoúhlý mají vždy $\triangle$ orthický; neboť $(2R - 2\alpha) + (2R - 2\beta) + (2R - 2\gamma) = 2R$, po př. je-li úhel γ tupý, $(2\gamma - 2R) + 2\alpha + 2\beta = 2R$, každý z těchto úhlů je větší než nulla a menší než $2R$. Jediné trojúhelník pravoúhlý nemá $\triangle$ orthického; neboť kdyby na př. byl $\sphericalangle \gamma = R$, musil by dle předešlého příslušný úhel $\triangle$ orthického, t. j. $\sphericalangle A'C'B' = 2R - 2\gamma = 2\gamma - 2R = 0$.

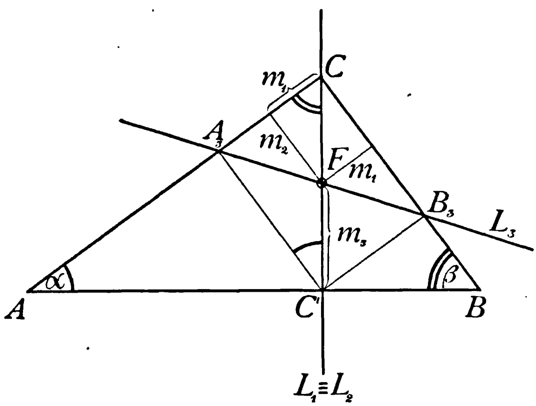
3. Přímky L_1, L_2, L_3 se protínají v jednom bodě jen v trojúhelníku pravoúhlém.

Jakož dříve dokázáno, tvoří přímky L_1, L_2, L_3 trojúhelník *abc*, do orthického vepsaný tak, že středy stran tohoto jsou vrcholy onoho $\triangle$. Pokud má tedy nějaký $\triangle$ svůj $\triangle$ orthický, potud se nebudou přímky L_1, L_2, L_3 protínati v jednom bodě, nýbrž omezovati trojúhelník. Jediné trojúhelník pravoúhlý nemá



Obr. 2.

trojúhelníku orthického, poněvadž dvě strany tohoto spadají v jedno se stranou třetí (výškou $\triangle$ pravoúhlého). Spadají tedy také jen v $\triangle$ pravoúhlém dvě z přímek L_1, L_2, L_3 v jedinou, a tudíž jen v $\triangle$ pravoúhlém se tyto přímky protínají v jednom bodě F, jenž jest zároveň *Lemoineovým* bodem trojúh. pravoúhlého. (Bod Lemoineův jest bod, jehož vzdálenosti od stran trojúhelníku jsou těmto stranám přímo úměrny; jest to průsek tak řečených symmedian, t. j. příček, které jsou inversní k těžnicím, čili souměrny s těžnicemi dle příslušné symmetrály úhlu.)



Obr. 3.

F půlí výšku trojúhelníku CC'.

$$m_1 : m_2 : m_3 = B_3C' : B_3C : C'C$$
$$m_1 : m_2 : m_3 = BC : AC : AB.$$

4. Úseky přímek L_1, L_2, L_3, způsobené příslušnými stranami trojúhelníku, jsou si rovny. *a*) Každý úsek rovná se polovině obvodu trojúhelníku orthického, je-li daný $\triangle$ ostroúhlý.

Dokázáno, že na př. $A_2c = cB_1 = ba = \frac{1}{2}\overline{A'B'}$; stejně jest $aC_2 = aC' = cb = \frac{1}{2}B'C'$, $ac = \frac{1}{2}\overline{C'A'}$.

$$A_2C_2 = A_2c + ca + aC_2 = \frac{1}{2}(A'B' + B'C' + C'A')$$
$$= ab + bc + ca.$$

Je tedy $B_1C_1 = C_2A_2 = A_3B_3 = \frac{1}{2}U = u$, je-li U obvod trojúhelníku orthického, u obvod $\triangle$ *abc*, tvořeného přímkami L_1, L_2, L_3.

b) Je-li trojúhelník daný tupoúhlý ($\sphericalangle \gamma > R$), jsou stejné úseky přímek L_1, L_2, L_3 rovny polovici součtu dvou stran trojúhelníku orthického, zmenšeného o stranu třetí. Tato třetí strana trojúhelníku orthického přísluší tupému úhlu $\triangle$ daného.

Dle obrazce druhého jest na př. $A'b = bC' = \frac{1}{2}\overline{A'C'}$ $= bC_1 = ca$ (patrno z pravoúhelníku $A'C_1C'c_1$), $cC_1 = cb + bC_1$ $= \frac{1}{2}(B'C' + A'C') = cb + ca$.

$cB_1 = b_1c = \frac{1}{2}\overline{B'A'} = ab$, (zřejmo z pravoúhelníku $A'B_1B'b_1$) $cC_1 - cB_1 = B_1C_1 = \frac{1}{2}(B'C' + A'C' - B'A') = cb + ca - ab$.

Máme tedy $C_1B_1 = C_2A_2 = A_3B_3 = \frac{1}{2}U = u$.

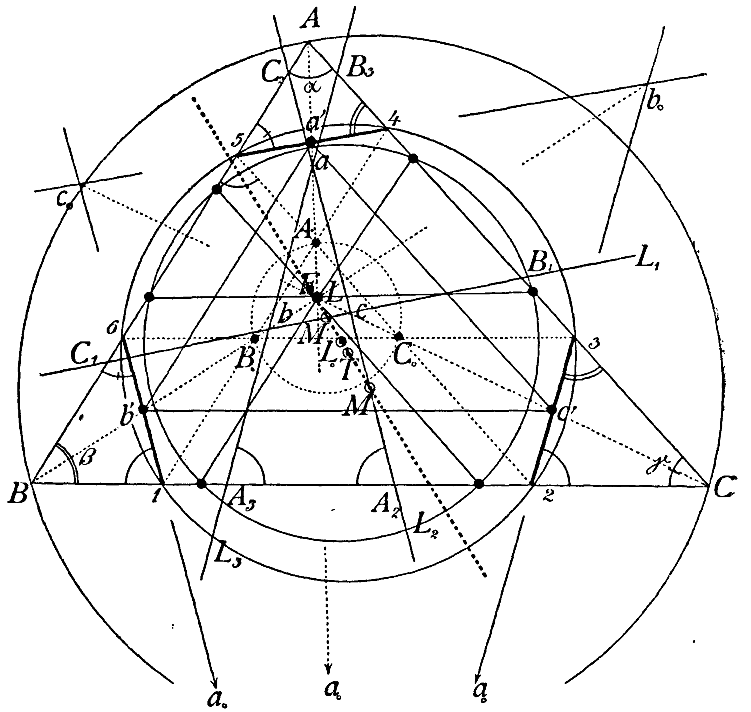
5. Šestero bodů B_1, C_1, C_2, A_2, A_3, B_3, jež jsou průseky přímek L_1, L_2, L_3 s příslušnými stranami trojúhelníku, leží na *kružnici*, jejíž střed F je zároveň *a*) středem kruhu, *vepsaného* do trojúhelníku, jejž tvoří přímky L_1, L_2, L_3, je-li trojúhelník daný ostroúhlý, po příp. *b*) středem kruhu *vnějšího*, t. j. připsaného trojúhelníku, tvořenému přímkami L_1, L_2, L_3, je-li daný trojúhelník tupoúhlý.

Důkaz: Trojúhelníky A_3A_2a, B_1B_3b, C_2C_1c jsou rovnoramenné; neboť na př. v $\triangle A_3A_2a$ jsou úhly při A_3, A_2 rovny $\sphericalangle \alpha$, jelikož $L_3 \parallel A'B'$, $L_2 \parallel A'C'$ a $\sphericalangle C'A'B = \sphericalangle B'A'C' = \sphericalangle \alpha$, jak dokázáno sub 2. Jsou tedy symmetrály úseček A_3A_2, B_1B_3, C_1C_2 zároveň symmetrálami úhlův *a*, *b*, *c* trojúhelníku, jejž omezují přímky L_1, L_2, L_3. Avšak, jak dokázáno sub 2., také symmetrály úseček B_3C_2, C_1A_3, A_2B_1 jsou zároveň symmetrálami úhlův *a*, *b*, *c*. Symmetrály všech stran šestiúhelníku $A_3A_2B_1B_3C_2C_1$ protínají se tedy v jednom bodě F, jenž je průsekem symmetrál úhlů trojúhelníku *abc*, tvořeného přímkami L_1, L_2, L_3, a tedy zároveň středem kruhu, trojúhelníku *abc* vepsaného.

Šestiúhelník $A_3A_2B_1B_3C_2C_1$ je *tětivový*. Podobně se dokáže tvrzení *b*). — A_3A_2 a B_3C_2 mají společnou symmetrálu, jsou tedy rovnoběžny; stejně jest $B_1B_3 \parallel A_3C_1$, $C_2C_1 \parallel B_1A_2$.

6. Vedeme-li ku přímkám L_1, L_2, L_3 rovnoběžky tak, že úsečky rovnoběžek mezi příslušnými stranami trojúhelníku jsou si rovny, obdržíme obecně 6 bodů, jež leží *na kružnici* (obr. 4.).

Je-li $\overline{16} \parallel A_2C_2$, $\overline{23} \parallel A_3B_3$, $\overline{45} \parallel B_1C_1$ a $\overline{16} = \overline{23} = \overline{45}$, pak jsou malé trojúhelníky při vrcholech A, B, C podobny trojúhelníku ABC (srv. odst. 2). Podobnost jest inversní. Jednak proto, jednak pro rovnost $\overline{16} = \overline{23} = \overline{45}$ jsou čtyřúhelníky 1456, 1236, 2345 rovnoramenné lichoběžníky a tudíž tětivové. Leží tedy na př. body 1, 4, 5, 6 na kružnici; ale i čtyrúhelník



Obr. 4.

1256 je tětivový, neboť $\overline{25} \parallel CA$, tudíž $\sphericalangle 652 = \alpha$, $\sphericalangle 652 + \sphericalangle 216 = 2R$. Kružnice, jdoucí body 1, 2, 5, 6, obsahuje body 1, 5, 6, které leží na kružnici $\widehat{1456}$. Poněvadž třemi body, které neleží v přímce, jest určena jen jedna kružnice, leží všech pět bodů: 1, 2, 4, 5, 6 na jedné kružnici. Že i bod 3 na této kružnici leží, dokáže se podobnou úvahou.

7. Kružnice zmíněné jsou totožny s kružnicemi *Tuckerovými.*

[Je-li totiž trojúhelník ABC podoben jinému ($A_0B_0C_0$) dle středu podobnosti L, kde L jest bod Lemoineův, t. j. průsek symmedian $\triangle ABC$, protínají se strany obou trojúhelníků (prodlouženy) v 6 bodech, které leží na kružnici — Tuckerově. Je-li pak **M** střed kružnice, trojúhelníku ABC opsané, leží středy všech kružnic Tuckerových na přímce, body M a L procházející — přímce Tuckerově.]

Trojúhelníky $1B6$, $23C$, $A45$ jsou danému $\triangle$ inversně podobny; kdybychom každý z těchto trojúhelníkův otočili o 180^0 kolem symmetrály příslušného úhlu $\triangle ABC$, byla by podobnost přímá: úsečka $\overline{45}$ by byla $\| BC$, $\overline{61} \| CA$, $\overline{23} \| AB$, těžnice $\triangle ABC$ by se kryly s těžnicemi stran $\overline{45}$, $\overline{61}$, 23 oněch trojúhelníků.

Kdybychom pak trojúhelníky $A45$, $B16$, $C23$ uvedli zase do polohy původní, budou prodloužené těžnice stran $\overline{54}$, $\overline{16}$, $\overline{32}$ symmedianami $\triangle ABC$, bod Lemoineův L bude společným jich průsekem. Symmediany procházejí vrcholy A_0, B_0, C_0 trojúhelníku, jenž jest podoben $\triangle ABC$ dle L jako středu podobnosti; jsou totiž (srv. odst. 6.) čtyrúhelníky $A5A_04$, $B1B_06$, $C3C_02$ rovnoběžníky. Body 1, 2, 3, 4, 5, 6 jsou tudíž průseky stran dvou trojúhelníků podobných dle společného bodu Lemoineova L jako středu podobnosti. Jsou tedy vytčené body, o nichž dokázáno, že leží na kružnici, body kružnice Tuckerovy.

Body a', b', c' jsou průsečíky úhlopříček rovnoběžníkův $A5A_04$, $B1B_06$, $C3C_02$; poněvadž pak $A_0B_0 \| AB$, $B_0C_0 \| BC$, $C_0A_0 \| CA$, budou také úsečky $a'b'$, $b'c'$, $c'a'$ rovnoběžny s příslušnými stranami $\triangle ABC$ a $\triangle A_0B_0C_0$. $\triangle a'b'c' \sim \triangle ABC \sim \triangle A_0B_0C_0$ dle středu podobnosti L jakožto společného bodu Lemoineova. Body a', b', c' jakožto středy rovných tětiv kružnice (T) mají od středu **T** této kružnice stejné vzdálenosti; odtud: kružnice trojúhelníku $a'b'c'$ opsaná je soustředná s kružnicí Tuckerovou (T) a dotýká se úseček $\overline{45}$, $\overline{61}$, 23 čili jest vepsána do trojúhelníku, jejž bychom obdrželi, kdybychom tyto úsečky prodloužili.*)

---

*) Kružnice $a'b'c'$ není na obr. 4. nakreslena, aby obrazec nebyl přeplněn.

Tento trojúhelník $a_0b_0c_0$ jest podoben

$$\triangle abc \backsim \triangle A'B'C'$$

(srv. obr. 1.) Poněvadž symmediany AL, BL, CL půlí všecky úsečky $\triangle ABC$, rovnoběžné ku přímkám L_1, po příp. L_2, L_3, budou procházeti také vrcholy $\triangle abc$ (srv. obr. 1.) i trojúhelníku $a_0b_0c_0$. Abychom to dokázali, spusťme ze středu F kruhu, trojúhelníku abc (obr. 1.) vepsaného, kolmici Fk na stranu bc! Jak známo, jest $bk = \frac{u}{2} - \overline{ac}$, je-li u obvod $\triangle abc$; avšak $C_1b = A_3b = ac$ (srv. odst. 2. a 4.), tedy

$$C_1k = \overline{ac} + \left(\frac{u}{2} - \overline{ac}\right) = \frac{u}{2} = \tfrac{1}{2}\,\overline{C_1B_1}.$$

Poněvadž příčka AL půlí všecky úsečky v $\triangle ABC$, rovnoběžné k L_1, půlí také úsečku C_1B_1, je tedy bod k dotyčným bodem kruhu, trojúhelníku abc vepsaného, a zároveň průsekem příčky AL se stranou bc. Bod a', střed úsečky $\overline{45}$, je dotyčným bodem kružnice o středu T, vepsané trojúhelníku $a_0b_0c_0 \backsim abc$. Pro homothetickou polohu obou trojúhelníků jest $a'k$ paprskem podobnosti; poněvadž pak body a', a, k jsou středy příček rovnoběžných ($C'a = aB'$, srv. odst. 2.) v $\triangle ABC$, leží na přímce, jež se sjednocuje s příčkou AL. Na paprsku $a'k \equiv AL$ leží střed podobnosti $\triangle abc$ a $\triangle a_0b_0c_0$, a protože paprsek AL obsahuje také bod a, sjednocuje se i s paprskem, jenž spojuje stejnolehlé body a, a_0 obou trojúhelníků: příčka AL jde tedy bodem a_0.

Symmediany $\triangle ABC$ procházejí také vrcholy trojúhelníkův abc, $a_0b_0c_0$ a případ, uvedený v odst. 1.—5., jest jen zvláštním případem obecného útvaru. Také kružnice $A_3A_2B_1B_3C_2C_1$ jest jen zvláštním případem kružnic Tuckerových; neboť spojíme-li body A_3 s C_1, A_2 s B_1, B_3 s C_2 a spojnice prodloužíme až ku průsekům, obdržíme trojúhelník podobný $\triangle ABC$ dle bodu Lemoineova jako středu podobnosti, což patrno z úvah odst. 6. a 7.

Bod L je středem podobnosti, společným také všem trojúhelníkům $a_0b_0c_0$, abc a t. d.; není však jich společným bodem Lemoineovým, nýbrž společným jich bodem *Gergonneovým*. Bod Gergonneův sluje průsek příček trojúhelníku, spojujících vrcholy s dotyčnými body kruhu vepsaného. Body a'. b', c', v nichž symmediany trojúhelníku ABC protínají strany $\triangle a_0b_0c_0$, jsou dotyčné body kružnice do $\triangle a_0b_0c_0$ vepsané o středu T, soustředné s kružnicí Tuckerovou $\overline{123456}$. Jest tedy L bodem Gergonneovým $\triangle a_0b_0c_0$, ale i bodem Gergonneovým $\triangle abc$, jakož patrno ze středové podobnosti obou trojúhelníků vzhledem k bodu L, a také přímo dokázáno.

Poněvadž $\triangle a'b'c' \sim \triangle ABC \sim \triangle A_0B_0C_0$ dle společného středu L, leží příslušné body těchto trojúhelníků vždy na jednom paprsku, procházejícím bodem L. Proto leží T, M, M' jako středy kružnic trojúhelníkům těm opsaných s bodem L na téže přímce. Přímka tato sluje přímka *Tuckerova*. Kružnici opsanou danému trojúhelníku ABC možno pokládati za krajní případ kružnic Tuckerových, jenž nastane, když příčky $\overline{45}$, $\overline{61}$, $\overline{23}$ zmizejí ve vrcholech $\triangle ABC$.

Z podobnosti trojúhelníků plyne:

$$LM : LT : LM' = LA : La' : LA_0$$
$$(LM - LT) : (LT - LM') = (LA - La') : (La' - LA_0)$$
$$MT : TM' = Aa' : a'A_0.$$

Poněvadž však $Aa' = a'A_0$, jest i $MT = TM'$.

Střed kruhu Tuckerova (T) půlí tedy vzdálenost středu M kružnice $\triangle ABC$ opsané a středu M' kružnice opsané trojúhelníku, jehož průseky se stranami $\triangle ABC$ určují kružnici Tuckerovu, a jenž jest trojúhelníku danému podoben dle společného bodu Lemoineova jako středu podobnosti.

Přímka Tuckerova jest geometrickým místem středů všech kružnic Tuckerových, prochází středem M kruhu trojúhelníku ABC opsaného a jeho bodem Lemoineovým. Tento bod (L) jest zároveň bodem Gergonneovým trojúhelníku abc, tvořeného přímkami L_1, L_2, L_3 a všech obdobných a tomuto podobných trojúhelníkův $a_0b_0c_0$. Také střed F kruhu do $\triangle abc$ vepsaného jakožto střed kružnice Tuckerovy, procházející body A_3, A_2, B_1, B_3, C_2, C_1 leží na přímce Tuckerově. Bod L_0, jenž půlí vzdálenost bodu Lemoineova a středu kružnice $\triangle ABC$ opsané, je středem kružnice Lemoineovy, procházející průseky přímek, bodem Lemoineovým rovnoběžně k stranám $\triangle ABC$ vedených, a stran tohoto trojúhelníku. Kružnice Lemoineova je totiž vedle kružnice, $\triangle ABC$ opsané, druhý krajní případ kružnic Tuckerových, kdy trojúhelník $A_0B_0C_0$ je nullový, tvoře jediný bod L.

8. Délku úseček $B_1C_1 = A_3B_3 = A_2C_2$ určíme takto (srv. obr. 1.):

$B_1C_1 : AC_1 = \sin\alpha : \sin\beta$, $AC_1 = v_1 \sin\beta$, píšeme-li $AA' = v_1$;

$B_1C_1 = v_1 \sin\alpha$, $av_1 = 2\Delta$, $B_1C_1 = \frac{2\Delta}{a} \sin\alpha$. Avšak

$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2r,$$

je-li **r** poloměr kružnice $\triangle ABC$ opsané.

$$B_1C_1 = A_3B_3 = A_2C_2 = \frac{\Delta}{r} = \frac{4\Delta^2}{abc}.$$

Pokud trojúhelníky vyhovují podmínce $\frac{\Delta}{r} = const.$, jsou úsečky přímek L_1, L_2, L_3 ve všech trojúhelnících rovny.

Hledáme poloměr **p** kružnice, procházející body B_1, C_1, C_2, A_2, A_3, B_3.

$$p^2 = \varrho^2 + (\tfrac{1}{2}\,\overline{B_1C_1})^2,$$

je-li ϱ poloměr kruhu, vepsaného do trojúhelníku abc.

$$\sphericalangle \tfrac{1}{2}\,abc = R - \beta, \quad \sphericalangle \tfrac{1}{2}\,bca = R - \gamma,$$

$$\varrho\,(tg\beta + tg\gamma) = bc = \tfrac{1}{2}\,\overline{C'B'}.$$

$$\varrho \frac{\sin\alpha}{\cos\beta\cos\gamma} = \frac{1}{2}\,\overline{C'B'}, \quad \varrho = \frac{1}{2}\,\overline{C'B'}\,.\,\frac{\cos\beta\cos\gamma}{\sin\alpha}.$$

$$C'B' = \frac{B'C_2}{\sin\gamma},$$

$$B'C_2 = c\sin\alpha\cos\alpha, \quad C'B' = \frac{c\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\gamma} = r\sin 2\alpha.$$

$$\varrho = \frac{c}{2\sin\gamma}\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = r\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

Je-li $\gamma = R$, jest $\varrho = 0$; jsou-li všecky úhly ostré, jest $\varrho > 0$, je-li však jeden tupý, jest $\varrho < 0$. V tomto případě jest ϱ poloměr kruhu vnějšího, trojúhelníku abc připsaného (srv. obr. 2.)

$$B_1C_1 = \frac{\Delta}{r} = \frac{2r^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{r},$$

$$\tfrac{1}{2}\,\overline{B_1C_1} = r\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

$$p = r\sqrt{(\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma + \cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma)}$$

$$= \varrho\sqrt{1 + tg^2\alpha\, tg^2\beta\, tg^2\gamma}.$$

Pro trojúhelník pravoúhlý ($\gamma = R$) jest

$$p = r \sin \alpha \cos \alpha = \frac{r}{2} \sin 2\alpha = \frac{c}{4} \sin 2\alpha.$$

Obvod trojúhelníku abc budiž $u = \frac{1}{2}(C'B' + B'A' + A'C')$;

$$u = \frac{r}{2}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma) = 2r \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$$

$$= \frac{\Delta}{r} = B_1C_1 = C_2A_2 = A_3B_3.$$

V trojúhelníku tupoúhlém jest $\sin 2\gamma$ záporné (je-li $\gamma > R$); stranu, ležící proti úhlu c (srv. obr. 2.) jest pokládati za zápornu, a výraz u třeba položiti $= \overline{cb} + \overline{ca} - | \overline{ab} | \ldots$ (srv. odst. 4. b).

Která jest plocha P' trojúhelníku orthického $A'B'C'$?

Je-li $\varrho' = 2\varrho$ poloměr kruhu trojúhelníku orthickému vepsaného, $u' = 2u$ pak jeho obvod, bude

$$P' = \tfrac{1}{2}\varrho' u' = 2\varrho u.$$

Dosadíme-li vypočtené hodnoty, obdržíme

$$P' = \frac{r^2}{2} \sin 2\alpha \sin 2\beta \sin 2\gamma,$$

nebo podržíme-li ϱ, $P' = 4\varrho^2 \, tg\, \alpha \, tg\, \beta \, tg\, \gamma$, nebo

$$P' = 2\Delta \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = \frac{\varrho'}{r}\Delta.$$

$$\Delta : P' = r : \varrho'.$$

Plocha $\triangle abc$ jest $P = \frac{1}{4}P' = \varrho^2 \, tg\, \alpha \, tg\, \beta \, tg\, \gamma$,

$$tg\, \alpha \, tg\, \beta \, tg\, \gamma = \frac{P}{\varrho^2}$$

$$p = \varrho \sqrt{1 + \left(\frac{P}{\varrho^2}\right)^2} = \frac{1}{\varrho} \sqrt{P^2 + \varrho^4}.$$

Jest tedy poloměr kruhu $A_3A_2B_1B_3C_2C_1$ určen jen *dvěma* veličinami: plochou $\triangle abc$, jejž omezují přímky L_1, L_2, L_3, a poloměrem kruhu, tomuto trojúhelníku vepsaného.

9. Rovnice přímky Tuckerovy.

Přímka Tuckerova jest určena středem M kružnice, $\triangle ABC$ opsané, a bodem Lemoineovým L.

Buďtež $N_1 = 0$, $N_2 = 0$, $N_3 = 0$ normální rovnice stran trojúhelníku ABC: $N_k \equiv x \cos \alpha_k + y \sin \alpha_k - q_k$, $k = 1, 2, 3$. Počátek souřadnic ať leží uvnitř trojúhelníku! Vzdálenosti bodu $M(x_1, y_1)$ od stran trojúhelníku jsou

$$d_1 = -N_1(x_1, y_1) = r \cos \alpha; \quad d_2 = -N_2(x_1, y_1) = r \cos \beta;$$
$$d_3 = -N_3(x_1, y_1) = r \cos \gamma.$$

Bod Lemoineův $L(x_2, y_2)$ má od stran trojúhelníku vzdálenosti přímo úměrné stranám:

$$e_1 = -N_1(x_2, y_2) = \varepsilon a = \nu \sin a;$$
$$e_2 = -N_2(x_2, y_2) = \nu \sin \beta; \quad e_3 = -N_3(x_2, y_2) = \nu \sin \gamma$$

Zvolíme-li kdekoli na přímce, body M a L procházející, bod $P \equiv (\xi, \eta)$, budou jeho vzdálenosti od stran trojúhelníku $p_1 = -N_1(\xi, \eta)$ a t. p. Z podobnosti obrazců plyne:

$$\frac{p_1 - d_1}{d_1 - e_1} = \frac{p_2 - d_2}{d_2 - e_2} = \frac{p_3 - d_3}{d_3 - e_3} = \lambda, \text{ odtud}$$

$$p_1 - (\lambda + 1) d_1 + \lambda e_1 = 0, \quad p_2 - (\lambda + 1) d_2 + \lambda e_2 = 0,$$
$$p_3 - (\lambda + 1) d_3 + \lambda e_3 = 0.$$

Kdybychom psali

$$\lambda = \frac{\lambda_3}{\lambda_1}, \text{ pak by bylo } -(\lambda + 1) = -\frac{\lambda_1 + \lambda_3}{\lambda_1}.$$

Položme $-(\lambda_1 + \lambda_3) = \lambda_2$! Obdržíme tři lineární, homogenní rovnice dle $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$:

$$\lambda_1 p_1 + \lambda_2 d_1 + \lambda_3 e_1 = 0,$$
$$\lambda_1 p_2 + \lambda_2 d_2 + \lambda_3 e_2 = 0,$$
$$\lambda_1 p_3 + \lambda_2 d_3 + \lambda_3 e_3 = 0.$$

Tyto rovnice mohou pro libovolné hodnoty $\lambda = \frac{\lambda_3}{\lambda_1}$, jež určují polohu obecného bodu $P \equiv (p_1, p_2, p_3)$ na přímce (ML), býti současně splněny jen tehdy, když determinant

$$\begin{vmatrix} p_1 & d_1 & e_1 \\ p_2 & d_2 & e_2 \\ p_3 & d_3 & e_3 \end{vmatrix} = 0, \text{ čili } \begin{vmatrix} N_1 & d_1 & e_1 \\ N_2 & d_2 & e_2 \\ N_3 & d_3 & e_3 \end{vmatrix} = 0.$$

To jest rovnice přímky (ML). Dosadíme-li příslušné hodnoty, obdržíme po dovolených změnách:

$$\begin{vmatrix} N_1 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ N_2 & \cos\beta & \sin\beta \\ N_3 & \cos\gamma & \sin\gamma \end{vmatrix} = 0, \text{ čili}$$

$$T \equiv N_1 \sin(\beta-\gamma) + N_2 \sin(\gamma-\alpha) + N_3 \sin(\alpha-\beta)\ldots,$$

rovnici přímky Tuckerovy. Že na této přímce leží střed F kružnice $\widehat{A_3A_2B_1B_3C_2}C_1$ (obr. 1.), dokážeme takto:

$$A_3A_2 = a - (BA_3 + A_2C);\; BA_3 = \overline{BC'}\cos\beta = a\cos^2\beta,$$
$$A_3A_2 = a - a(\cos^2\beta + \cos^2\gamma) = a(\sin^2\beta - \cos^2\gamma)$$
$$= 2r\sin\alpha(\sin^2\beta - \cos^2\gamma).$$
$$\sin^2\beta - \cos^2\gamma = \tfrac{1}{2}\{(1-\cos 2\beta) - (1+\cos 2\gamma)\}$$
$$= -\tfrac{1}{2}(\cos 2\beta + \cos 2\gamma)$$
$$= -\cos(\beta+\gamma)\cos(\beta-\gamma) = \cos\alpha\cos(\beta-\gamma);$$
$$A_3A_2 = 2r\sin\alpha\cos\alpha\cos(\beta-\gamma).$$

Trojúhelník A_2A_2F jest rovnoramenný, $A_3F = p$. Dle odst. 8. obdržíme vzdálenost f_1 bodu F od strany BC:

$$f_1^2 = p^2 - (\tfrac{1}{2}\overline{A_3A_2})^2 = r^2\{\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma + \cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma$$
$$- \sin^2\alpha\cos^2\alpha\cos^2(\beta-\gamma)\}.$$

Rozvedeme-li $\cos(\beta-\gamma)$, obdržíme snadnou transformací:

$$f_1^2 = r^2(\sin^2\alpha\sin\beta\sin\gamma - \cos^2\alpha\cos\beta\cos\gamma)^2, \text{ pročež}$$
$$f_1 = (\pm)\, r(\sin^2\alpha\sin\beta\sin\gamma - \cos^2\alpha\cos\beta\cos\gamma).$$

Jiný způsob odvození dává výsledek určitý, se znaménkem vrchním. Kyklickou záměnou obdrželi bychom vzdálenosti f_2, f_3. Jsou-li (x', y') pravoúhlé souřadnice bodu F, bude

$$-N_1(x', y') = f_1$$

a t. p. Dosaďme tyto hodnoty do rovnice T!

$$-r\,\Sigma(\sin^2\alpha\sin\beta\sin\gamma - \cos^2\alpha\cos\beta\cos\gamma)\sin(\beta-\gamma) =$$
$$-r\,\{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\,\Sigma[\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)]$$
$$-\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\,\Sigma[\cos\alpha\sin(\beta-\gamma)]\};$$
$$\Sigma\sin\alpha\sin(\beta-\gamma) = \Sigma\sin(\beta+\gamma)\sin(\beta-\gamma)$$
$$= \tfrac{1}{2}\Sigma(\cos 2\gamma - \cos 2\beta) = 0,$$
$$\Sigma\cos\alpha\sin(\beta-\gamma) = -\Sigma\cos(\beta+\gamma)\sin(\beta-\gamma)$$
$$= \tfrac{1}{2}\Sigma(\sin 2\gamma - \sin 2\beta) = 0.$$

Je tedy $T\ (x', y') = 0$, bod F leží na přímce (ML), přímce Tuckerově.

Podobným způsobem, jako odvozena rovnice přímky T, odvodí se také rovnice přímky Eulerovy, jež prochází středem **M** kruhu opsaného, těžištěm Q, orthickým středem H (průsečíkem výšek) trojúhelníku a středem S kružnice Feuerbachovy (čili kružnice *devíti*, vlastně *dvanácti* bodův).

Vzdálenosti bodu H od stran trojúhelníku jsou

$$h_1 = c \cos\beta \operatorname{cotg}\gamma = 2r \cos\beta \cos\gamma,$$
$$h_2 = 2r \cos\gamma \cos\alpha,\ h_3 = 2r \cos\alpha \cos\beta.$$

I bude rovnice přímky (MH):

$$E \equiv \begin{vmatrix} N_1 \cos\alpha & \dfrac{1}{\cos\alpha} \\ N_2 \cos\beta & \dfrac{1}{\cos\beta} \\ N_3 \cos\gamma & \dfrac{1}{\cos\gamma} \end{vmatrix} = 0.$$

Viděti odtud, že body M a H jsou *inversní* (příčky (AM, AH), (BM, BH), (CM, CH) jsou podvojně souměrné dle symmetrál úhlův α, β, γ — slují isogonálně sdružené).

$$E \equiv N_1 \left(\frac{\cos\beta}{\cos\gamma} - \frac{\cos\gamma}{\cos\beta}\right) + N_2 \left(\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\right)$$
$$+ N_3 \left(\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} - \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right) = 0 \text{ neb}$$

$$E \equiv N_1 \sin 2\alpha \sin(\beta - \gamma) + N_2 \sin 2\beta \sin(\gamma - \alpha)$$
$$+ N_3 \sin 2\gamma \sin(\alpha - \beta) = 0.$$

Že přímka prochází také těžištěm Q, snadno dokážeme, když dosadíme

$$|\,N_1\,| = \tfrac{1}{3} v_1 = \lambda \sin\beta \sin\gamma = \frac{\mu}{\sin\alpha},$$

$$|\,N_2\,| = \lambda \sin\gamma \sin\alpha = \frac{\mu}{\sin\beta},\ |\,N_3\,| = \lambda \sin\alpha \sin\beta = \frac{\mu}{\sin\gamma}.$$

Přímky Eulerova a Tuckerova protínají se v bodě M, středu kružnice, trojúhelníku opsané. Týmž bodem prochází ještě jiná význačná přímka trojúhelníku, o níž se zmiňuje

p. vládní rada V. Jeřábek v 2. čísle „Přílohy", roč. 1908—9 (Časop. č. m., roč. 38.), ve článku „Příspěvek k novější geometrii trojúhelníku" na str. 215. O této přímce v odst.

10. Sestrojíme-li k bodu Gergonneovu (srv. odst. 7.) bod *isotomicky* inversní, sluje tento bod *Nagelův*. Je to průsek příček, vedených z vrcholů trojúhelníku ku příslušným dotyčným bodům kružnic vnějších. Oběma bodům příslušejí dva body isogonálně inversní (příslušné příčky jsou isogonálně souměrné). Tyto inversní body G' a N' leží se středem **M** kruhu opsaného a se středem **m** kruhu trojúhelníku vepsaného na jedné přímce.

Rovnice této přímky (Mm) jest, poněvadž m má od stran rovné vzdálenosti:

$$\begin{vmatrix} N_1 & \cos\alpha & 1 \\ N_2 & \cos\beta & 1 \\ N_3 & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ čili}$$

$$J \equiv N_1 (\cos\beta - \cos\gamma) + N_2 (\cos\gamma - \cos\alpha) + N_3 (\cos\alpha - \cos\beta) = 0.$$

Vzdálenosti bodu Gergonneova od stran AB, AC trojúhelníku mají se k sobě jako vzdálenosti bodu J_1 od těchto stran; AJ_1 je příčka, jdoucí vrcholem A. Poněvadž $BJ_1 = s - b$ $= \sigma \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2} \ldots$ (σ = poloměr kruhu vepsaného), $J_1 C = s - c$ $= \sigma \operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2}$, budou vzdálenosti bodu J_1 od stran AB, AC:

$\sigma \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2} \sin\beta = 2\sigma \cos^2 \frac{\beta}{2}$, $2\sigma \cos^2 \frac{\gamma}{2}$, takže

$g_3 : g_2 = \cos^2 \frac{\beta}{2} : \cos^2 \frac{\gamma}{2}$, podobně $g_2 : g_1 = \cos^2 \frac{\alpha}{2} : \cos^2 \frac{\beta}{2}$, pročež

$$g_1 : g_2 : g_3 = \frac{1}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} : \frac{1}{\cos^2 \frac{\beta}{2}} : \frac{1}{\cos^2 \frac{\gamma}{2}},$$

kde g_1, g_2, g_3 jsou vzdálenosti bodu Gergonneova G od stran trojúhelníku. Pro inversní bod G' budeme tedy míti úměru

$$g'_1 : g'_2 : g'_3 = \cos^2 \frac{\alpha}{2} : \cos^2 \frac{\beta}{2} : \cos^2 \frac{\gamma}{2}$$

nebo

$$g'_1 : g'_2 : g'_3 = (1 + \cos\alpha) : (1 + \cos\beta) : (1 + \cos\gamma).$$

O bodu Nagelově N a jeho bodu inversním platí podobné úměry:

$$n_1 : n_2 : n_3 = \frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} : \frac{1}{\sin^2\frac{\beta}{2}} : \frac{1}{\sin^2\frac{\gamma}{2}}$$

$$n'_1 : n'_2 : n'_3 = (1 - \cos\alpha) : (1 - \cos\beta) : (1 - \cos\gamma).$$

Dosaďme do rovnice J za N_1, N_2, N_3 pro body G' a N, veličiny úměrné!

$$J(G') \ldots \Sigma(1 + \cos\alpha)(\cos\beta - \cos\gamma)$$
$$= \Sigma(\cos\beta - \cos\gamma) + \Sigma\cos\alpha\,(\cos\beta - \cos\gamma) = 0,$$
$$J\,(G') = 0.$$
$$J(N') \ldots \Sigma(\cos\beta - \cos\gamma) - \Sigma\cos\alpha\,(\cos\beta - \cos\gamma) = 0,$$
$$J\,(N') = 0.$$

Leží tedy body G' a N' na přímce $J\,(M, m)$. O těchto bodech G' a N' dokazuje p. vládní rada Jeřábek ve článku shora uvedeuém (na str. 210. a 211.), že G' je vnitřním bodem podobnosti kruhův (M, m), kdežto N' jich bodem podobnosti vnějším; proto obsahuje přímka (Mm) oba body G' a N'.

Všechny tři význačné přímky trojúhelníku: Tuckerova, Eulerova i přímka J. protínají se v jednom bodě, ve středu kružnice, trojúhelníku opsané.

Dodatek: Podobným způsobem jako rovnice přímek T, E, J lze odvoditi také rovnice přímek L_1, L_2, L_3 (srv. obr. 1.).

Bod B_1 má od stran BC, CA, AB vzdálenosti

$b\cos^2\gamma\sin\gamma = 2r\sin\beta\sin\gamma\cos^2\gamma$, 0, $b\sin^2\gamma\sin\alpha$ $= 2r\sin\alpha\sin\beta\sin^2\gamma$, tedy úměrné výrazům $\cos^2\gamma$, 0, $\sin\alpha\sin\gamma$.

Podobně bod C_1: $c\cos^2\beta\sin\beta = 2r\sin\beta\cos^2\beta\sin\gamma$, $c\sin^2\beta\sin\alpha = 2r\sin\alpha\sin^2\beta\sin\gamma$, 0, tudíž úměrné $\cos^2\beta$, $\sin\alpha\sin\beta$, 0. Je tedy rovnice přímky L_1

$$\begin{vmatrix} N_1 & \cos^2\beta & \cos^2\gamma \\ N_2 & \sin\alpha\sin\beta & 0 \\ N_3 & 0 & \sin\alpha\sin\gamma \end{vmatrix} = 0, \text{ čili}$$

$$L_1 \equiv N_1\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma - N_2\cos^2\beta\sin\gamma - N_3\sin\beta\cos^2\gamma = 0.$$

Kyklickou záměnou obdržíme rovnice přímek L_2 a L_3.