Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Václav Hlavatý

Promítání z přímky na rovinu v prostoru čtyřrozměrném

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 52 (1923), No. 3, 250--272

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121648

lations de ce groupe peut être facilement calculé, si l'on choisit deux à deux points singuliers distincts, et que l'on les permute. Les trois groupes de relations de Fuchs sont compris dans les formules (L), (L').

Le nombre complet de toutes ces relations indépendantes est donné par l'expression:

$$n^2 \, [\sigma^2 \, (\sigma - 1) - 4].$$

Promítání z přímky na rovinu v prostoru čtyřrozměrném.

Napsal Dr. *Václav Hlavatý.*

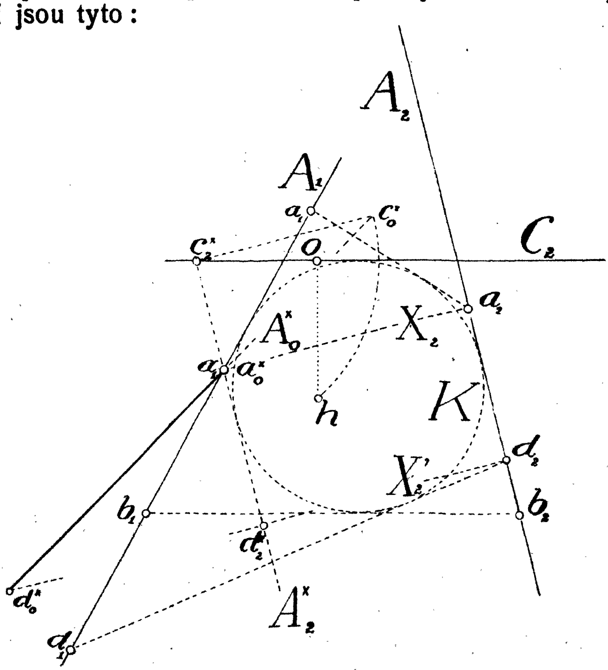
1. Pěti body, které neleží v témž trojrozměrném prostoru, je určen prostor čtyřrozměrný. Tři z nich určují rovinu π a dva zbývající přímku C, která π neprotíná. Je-li v tomto čtyřrozměrném prostoru dán bod a, tu rovina $\varphi \equiv (C\, a)$ protíná průmětnu π v bodě a_1, který nazývám prvým průmětem bodu a. Promítám-li tentýž bod a z úběžnice Γ roviny ξ, totálně kolmé ku π, tu rovina $(\Gamma\, a)$ protíná π v bodě a_2, který nazývám druhým průmětem bodu a. Jsou-li útvary C a π v prostoru pevně stanoveny, pak body a_1 resp. a_2 je bod a dokonale určen, neboť roviny $(C\, a_1) \equiv (C\, a) \equiv \varphi$ a $(\Gamma\, a_2) \equiv (\Gamma\, a) \equiv \xi$ protínají se v bodě a. Ježto lineární prostory nula až trojrozměrné určeny jsou jedním až čtyřmi body, jest tím úloha promítání útvarů v prostoru čtyřrozměrném z přímky C na rovinu π zásadně rozřešena.

2. Rovinu papíru považuji za průmětnu π, na kterou promítnu z přímky Γ přímku C. Ježto přímky C a Γ určují prostor*) $\mathfrak{E}$, je druhým průmětem přímky C opět přímka $C_2 \equiv (\mathfrak{E}\, \pi)$. Promítací paprsky všech bodů c přímky C jsou kolmé ku π a tvoří hyperbolický paraboloid, určený přímkami (C, C_2, Γ). Distance jednotlivých bodů a od průmětny π určeny jsou v prostoru délkami $d = cc_2$. Považuji-li osu do mimoběžek C a C_2 za osu z souřadného systému trojrozměrného prostoru, přímku C_2 za osu Y téhož systému, pak hyperbola $x^2 - y^2\, tg^2\, \alpha = d_0^2$ je geometrickým místem druhých koncových bodů úseček d, z bodů c_2 kolmo ku C_2 nanášených. Při tom α je úhel přímky C s průmětnou π. Budu vždy předpokládati $\alpha = 45$, tedy hyperbolu $x^2 - y^2 = d^2_0$. Nazývám ji hyperbolou distanční. Stanovím-li průsečík c přímky C s naším prostorem, je tím přímka C čtyřznačně určena. Neboť všechny přímky C, hovící shora zmíněným podmínkám (aby $\alpha = 45$, aby měly tutéž distanční hyperbolu H a aby jejich druhý průmět byl C_2), vyplňují v prostoru $(C_2\, \Gamma)$ rotační hyperbolod, který je proťat kolmicí v našem prostoru

*) Trojrozměrný prostor krátce nazývám prostorem.

$cc_2 \perp \pi$ ve dvou bodech. Zvolím-li výhodně přímku C (rovnoběžnou s naším prostorem), pak promítám v našem prostoru vlastně klinogonálně z úběžného bodu přímky C pod úhlem $\pm \frac{R}{2}$. Zvolím-li jeden ze směrů (oba promítají se do C_2), pak čtyřznačnost přímky C redukuji na dvojznačnost, která tomuto způsobu promítání není na závadu, neboť usuzujeme jenom na vzájemnou polohu útvarů z jejich průmětů a nikoliv na jejich absolutní polohu.

3. Budiž dán bod a svými průměty a_1 a_2 tab. 1.). Prostor $\mathfrak{A} \equiv (a\,\pi)$ protíná přímku C v bodě, jehož druhý průmět je průsečík přímek $\overline{a_1a_2}$ a C_2. Vzdálenost bodu a od průmětny π mohu tedy vyšetřovati stejně jako v prostoru trojrozměrném při promítání centrálném. (Centrum je zde bod $(\mathfrak{A}\,C)$.) — Je zřejmo, že mohu znázorniti všech ∞^4 bodů, neboť ku každé z ∞^2 poloh bodu a_1 mohu zvoliti ∞^2 poloh bodu a_2. — Zvláštní polohy bodu v tomto způsobu promítání jsou tyto:



Tab. 1.

α) $a_1 \equiv a_2$ mimo C_2. Pak roviny φ, ξ, π protínají se v bodě a, který jest v průmětně.

β) Bod a_2 leží na C_2. Pak rovina $\xi \equiv (a\,\Gamma)$ protíná C a určuje s ní prostor $(\xi\,C) \equiv (\Gamma\,C)$, který má stopu C_2 na π. Musí tedy i a_1 býti na C_2. Totéž dá se dokázati i obráceně: *Je-li jeden z průmětů bodu a na C_2, nalézá se na C_2 i zbývající průmět bodu a.*

γ) Je-li bod a na některém z promítacích paprsků $c c_2$ je $a_1 \equiv a_2$ na C_2.

4. Přímka A a přímka C (resp. Γ) určují prostor ($A C$) resp. ($A \Gamma$), který průmětnu protíná v přímce A_1 resp. A_2. *Průměty přímky jsou zaze přímky.* Promítací paprsky bodové řady ($a b_1$..) na A jsou površky druhé osnovy hyperboloidu, jehož površky prvé soustavy jsou C, A, A_1. Promítací paprsky $\overline{a a_2}$, $\overline{b b_2}$ tvoří hyperbolický paraboloid, určený přímkami Γ A A_2. Obě tělesa mají na přímce A společnou řadu A ($a b \ldots$). Je tedy řada A_1 (a_1 $b_1 \ldots$) projektivní ($\overline{\wedge}$) s řadou A_2 (a_2 $b_2 \ldots$) a *spojnice průmětů* $\overline{a_1 a_2}, \overline{b_1 b_2}, \ldots$ *jednotlivých bodů přímky A obalují kuželosečku K, dotýkající se přímek* A_1 A_2 *a* C_2 (neboť C_2 je spojnice bodů c_1 c_2, kde $c_1 = (A_1 C_1)$, $c_2 \equiv (A_2 C_2)$ dle odstavce 3.).

Přímka A (tab. 1.) je dána dvěma body a b. Ku prvnímu průmětu d_1 bodu d na A stanovíme d_2, jakožto průsečík tečny z bodu d_1 ke kuželosečce K (která jest dána pěti tečnami A_1 A_2 C_2 $\overline{a_1 a_2}$, $\overline{b_1 b_2}$) s přímkou A_2. Úběžný bod α přímky A promítá se do a_1: α_1 $\alpha_{2\infty} \parallel A_2$. — Ke každé z ∞^2 poloh přímek A_1 mohu zvoliti ∞^2 poloh přímek A_2. Třemi tečnami A_1 A_2 C_2 je určeno ∞^2 kuželoseček K, z nichž každá známým způsobem je určité přímce přiřazena. Mohu tedy znázornit všech ∞^6 přímek. Bodem a možno vésti ∞^3 přímek, neboť dvěma tečnami $\overline{a_1 a_2}$, C_2 je určeno ∞^3 kuželoseček K.

5. Zvláštní polohy přímky A: α) Přímka A protíná průmětnu π. Pak s ní určuje prostor $\mathfrak{A} \equiv (A \pi)$, který protíná C v bodě c. Nastává tudíž případ centrálné projekce z bodu c na π v prostoru $c \pi$. Kuželosečka K degeneruje ve svazek paprsků bodem c_2 na C_2.

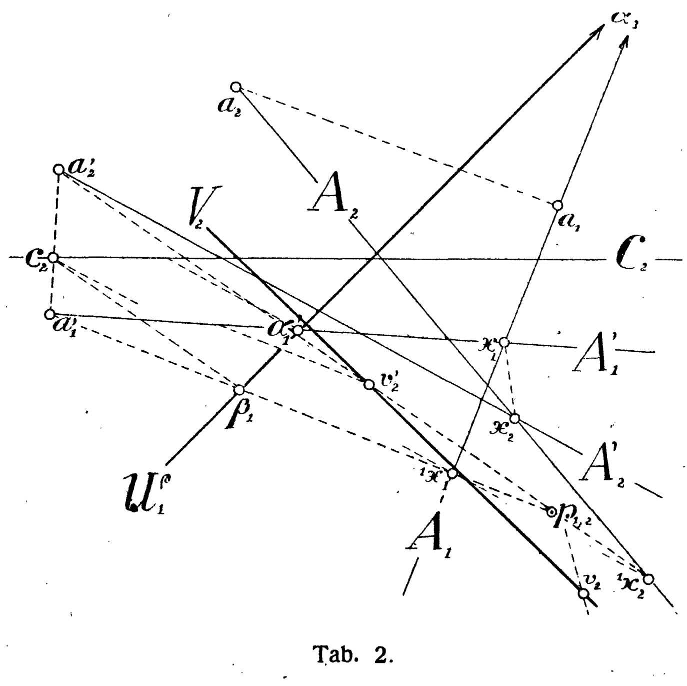
β) Přímka A protíná C nikoliv však π. Prvním průmětem A_1 přímky A je *bod*, průsečík roviny (A C) s π. Přímka A_2 bodem tím neprochází. Protíná-li A i rovinu π, pak A_2 jde *bodem* A_1. γ) $A_1 \equiv A_2$ avšak řady A_1 ($a_1 b_1 \ldots$) a A_2 (a_2 $b_2 \ldots$) se nestotožňují. Pak prostory $\mathfrak{A} \equiv (A\, C)$ a $\mathfrak{B} \equiv (A\, \Gamma)$ protínají se v rovině σ, která opět rovinu π protíná v ${}_1A_2$. Musí tedy i A průmětnu protínati v nějakém bodě ${}_1x_2$, který je druhým samodružným bodem projektivních řad $A_1 \overline{\wedge} A_2$. (Prvý je bod (${}_1A_2$ C_2).)

δ) Přímka leží v prostoru ($C \Gamma$). Pak $A_1 \equiv A_2 \equiv C_2$. Jednotlivé body d_1 d_2 na ní stanovím pomocí projektivních řad $A_1 \overline{\wedge} A_2$.

ε) Obdobné případy polohy přímky A a Γ v odstavci 20.

6. *Dvě přímky A a A' se protínají,* je-li spojnice $\overline{x_1 x_2}$ průsečíků (A_1 A'_1) a (A_2 A'_2) společnou tečnou kuželoseček K a K'. Je-li tento bod v nekonečnu, první průměty těchto přímek protínají se v α_1, druhé průměty jsou rovnoběžny. Jsou-li však druhé průměty různoběžné, tu obě přímky, vzájemně mimoběžné, jsou rovnoběžny s rovinou (C α_1).

7. *Pravou vzdálenost bodů ad* (tab. 1). přímky A stanovím takto: Bodem α_1 v π vedeme $A^* \parallel A$. ($A^*_1 \equiv \alpha_1$, neboť dle předcházejícího odstavce A^* protíná C v bodě c^*. $A^*_2 \parallel A_2$). Přímkami $X \parallel X'$ promítnu body a a d na A do a^* a d^* na A^*. ($X_1 \equiv X'_1 \equiv A_1$, $X_2 \equiv a_2 a^*_0$, $X'_2 \equiv d_2 d_2^* \parallel X_2$. Tím je případ ten převeden na trojrozměrný prostor ($c^* \pi$). Trojúhelník $c_2^* c^* a^*_0$ sklopím pomocí distance $\overline{c^* c^*_2} = \overline{c^*_2 h}$ (bod h je vrchol *rovnostranné* hyperboly distanční, proto $\overline{c^* c^*_2} = \overline{c^*_2 h}$) a získám A^*_0 ... atd... Z této konstrukce vyplývá jednak věta: „*Druhé průměty stejných délek na přímce jsou stejně dlouhé*“ jednak i *úhel* $\varphi = c^*_0 a^*_0 c^*_2$ jakožto úhel *přímky A s průmětnou.*



Tab. 2.

Všechny přímky A^* bodem c^* procházející, jichž prvé průměty leží na kružnici o středu c^*_2 a poloměru $r = c^*_2 c^*_0 \cotg \varphi$, svírají týž úhel φ. Existuje tedy celkem ∞^2 úběžníků α_1, jakožto prvních průmětů úběžných bodů, jimiž přímky A^* vedené svírají s π úhel φ. (a možno tedy bodem vésti ∞^2 takových přímek).

Dvě přímky A, B, *jichž* $A_1 \equiv B_1$ $A_2 \equiv B_2$ *se protínají.* Leží totiž obě jednak v prostoru $(A_1\, C) \equiv (B_1\, C)$, jednak v prostoru $(A_2\, \Gamma) \equiv (B_2\, \Gamma)$. Jenom dvě různoběžky, určující rovinu, mohou ležeti ve dvou prostorech, neboť rovinou možno proložiti ∞^1 prostorů — Čtvrtá společná tečna obou dotykových kuželoseček vede ku průmětům průsečíku.

8. Rovina ϱ (tab. 2.) je určena dvěma přímkami A a A' protínajícími se v bodě x. Úběžná přímka roviny ϱ je spojnice úběžných bodů $\alpha\alpha'$ přímek AA' a promítá se do úběžnice U_1^ϱ. Tato a přímka V_2 jsou jediné přímky,*) jimž příslušné kuželosečky K a K' jsou paraboly, neboť U_2^ϱ i V_1 padne do nekonečna. (V je průsečnice roviny ϱ s prostorem ($C\,U^\pi$), značí-li U^π úběžnou přímku průmětny. Obdržím ji jakožto spojnici bodů v_2, v'_2, jimž příslušné v_1, v_1, padnou do nekonečna.) Přímky U^ϱ_1 a V_2 jsou úběžnice polí ϱ_1 a ϱ_2 o nichž se dá snadno dokázat, že jsou obecně kollineárné. (Řada $A \barwedge A_1 \barwedge A_2$, $A' \barwedge A'_1 \barwedge A'_2$, tedy je pole ϱ kollineární ku ϱ_1 i ϱ_2, a ϱ_1 koll. ϱ_2.) Dle toho mohli bychom ku x_1 v ϱ_1 nalézti x_2 v ϱ_2. *Průsečík roviny* s π musí býti jeden ze samodružných bodů soustavy. Ostatní dva padnou do C_2 a jejich spojnice je přímka průsečná prostoru ($C\,I$) s rovinou ϱ.

Z mnoha jiných konstrukcí stanovení průsečíku p roviny ϱ s průmětnou uvádím tuto prostorovou: Libovolným bodem c na C a rovinou π určím prostor $\mathfrak{A}$, který ϱ protíná v přímce $\overline{a'\,{}^1x}$ (jež protíná ovšem průmětnu, a tedy v bodě p). Vedu bodem c_2 tečny ke kuželosečkám přímek A a A'. Ty stanoví body a' a ${}^1x$ na A' resp. A ($a'_1\,a'_2$ a ${}^1x_1\;{}^1x_2$ protínají se v c_2). Bod ${}_1p_2 \equiv \overline{a'_1\,{}^1x_1}\;\overline{a'_2\,{}^1x_2}$.

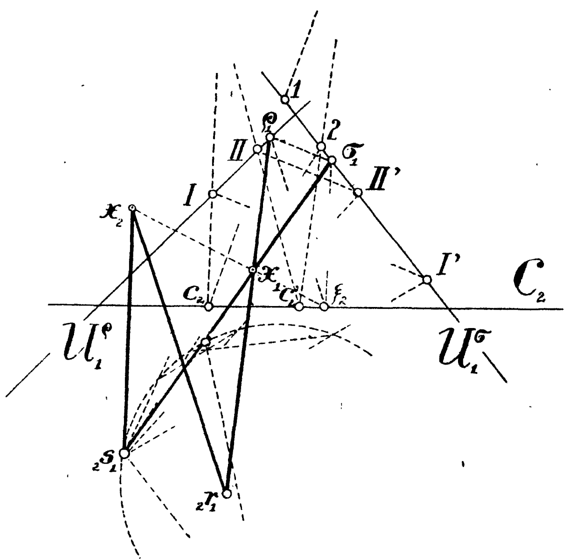
Je-li dána $\varrho \equiv p\,U^\varrho$, stanovím ku ${}^1x_1$ bod ${}^1x_2$ v ϱ_2 tak, aby x ležel v ϱ tímto způsobem: $\overline{{}^1x_1\,p_1}\,.\,U^\varrho_1 \equiv \beta_1$ je prvý průmět úběžného bodu přímky $\overline{{}^1x\,p}$. $\overline{{}^1x_2\,p_2}$ prochází bodem ${}_1p_2$ a je rovnoběžná s tečnou $\overline{\beta_1 c_2}$ paraboly přímky U^ϱ_1 z bodu β_1: Bodem c_2 procházejí všechny spojnice průmětů bodů přímky $\overline{{}^1x\,p}$ a tedy i $\overline{{}^1x\,{}^1x_2}$. ${}^1x_2 \equiv \overline{p_2\,.\,{}^1x_2}\,.\,\overline{c_2\,{}^1x_1}$. *O existenci průsečíku přímky M s rovinou* ϱ se přesvědčím, když ku $B_1 \equiv M_1$ stanovím (právě vytčeným způsobem) B_2 v ϱ_2. Hoví-li $B_1 \equiv M_1$, B_2 a M_2 podmínce pro různoběžky, průsečík existuje.

9. *Zvláštní polohy roviny*: α) *Parabola úběžnice degeneruje ve svazek paprskový bodem c_2 na C_2.* Tu rovina ϱ buď průmětnu protíná (a určuje s ní prostor $(\varrho\pi) \equiv (c\,\pi)$), nebo je sice polorovnoběžná s π, ale neurčuje s ní prostoru. Úběžná přímka protíná π v jediném společném bodě obou rovin. β) *Rovina ϱ promítá se do přímky ϱ_1.* Pak ϱ protíná C a prostor (ϱ C) protne π v ϱ_1. γ) *Prvním obrazem roviny ϱ je bod ϱ_1*: Rovina ϱ prochází přímkou C. Další případy v odstavci 20.

Dvě roviny rovnoběžné mají společnou úběžnou přímku a tedy i úběžnici a její parabolu. Přímka s rovinou rovnoběžná protíná ji na úběžné přímce. Spojnice $\alpha_1\,\alpha_{2\infty}$ průmětů jejího úběžného bodu je tečna paraboly úběžnice roviny. Úběžník této přímky je na úběžnici roviny.

*) v rovině ϱ

10. *Průsečík x dvou rovin* $(r\,U^{\varrho}) \equiv \varrho$ a $(s\,U^{\sigma}) \equiv \sigma$, (obr. 3.) kde r a s jsou stopníky, a $\overline{I c_2}$ $\overline{II c'_2}$ resp. $\overline{I c_2}$ a $\overline{2 c'_2}$ jsou tečny parabol přímek U^{ϱ}_1 U^{σ}_1. Najdu prostor $(\xi\,\pi)$, který protíná obě roviny v přímkách $\overline{s x}$ resp. $\overline{r x}$. Úběžnice roviny $(r s x)$ musí dle 9. α) býti $\varrho_1 \sigma_1 \parallel {}_1s_2\,{}_1r_2$ a její parabola degeneruje ve svazek paprsků bodem ξ_2. Svazky $(\overline{c_2 I}, \overline{c'_2 II} \ldots)$ a $(\overline{c_2 I}, \overline{c'_2 2})$ protínajíce se na C_2 jsou projektivné, a tedy i řady $(I, II \ldots)$ a $(I, 2, \ldots)$, jež jsou i podobné (neboť tečna z úběžného bodu přímky C_2 ku oběma parabolám, protne U^{ϱ}_1 U^{σ}_1 v odpovídajících si úběžných bodech) a tudíž spojnice $\overline{I I}$, $\overline{II 2}$, obalují parabolu. $\varrho_1 \sigma_1$ je tečna k ní rovnoběžná,



Tab. 3.

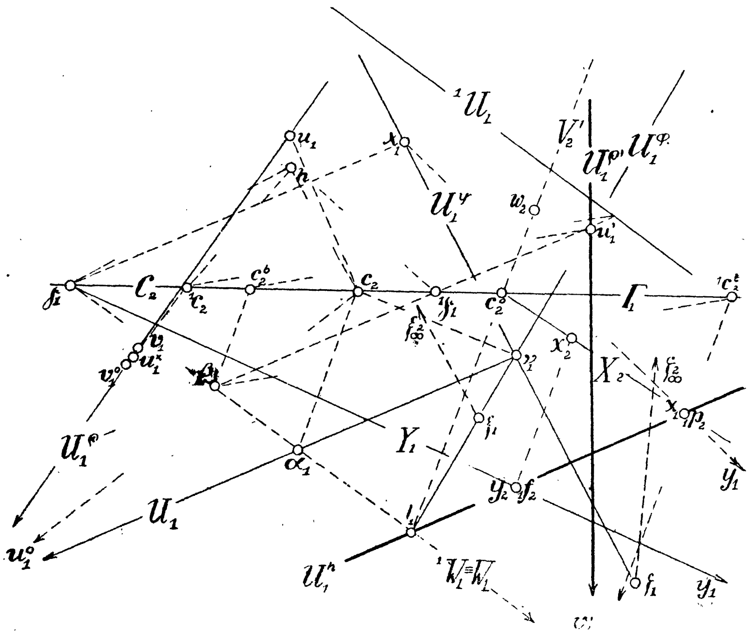
s $\overline{r s}$. Je to hledaná úběžnice. Tečny $\varrho_1\,\xi_2$ resp. $\sigma_1\,\xi_2$ ku příslušným parabolám jsou rovnoběžny s $\overline{r_2 x_2}$ resp. $\overline{s_2 x_2}$. Dle toho snadno přímky $\overline{s x}$ resp. $\overline{r x}$ nalezneme; průměty x_1 x_2 průsečíku x obou přímek a tedy i obou rovin musí ležeti v jedné přímce s ξ_2. (Bod x je v prostoru $(\xi\,\pi)$.)

Je-li jedna, (neb obě roviny ϱ a σ) s π polorovnoběžna, tato konstrukce je neproveditelná. Pro nedostatek místa nechci podávati řešení přímé. Ostatně transformací roviny π (odst. 28) mohu tento případ na předchozí uvésti.

Úběžnice U^{ϱ}_1 *a* U^{σ}_1 *dvou rovin polorovnoběžných protínají se v bodě* ζ_1, *který je prvý průmět průsečíku* ζ *obou úběžných* *přímek. Směr $\zeta_1\ \zeta_{2\infty}$ je tedy společnou tečnou (z bodu ζ_1) parabol přímek $U^{\varphi}{}_1$ a $U^{\sigma}{}_1$. Určují-li obě roviny prostor, pak spojnice jejich stopníků je rovnoběžná s poslední společnou tečnou obou parabol.* První část věty je samozřejma, druhá je dokázána v odst. 12.

Přímkou A mohu vésti jedinou rovinu polorovnoběžnou se dvěma obecně položenými rovinami. V úběžném prostoru mohu totiž ke dvěma úběžným mimoběžkám vésti jedinou příčku úběžným bodem α. (Konstrukce v odstavci 17.)

Z podobné úvahy plyne tvrzení: Ke čtyřem obecně položeným rovinám mohu vésti dvě roviny polorovnoběžné. (Konstrukce v odstavci 18.).



Tab. 4.

12. *Lineárný prostor trojrozměrný* $\mathfrak{A}$ je určen čtyřmi body. Jeho úběžná rovina určena je úběžnými body $\nu\ \xi\ \zeta$ tří přímek $N, X\ Z$ ze šesti, které dané body spojují. (Tab. 4.) Přímky $\overline{\zeta_1\ \nu_1} \equiv U_1{}^{\psi}$ a $\xi_1\ \nu_1 \equiv U^{\varphi}_1$ mohu považovati za úběžnice rovin φ a σ v prostoru $\mathfrak{A}$. Paraboly k nim příslušné určeny jsou tečnami C_2, $\overline{\nu_1\ c_2}$ a $U_1{}^{\varphi}\ \overline{\xi_1\ \xi_{2\infty}}$ resp. $U_1{}^{\varphi}\ \overline{\zeta_1\ \zeta_{2\infty}}$. *Stopu $\overline{p\,f}$ prostoru* $\mathfrak{A}$ *na* π stanovím jakožto spojnici stopníků p a f rovin ψ a φ. *Průsečík c^0 prostoru* $\mathfrak{A}$ *s přímkou* C najdu takto: Jedním bodem p na stopě vedu přímku X, aby protínala C. Je tedy ${}_2p_1 \equiv X_1$. X_2 prochází bodem ${}_1p_2$, potřebuji

znáti tedy druhý průmět x_2 jednoho bodu x na X. V rovině φ zvolím $x_1 \equiv {}_2p_1$ a stanovím příslušné x_2. (Pomocí tečny V'_2 z bodu l_1). $X_2 \equiv x_2 p_2$ a $(X_2 . C_2) \equiv c^0_2$. Přímky X_2 tedy ku stanovení c^0_2 nepotřebujeme: *Tečna z průsečíku l_1 stopy a úběžnice $U_1{}^\varphi$ libovolné roviny φ prostoru $\mathfrak{A}$ protne C_2 v druhém průmětu c^0_2 bodu $c^0_2 \equiv (\mathfrak{A}C)$.* Podobně stanovíme bod $\gamma \equiv (\mathfrak{A}\Gamma)$. Bod ten je úběžný průsečné přímky prostoru $\mathfrak{A}$ s rovinou ku π totálně kolmou. V odstavci 20. je dokázáno že $\Gamma_1 \equiv C_2$. Padne tedy γ_1 na $\Gamma_1 \equiv C_2$. Bodem f v π vedeme přímku Y, protínající Γ. I musí $Y_2 \equiv {}_1f_2$ (odst. 20.) býti druhým průmětem přímky Y, jímž však též přímka Y_1 prochází. Další její bod v rovině ψ stanovíme takto: $y_2 \equiv f_2$. Stanovíme tečnu $\overline{\gamma_1 \lambda_1} \parallel \overline{{}_1p_2 y_2}$ ku parabole přímky $U_1{}^\psi . {}_1p_2 \lambda_1 \equiv p_1 y_1$. Přímka $p\,y$ protíná průmětnu a její úbežník je λ_1. Musí tedy spojnice průmětů jejích bodů procházeti bodem γ_1. Proto $y_1 \equiv \gamma_1 y_2 . p_2 \lambda_1$, $y_1 f_1 \equiv Y_1$ a $(Y_1 \Gamma_1) \equiv \gamma_1$. Opět jsme přímky Y nepotřebovali, neboť tečna $\lambda_1 \gamma_1 \parallel {}_1p_2 {}_1f_2$ vytne γ_1. Ovšem že tečna ku parabole přímky $U_1{}^\varphi$,*) rovnoběžná s ${}_2p_1 {}_1f_2$ musí zase procházeti bodem γ_1, neboť průsečík $(\Gamma\mathfrak{A})$ je jediný. Přímka $\lambda_1 \gamma_1$ je tedy společnou tečnou všech parabol, patřících úběžnicím všech rovin v $\mathfrak{A}$: *Společná tečna všech parabol úběžnic rovin v $\mathfrak{A}$ protíná $\Gamma_1 \equiv C_2$ v prvém průmětu γ_1 bodu $\gamma \equiv (\mathfrak{A}\Gamma)$. Tato tečna je rovnoběžná se stopou prostoru $\mathfrak{A}$.* Tím je i druhá část věty odst. 10. dokázána. — Ku stanovení bodu γ_1 stačí tedy stanoviti průsečík tečny — rovnoběžné se stopou — k parabole libovolné úběžnice $U_1{}^\psi$ s přímkou Γ_1.

13. Nejjednodušší stanovení prostoru je takové: $\mathfrak{A} \equiv (c^0 \gamma p f)$ Máme tím dánu ihned úběžnou jeho rovinu μ. Neboť $\overline{p f} = U_1{}^h$ je úběžnice roviny $p f c^0$. Její parabola degeneruje v paprskový svazek bodem c^0 a rovina $\mu \equiv U^h \gamma$.

V odstavci 20. je dokázáno, že každá úběžnice bodem γ_1 má tu vlastnost, že její parabola degeneruje ve svazek rovnoběžných přímek a úběžnice $\gamma_1 \lambda_1 \parallel U_1{}^h$ představuje svoji degenerovanou parabolu.

Toho použijeme, máme-li k úběžníku v'_1 v prostoru $\mathfrak{A} \equiv (c^0 \gamma p f)$ nalézti směr $v'_1 v'_{2\infty}$. Úběžnice $\overline{\gamma_1 v_1'} \equiv W_1$ protíná hlavní úběžnici $U^h{}_1$ v bodě l_1 jemuž patří směr $l_1 c^0_2 \equiv V'_2$. I jest $v'_1 v'_{2\infty} \parallel V'_2$. Opakujeme-li touž konstrukci s bodem α_1, získáme střed c_2 paprskového svazku pro úběžnici $U_1 \parallel U_1{}^h$ roviny s π polorovnoběžné. — Libovolná rovina $(v_1' C)$ (v'_1 zvolme v průmětně) protíná prostor v přímce V', jejíž druhý průmět prochází bodem c^0_2. Stanovíme úběžný bod přímky V', je-li dáno $v'_1 \equiv V'_1$ a spojíme jej s c^0_2: *Geometrickým místem druhých průmětů bodů v v $\mathfrak{A}$, patřících kuv$'_1$ je přímka V'_2, spojující průsečík l_1 přímek $\gamma_1 v_1'$ a $U_1{}^h$ s bodem, c^0_2.* Obdobnou úvahou dospíváme k analogické větě: *První průměty*

*) která jest úběžnicí *libovolné* roviny φ v $\mathfrak{A}$.

w_1 bodů w v $\mathfrak{A}$, patřící ku w_2 tvoří přímku W_1, spojující bod γ_1 s průsečíkem l_1 přímek $c^0{}_2$ w_2 a $U_1{}^h$. Skutečně mohu tedy znázornit všech ∞^3 bodů v prostoru $\mathfrak{A}$.

14. Libovolná přímka $U_{1\varrho}{}'$ v π a C určují prostor, který má s $\mathfrak{A}$ společnou rovinu bodem $c_2{}^0$, procházející. Všechny přímky této roviny patří prostoru $\mathfrak{A}$ a jejich prvý průmět je $U_1{}^{\varrho'}$. Stanovím-li ku dvěma jejím bodům u'_1 a v'_1 příslušné U'_2 a V'_2 (U'_2 nerysováno), mohu tvrditi: *Ku prvému průmětu $A_1 \equiv U_1{}^{\varrho'}$ přímky A, v prostoru $\mathfrak{A}$ patří každá přímka A_2 v π, jen když bodům u'_1 a v'_1 na A_1 přiřadíme body $u'_2 \equiv (A_2\ U'_2)$ a $v'_2 \equiv (A_2\ V'_2)$.* (Na obrázku zvolená úběžná přímka roviny π za A_2.)

15. *Průsečík přímky U^φ s prostorem $\mathfrak{A} \equiv (c^0 \gamma\ U_1{}^h)$*†). V prostoru $\mathfrak{A}$ zvolím přímku $\dot{U}^0$ tak, aby $U^0{}_1 \equiv U^\varrho{}_1$, $U^0{}_2 \equiv U^\varphi{}_2$ (odstavec 14). Přímky U^0 a U^ϱ se protínají v hledaném bodě u^*. (Odstavec 7.) K bodům $u^0{}_1$ $v^0{}_1$ na $U^0{}_1 \equiv U^\varrho{}_1$ sestrojím dle předcházejícího odstavce $u^0{}_2$ $v^0{}_2$ na $U^0{}_2 = U^\varrho{}_2$. Čtvrtá společná tečna $u^*{}_1$ $c^*{}_2$ kuželoseček, příslušných přímkám U^0 U^ϱ, stanoví body $u^*{}_1$ $u^*{}_2$. (Bod $c^*{}_2$ neznačen, ježto padne téměř do ${}^1c_2$.)

16. *Průsečnice roviny ϱ s prostorem.* Stanovíme nejdříve úběžný bod u^* oné průsečnice, jako průsečík úběžné přímky roviny ϱ s úběžnou rovinou μ prostoru $\mathfrak{A}$. (Odst. 15.) Po té stanovíme jeden její bod, jako průsečík libovolné přímky s $\mathfrak{A}$. (Výhodno je vésti ji stopníkem roviny, pak konstrukce odstavce 15. se poněkud zjednoduší.)

17. Zvláštní polohy prostoru $\mathfrak{A}$: α) $\mathfrak{A} \equiv (A\ C)$. Pak prvý průmět celého prostoru $\mathfrak{A}_1 \equiv A_1$. Každá parabola, dotýkající se C_2 A_1 vede ku jedné úběžnici. β) $\mathfrak{A} \equiv (a\ \pi)$ Obyčejné promítání v trojdim. prostoru z bodu c na π. ($c_2 \equiv \overline{a_1\ a_2}$. C_2). γ) Přímka C je rovnoběžna s prostorem $(a\ \pi)$. Tento případ je projednán v odst. 2. *Dle konvence tam učiněné, je prostor $(a\,\pi) \parallel C$ považovaný za náš prostor.* — Všechny úlohy nemetrické v témž prostoru $\mathfrak{A}$ mohu řešiti cestou nepřímou tak, že prostor $\mathfrak{A}$ promítnu do našeho prostoru $\mathfrak{A}'$ z nějakého bodu c mimo oba prostory (nejlépe na C). Bod x prostoru $\mathfrak{A}$ promítnu do x' v našem prostoru takto: Stanovím průsečík $x' \equiv (X\mathfrak{A}')$ přímky $X \equiv \overline{c\,x}$ s $\mathfrak{A}'$. $X_1 \equiv x_1$ a $X_2 \equiv c_2\ x_2$. V našem prostoru spojnice $\overline{x_1'\ x_2'} \parallel C_2$. Tedy $x_1 \equiv x'_1$ a $(X_2 . \overline{x'_1\ x'_2}) \equiv x'_2$. (Obrázek neprovedu.) Mám-li promítnouti bod y' zpět do y, stanovím v $\mathfrak{A}$ přímku Y_2, příslušnou ku $y'_1 \equiv y_1$. Pak $y_2 \equiv Y_2 . c\,y'_2$. — Průsečná

†) Na obrázku 4. zvolena za U^ϱ úběžná přímka $u\,v$. ($u_1\, u_{2\infty} = u_1\ c_2$, $_2v_1v_{2\infty} \equiv v_1\ {}^1c_2$) Uvedená konstrukce však platí pro každou přímku.

rovina obou prostorů určena je stopou U_1^h (hlavní úběžnice prostoru $\mathfrak{A}$) a bodem z. (K libovolnému z_1 stanovím v $\mathfrak{A}$ Z_2 načež $z_2 \equiv \overline{Z_2 . z_1 z_2}$ když $z_1 z_2 \parallel C_2$.) — Výhodno je též znáti rovinu ϱ, která se promítá do π. Každý její bod x má tu vlastnost. že $x_1 \equiv x'_1$, též však $x'_1 \equiv x'_2$. To není jinak možno, než když $X_2 \equiv c_2 x_2$ prochází bodem x_1. Takový bod leží však v prostoru $(c\pi)$: *Průsečná rovina ϱ prostorů $(c\pi)$ a $\mathfrak{A}$ promítá se z bodu c do průmětny.* — Libovolnou rovinu $\varphi \equiv f\, U^\varphi$ promítnu do $\mathfrak{A}'$ nejsnáze tak, když stanovím přímku $P \equiv (\varphi\, \varrho)$, která se promítá do stopy roviny ϱ'. Jeden její bod je známý. Je to stopník f roviny φ. Promítnu ještě její úběžný bod a získám tak stopu roviny ϱ' na π.

Takovým způsobem mohu řešit úlohu: *V úběžném prostoru $\mathfrak{U}$ ke dvěma mimoběžkám U^φ a U^ψ vésti bodem u příčku U.* Za c_2 zvolíme $(u_1\, u_{2\infty} . C_2) \equiv c_2$. Pak u leží v prostoru $(c\pi)$. Úběžná rovina tohoto prostoru se promítá do π. Rovina $(u\, U^\varphi)$ nechť ji protíná v $\overline{u\varphi}$ a rovina $(u\, U^\psi)$ v $\overline{u\psi}$ (φ_1 a ψ_1 jsou průsečíky tečen z c_2 ku příslušným parabolám — s U_1^φ resp. U_1^ψ.) Jsou tedy přímky $u_1\, \varphi_1$ resp. $u_1\, \psi_1$ stopami rovin $(u\, U^\varphi)'$ a $(u\, U^\psi)'$. Promítneme z každé roviny po jednom z bodů x a y do x' a y' a vyšetříme v našem prostoru průsečnici U' rovin $(\varphi\, u\, x')$ a $(\psi\, u\, y')$, kterouž promítneme zpět do U.

18. *Průsečná rovina ϱ' dvou prostorů $\mathfrak{A}$ a ${}^1\mathfrak{A}$* (Tab. 4.) Obr. prostory jsou dány úběžnými rovinami $\mu \equiv (U\gamma)$ a ${}^1\mu \equiv ({}^1U\, {}^1\gamma)$. a dvěma libovolnými body. $(U i\, {}^1U$ protínají průmětnu; patří k nim středy c_2 resp. ${}^1c_2$.) Průsečnici jejich — úběžnou přímku $U^{\varrho'}$ roviny ϱ' — najdu jakožto spojnici $\overline{u'v'}$ bodů v' (průsečík úběžné přímky $W \equiv \overline{\gamma v'}$ v μ s ${}^2\mu$, je-li $\gamma_1 v'_1 \equiv W_1 \parallel {}^1U_1$) a u' (průsečík ${}^1\gamma_1\, \beta_1 \parallel U_1$ v ${}^1\mu$ s μ). Je-li W_1 úběžnicí v μ, pak příslušná k ní parabola degeneruje ve svazek paprsků rovnoběžných s $c_2\, \alpha_{2\infty}$. Je-li $W_1 \equiv {}^1W_1$ v ${}^1\mu_1$ pak (${}^1W \parallel {}^1U$) protíná ${}^1W$ průmětnu a střed svazku, patříc přímce ${}^1W_1$ je ${}^1c^b{}_2$, a tedy $v'_1 \equiv \overline{{}^1c_2{}^b\alpha_{2\infty} . {}^1W_1}$, ${}^1c_2{}^b v_1{}' . \equiv {}^1c_2{}^b v'_{2\infty}$ Podobně si počínáme s úběžnicí $\beta_1\, {}^1\gamma_1$, abychom dostali body $u_1\, u_{2\infty}$. Lehko mohli bychom nyní stanoviti úběžnou příčku P úběžným bodem u ku dvěma úběžným mimoběžkám. Pro stručnost se o řešení blíže nezmiňuji. — *Ke. čtyřem úběžným mimoběžkám vésti dvě příčky*: Dva hyperboloidy určené vždy třemi $(U^\gamma\, U^\varphi\, U^\psi)$ a $(U^\gamma\, U^\varphi\, U^\mu)$ ze čtyř mimoběžek, se protínají v hledaných příčkách. Na U^γ zvolíme body u a ${}^1u$. Vedeme jimi příčky U, a ${}^1U$ ku U^φ a U^ψ. Obrysová kuželosečka (odstavec 29.) hyperboloidu $(U^\gamma\, U^\varphi\, U^\psi)$ určena je přímkami $U_1\, {}^1U_1\, U^\gamma{}_1\, U^\varphi{}_1\, U^\psi{}_1$.— Totéž provedeme s mimoběžkami $(U^\gamma\, U^\varphi\, U^\mu)$· Oba obrysy mají společné tečny $U^\gamma{}_1$ a $U^\varphi{}_1$. Druhé dvě tečny $U_1{}^\xi\ U_1{}^n$ jsou prvé průměty hledaných příček.

19. Přímkou mohu vésti ∞^2 prostorů, rovinou pouze ∞^1. Přímkou neb rovinou mohu vésti jen tenkráte prostor $\mathfrak{A}$ || s prostorem $\mathfrak{B}$, je-li též přímka neb rovina s ním rovnoběžna. Tato tvrzení snadno se dokáží pomocí úběžných útvarů řečených veličin.

Tři obecně položené přímky mají jenom *jednu* příčku společnou. Je to průsečnice tří prostorů, vždy dvěma ze tří přímek určených. Mají-li příčky dvě, leží v témž trojrozměrném prostoru. Příček je pak ∞^1.

II.

20. Dá se dokázati, že průseky útvarů vzájemně kolmých — s úběžným prostorem $\mathfrak{U}$, jsou polárně sdruženy ke kouli, vzniklé průsekem sferického prostoru ($\sum_1^4 x_i^2 = c^2$) s úběžným prostorem. Budu proto takové úběžné útvary nazývati (polárně) sdruženými. — Každá přímka roviny ξ totálně kolmé ku π jest ke každé přímce této roviny kolmá. Úběžné přímky Γ a U^π obou rovin jsou poláry. Přímka Γ promítá se paraboloidem ($C_2 C\Gamma$) do $C_2 \equiv \Gamma_1$: *Úběžnice Γ_1 rovin ku π totálně kolmých jest $\Gamma_1 \equiv C_2$.* Dle odstavce 3. γ) druhé průměty jejích bodů nemohu stanoviti. *Γ je jediná úběžná přímka, k níž nemohu druhý průmět stanovit. Parabola, ku Γ_1 příslušná degeneruje v řadu ($\gamma_1, \gamma'_1 \ldots$) na Γ_1.* Druhý průmět přímky A, protínající Γ ($A \perp \pi$) jest průsečík A_2 rovin (ΓA) a π. Protíná-li A průmětnu, prochází A_1 bodem A_2. Prvý a druhý průmět přímky, protínající C, Γ a π, jest bod na $C_2 \equiv \Gamma_1$.

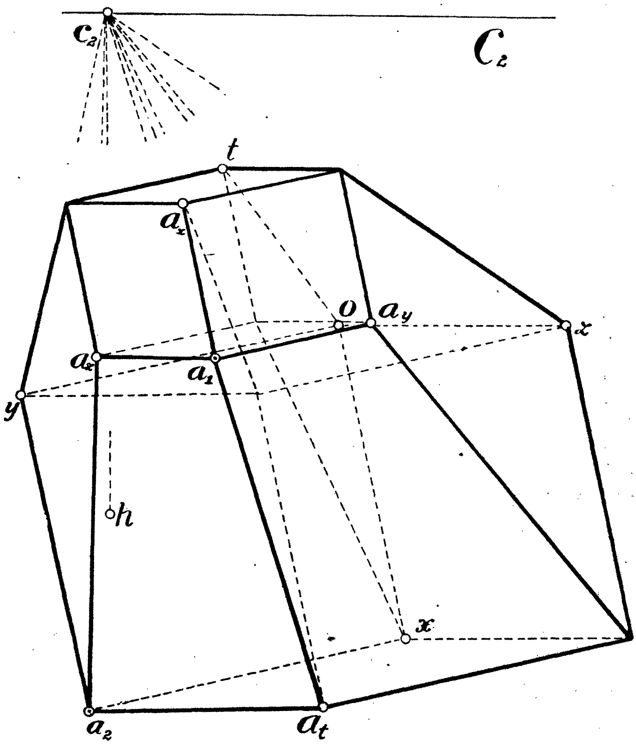
Průsečnice ϱ_2 roviny π a prostoru ($\Gamma \varrho$) (ϱ nechť protíná Γ v bodě γ a jest tudíž ku π polokolmá) jest druhým obrazem roviny ϱ. Proto parabola, příslušná její úběžnici U_1^ϱ — kteráž prochází bodem γ_1 — musí degenerovati ve svazek rovnoběžných paprsků s ϱ_2. Je-li $U_1^\varrho \parallel \varrho_2$, pak tento svazek degeneruje v přímku U_1^ϱ samu.

21. Involuce harmonických polů ($\gamma, {}^1\gamma \ldots$) na Γ promítá se z C do involuce ($\gamma_1 {}^1\gamma_1 \ldots$) úběžníků na Γ_1, které vedou ku vzájemně kolmým promítacím paprskům. Předpokládám-li $\widehat{\alpha} = \widehat{(C\pi)} = 45^0$, tudíž distanční hyperbolu rovnoosou, plyne již z představy paraboloidu ($C_2 C\Gamma$), že střed oné involuce je středem hyperboly, a jeden její pár je reálné zobrazení imaginárných vrcholů distanční hyperboly: *Reálný vrchol h distanční hyperboly jest bodem, z něhož se involuce ($\gamma_1 {}^1\gamma_1 \ldots$) sdružených úběžníků na Γ_1 promítá pravoúhlou involucí svazkovou.*

22. *Souřadnicové stanovení bodu a* ($\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}$)*) (Tab. 5.) Ze zvoleného počátku o na π naneseme na čtyři kolmice souřadnice $\bar{x}$ $\bar{y}$ $\bar{z}$ $\bar{t}$ bodu a do $ox = \bar{x}$, $oy = \bar{y}$, $oz = \bar{z}$, $ot = \bar{t}$. (o (xyz) jest náš prostor, a o (xy) v rovině π.) Protější body a_t a_x a_y a_z

*) Předpokládám $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = \bar{t}$.

k o v krychlích $o\,(x\,y\,z)$, $o\,(y\,z\,t)$ $o\,(z\,t\,x)$, $o\,(t\,x\,y)$ jsou kolmé průměty bodu a do čtyř prostorů, příslušnými krychlemi určených. Kolmice z a_t... k těmto prostorům, protínají se v prvním průmětu a_1 bodu a. Druhý průmět a_2 jest v protějším bodě ku o v $o\,(x\,y)$. Celý tento (pravidelný**) promítací 16. roh ovšem k naší konstrukci



Tab. 5.

nepotřebujeme. Stačí nalézti a_2, (který jest druhým průmětem roviny $(a_2\,\Gamma)$, totálně kolmé ku π, a tudíž i bodu a v rovině $(a_2\,\Gamma)$) a nanésti známým způsobem na $\overline{a_2\,a_z} \parallel \overline{o\,t}$, $\overline{a_2\,a_t} \parallel \overline{o\,z}$ $(a_2\,a_z \perp a_2\,a_t)$ délky $a_2\,a_z = o\,t = t$ resp. $a_2\,a_t = o\,z = z$, načež v protějším bodě k a_2 v rovnoběžníku $a_2\,a_t\,a_1\,a_z$ jest hledané a_1. (K vůli zřetelnosti potlačil jsem všude, vyjímaje a_1 a_2 průmětové indexy.)

23. *Prostor* $\mathfrak{A}$ *kolmý ku přímce* A určen jest úběžnou rovinou μ, polárnou k úběžníku u přímky A-a libovolným bodem v konečnu. K úběžnému polu u sestrojíme úběžnou rovinu polárnou takto: (Tab. 4.) Přímka $\overline{c\,u_1}$ v prostoru $(c\,\pi)$ je rovnoběžna s danou přímkou

A. K bodu u_1 v $(c\pi)$ je sdružena úběžnice U_1 (se středem c_2 paprskového svazku; stanovíme ji známým způsobem promítání trojdimensionálného, pomocí distance $cc_2 = c_2 h$). — Přímka kolmá ku prostoru $(c\pi)$ je kolmá i k cu_1. Taková přímka musí býti též kolma ku π a tedy její úběžník γ_1 padá do $\Gamma_1 \equiv C_2$; je však kolmá i ku paprsku cc_2, a γ_1 je proto sdruženým bodem ku $\gamma'_1 \equiv c_2$ ($\gamma_1 h \perp c_2 h$, $\gamma_1 h \,.\, \Gamma_1 \equiv \gamma_1$). Rovina μ určena je $\mu \equiv (U\gamma)$. — Hledáme-li ku rovině μ pol u, postupujeme cestou obrácenou: V μ_1 najdeme (odst. 12.) bod γ_1 a k němu sdružený $\gamma'_1 \equiv c_2$. Ku c_2 jako středu svazku najdeme v μ_1 úběžnici U_1 roviny polorovnoběžné s π (v prostoru $\mathfrak{A}$). Po té v prostoru $(c\pi)$ vyhledáme k U bod u: *„Polárná rovina μ v úběžném prostoru $\mathfrak{U}$ k polu u určena je úběžnou přímkou roviny kolmé ku přímce uc v prostoru $(c\pi)$ a harmonickým polem γ ku γ', který na Γ je vyťat paprskem cc_2.*

Libovolným bodem v konečnu a nalezenými útvary μ resp. u v $\mathfrak{U}$ je prostor $\mathfrak{A}$ resp. přímka A určena. Zároveň doplníme odstavec 12: *Úběžník γ_1 prostoru $\mathfrak{A}$ je obrazem úběžného bodu všech kolmic ku π v $\mathfrak{A}$.*

24. *V rovině ϱ najdu ku přímce A přímku $A^* \perp A$* (tab. 4.), když libovolný bod na ϱ spojím s harmonickým polem u^* k úběžnému bodu u přímky A. Bod $u^* \equiv (U^\varrho \mu)$. Stanovíme tedy (odstavec 15) průsečík u^* úběžné přímky U^ϱ roviny ϱ a polárné roviny μ k polu u.

25. *Úběžná přímka roviny ϱ' totálně kolmé ku rovině ϱ je polára $U^{\varrho'}$ přímce U^ϱ sdružená.* Sestrojím ke dvěma polům u a v ($u_1 u_{2\infty} \equiv u_1 c_2$, $v_1 v_2 \equiv v_1\, {}^1c_2$) úběžné přímky U^ϱ polárné roviny μ a ${}^1\mu \equiv ({}^1\gamma_1\, {}^1U_1)$ a stanovím (odstavec 18.) jejich průsečnici $U^{\varrho'} \equiv (\mu \,.\, {}^1\mu)$. — Je-li ϱ polorovnoběžná s π a určuje s ní prostor, pak úběžná přímka roviny ϱ' totálně kolmé ku ϱ je spojnice $U^\varrho \equiv \equiv u\gamma$, kde body $u\gamma$ mají stejný význam jako na obr. 4.

Ze spousty zajímavých úloh, kteréž možno pomocí těchto a podobných konstrukcí řešiti vyjímám k vůli stručnosti pouze jedinou: *Stanovení extremních úhlů α a β dvou rovin ϱ a σ obecně položených.* Roviny φ a ψ obou extremních úhlů jsou stereometricky kolmy ku ϱ a σ. Označíme-li $\varrho'_{\sigma'}$ roviny totálně ku ϱ_σ, pak úběžné přímky U^φ a U^ψ musí protínati čtyři mimoběžky $U^\varrho\ U^{\varrho'}\ U^\sigma\ U^{\sigma'}$. Takové dvě příčky $U^\varphi\ U^\psi$ jsou však opět polárami: *Roviny φ a σ obou extremních úhlů jsou totálně kolmé.*

Transformací roviny π (odst. 28.) mohu tuto úlohu převésti na znění: Stanoviti extremní úhly α a β, které svírá rovina ϱ s π. Čtyři po dvou sdružené poláry jsou zde $U^\varrho\ U^{\varrho'}\ \Gamma\ U^\pi$. Jejich společné dvě příčky $U^\varphi\ U^\psi$ jsou úběžné přímky hledaných rovin φ a ψ. Obě protínají U^π a tedy i π. Proto paraboly příslušné úběžnicím $U_1{}^\varphi\ U_1{}^\psi$ degenerují ve svazek paprskový.

Ježto obě roviny φ i ψ protínají Γ (a jsou tedy ku π polokolmé) řečené svazky sestávají ze dvou soustav rovnoběžných přímek. Oba svazky — mají-li hořením dvěma podmínkám hověti — spadají do U_1^φ resp. U_1^{ψ}, které jsou tedy společnými tečnami parabol přímek U_1^ϱ a $U_1^{\varrho'}$: *Úběžnice* U_1^φ *a* U_1^ψ *rovin* φ *a* ψ *extremních úhlů* α *a* β *roviny* ϱ *s* π *jsou společné tečny parabol, patřících přímkám* U_1^ϱ *a* $U_1^{\varrho'}$, *úběžnicím to rovin* ϱ *a* ϱ', *totálně kolmých.*

Dle hoření věty *vytínají* U_1^φ *a* U_1^ψ *na* $\dfrac{U_1^{\varrho'}}{U_1^\varrho}$ *průměty harmonických polů.*

Spojnice stopníku roviny ϱ s průsečíky přímek $\dfrac{U_1^\varphi}{U_1^\psi}$ a U_1^ϱ resp. $U_{1\infty}^{\pi}$ vedou ku prvým průmětům přímek, hledané úhly α a β svírajících. Další konstrukce neskýtá obtíží.

Zvláštní polohy rovin ϱ a σ: 1) Úběžnice U^ϱ U^σ se protínají a (mají-li ϱ a σ alespoň jeden společný bod v konečnu, což ve všech následujících případech předpokládám), leží tedy obě roviny v témž prostoru. $U^{\varrho'}$ $U^{\sigma'}$ se rovněž protínají (v úběžném bodě kolmice ku prostoru $(\varrho\sigma)$. Význam má jen příčka U^ψ v rovině $(U^\varrho U^\sigma)$. Pak $\alpha = O$, β libovolné (ϱ a σ v témž prostoru).

2. Přímky U^ϱ a $U^{\sigma'}$ (tedy též U^σ a $U^{\varrho'}$) se protínají. Příčka U^ψ spojuje dva poly $(U^\varrho U^{\sigma'})$ a $(U^\sigma U^{\varrho'})$. Úhel $\beta = 90$, $\alpha \neq O$. Roviny jsou polokolmy. Protínají-li se krom toho U^ϱ U^σ jsou ϱ a σ stereometricky kolmy $\alpha = 0$. (Polokolmy v témž prostoru.)

3. Ku polárám U^ϱ $U^{\varrho'}$ U^σ $U^{\sigma'}$ jsou možny tři příčky. Pak je jich ∞^1 a všechny vedou k úhlům $\alpha = \beta$.

4. $U^\varrho \equiv U^{\sigma'}$ $U^{\varrho'} \equiv U^\sigma$ je zvláštní případ příkladu předcházejícího. Všechny $\alpha = \beta = 90^0$. Roviny jsou totálně kolmy.

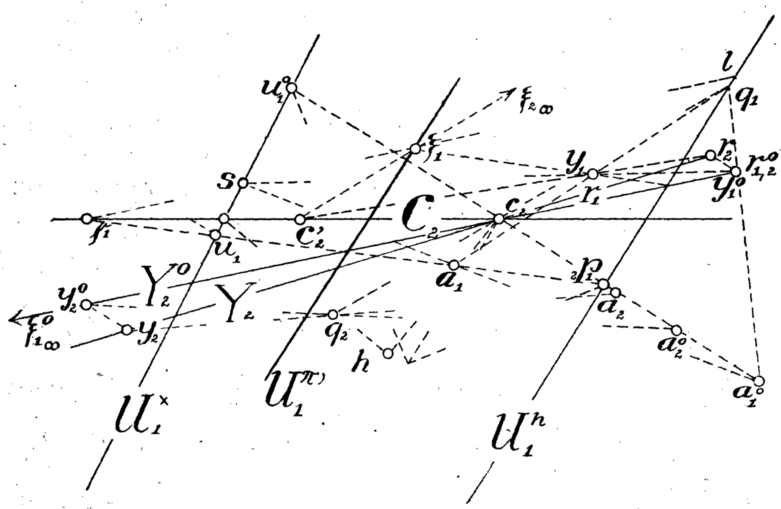
5. $U^\varrho \equiv U^\sigma$, $U^{\varrho'} \equiv U^{\sigma'}$ pak $\alpha = \beta = O$, $\varrho \equiv \sigma$.*)

27. *Otáčení prostoru.* Všechny úlohy v témž trojrozměrném prostoru $\mathfrak{A}$ mohu řešiti tak, že $\mathfrak{A}$ otočím do prostoru obsahujícího π, kde v obyčejném centrálném promítání je provedu a otočím zpět do $\mathfrak{A}$. Prostor $\mathfrak{A} \equiv (c\ \gamma\ U_1^h)$ otáčíme kol roviny $c\ U_1^h$ do prostoru $(c\pi) \equiv \mathfrak{A}^0$. (Tab. 6.) Bod y prostoru $\mathfrak{A}$ otáčí se v rovině kolmé totálně ku $(c U_1^h) \equiv \chi^*$. Její úběžnice je U^*_1. Průsečnice této roviny X^* s prostory $\mathfrak{A}$ resp. $\mathfrak{A}^0$ nechť jsou přímky o úběžných bodech u resp. u^0. (Parabola ku U^*_1 degeneruje ve svazek rovnoběžných paprsků s c_2 u_1^0. Bod u v $\mathfrak{A}$ na U^* najdu dle odstavce 15.) Zmíněné průsečnice protínají se na χ, neboť všechny body roviny χ, při otáčení zůstanou pevné. Z téhož důvodu přímka $\overline{ay}$ a otočená $\overline{a^0 y^0}$ protínají se v bodě q na χ. Ježto $U_1'^h \equiv \chi_1$ musí q_1 padnouti na U_1^h. Zároveň vzdálenost $a^0 p = \overline{ap}$. $(p \equiv \overline{au} \,.\, \overline{a^0 u^0}.)$ Ježto průsečnice $\overline{ua}$ $\overline{u^0 a^0}$ roviny $a U^*$, (resp. $\overline{yu}$ $\overline{y^0 u^0}$ roviny $\chi^* \equiv y\ U_1^*$) protínajíce se, svírají konstantní úhel, musí $a a^0 \parallel y y^0$ v rovinách

*) P. Schoute: Mehrdimensionale Geometrie. I. Theil, str. 72.

rovnoběžných. Tedy $a_1 a^0_1 . y_1 y^0_1$ protínají se v s na U_1^*. Roviny $(a\ U^*) \parallel (y\ U^*)$ jsouce polokolmé s π promítají se do přímek $a_2 a^0_2 \parallel y_2 y_2^0 \parallel c_2 u^0_1$: *Průměty $\mathfrak{A}^0_1$ a $\mathfrak{A}_1$ obou prostorů jsou perspektivně kollineární. Osa kollineace je U_1^h, střed kolineace s na U_1^*. Druhé průměty útvarů a resp. a^0 leží na přímkách rovnoběžných* s $c_2 u^0_1$.

Abychom dostali bod s naneseme na průsečnice $p u^0$ resp. $p u$ roviny $(p U^*)$ (p v průmětně) s oběma prostory délky $p a = p a^0$.



Tab. 6.

Spojnice $a^0_1 a_1$ protíná U_1^* v bodě s. K bodu y_1 najdeme y^0_1: $(a_1 y_1 . U_1^h) \equiv q_1$, $(s y_1 . a^0_1 q_1) \equiv y^0_1$. Druhý průmět $y^0_2 \equiv (c_2 y_1^0 . y_2 u^0_{2\infty})$. Tím jsme ovšem otočili i přímku $Y \equiv \mathfrak{A} . (y_1 C)$ do $Y^0 \equiv . \mathfrak{A}^0 (y_1^0 C)$. Je-li správně rýsováno, musí q_1 a q_2 býti s c_2 na jedné přímce.

Stopa roviny π', která se otáčí do π, musí býti U^h_1. Jeden její bod r, třeba na Y, stanovíme úvahou, že musí $r_1 \equiv y_1$, $r_1^0 \equiv r_2^0 \equiv$ $\equiv r_{1,2}^0 \equiv y^0_1$ a $r_2 \equiv r_{1,2}^0 u^0_{2\infty} . Y_2$. Jeden bod ξ její úběžné přímky $U^{\pi'}$ stanovíme přímo takto: Úběžnice $U^{\pi}_{1\infty}$ otáčí se do $U_1^{\pi'}$. Jeden její bod je $\xi_1{}^0_\infty \equiv \xi_2{}^0_\infty$. Ku $\xi_1{}^0_\infty$ stanovíme ξ_1. Dále pomocí γ_1 a U^h stanovíme $\xi_{2\infty} . (\gamma_1 \xi_1 . U^h_1 \equiv l$, $\xi_1 \xi_{2\infty} \parallel c_2 l$. Je zřejmé, že $U_1^{\pi'} \parallel U_1^h$.

28. *Transformace základních útvarů:*

Transformace přímky C do C' je snadná: Stanovím distanční hyperbolu přímky C' a pak každým bodem a proložím roviny $(C' a)$ resp. (Γa), které protínají průmětnu v bodech $a'_1 \neq a_1$, $a'_2 \equiv a_2$.

*Transformace průmětny**) do obecně položené roviny ϱ. Stanovíme nejdříve rovinu ϱ' ku ϱ totálně kolmou. Její úběžnou přímku $U^{\varrho'}$ musím pokládati za přímku Γ nové soustavy. (Kromě obyčejných indexů průmětových zavádím zde tyto další: Průměty z přímky $\frac{C}{\Gamma}$ do π značím indexem π v pravo nahoře. Průměty z $\frac{C}{U^{\varrho'}}$ do ϱ indexy $\frac{1}{2}$ v levo nahoře a indexem ϱ v pravo nahoře.) „Prvý" průmět (${}^1a^\varrho_1$, ${}^1a^\varrho_2$) a „druhý" průmět (${}^2a^\varrho_1$, ${}^2a^\varrho_2$) nějakého bodu a v rovině σ stanovím jako průsečík roviny $(C a)$ resp. $(U^{\varrho'} a)$ s ϱ. (Při čemž ${}^1a^\varrho_1 \equiv a_1^\pi$). K bodu ${}^1a^\varrho_1 \equiv a^\pi_1$ najdu (odst. 8.) v ϱ_2 bod ${}^1a^\varrho_2$. To opakuji se všemi body roviny σ. Po té pomocí kollineárného vztahu mezi ${}^1\sigma^\varrho$ a σ_1^π najdu σ_1^ϱ (Pravou podobu pole ${}^1\sigma^\varrho$ v nové transformované soustavě.) Následkem zmíněného vztahu kollineárného mohu přímo (odst. 8.) přejíti od pole ${}^1\sigma_1^\varrho \equiv \sigma_1^\pi$ ku σ_1^ϱ, aniž stanovuji celé ${}^1\sigma_2^\varrho$. Podobně od σ_2^π mohu přímo přejíti ku σ_2^ϱ (Pravé podobě pole ${}^2\sigma^\varrho$ v nové soustavě.) Promítám-li totiž dvě přímé řady bodové A a B v σ z přímky $\frac{\Gamma}{U^{\varrho'}}$ do $\frac{\pi}{\varrho}$, obdržím $\frac{A^\pi_2 \barwedge A,\ B^\pi_2 \barwedge B}{{}^2A^\varrho \barwedge A,\ {}^2B^\varrho \barwedge B}$. Promítnu-li pak řady ${}^2A^\varrho$ ${}^2B^\varrho$ z Γ do π obdržím ${}^2A^\varrho_2 \barwedge {}^2A^\varrho$, ${}^2B^\varrho_2 \barwedge {}^2B^\varrho$. Jest tedy $\left\{\begin{array}{l} A^\pi_2 \barwedge A \barwedge {}^2A^\varrho \barwedge {}^2A^\varrho_2 \\ B^\pi_2 \barwedge B \barwedge {}^2B^\varrho \barwedge {}^2B^\varrho_2 \end{array}\right.$ a tudíž i $\frac{A^\pi_2 \barwedge {}^2A^\varrho_2}{B^\pi_2 \barwedge {}^2B^\varrho_2}$. Ježto řady ${}^2A^\varrho$ resp. ${}^2B^\varrho$ jsou stejné s řadami A^ϱ_2 resp. B^ϱ_2 platí $\frac{A^\pi_2 \barwedge A^\varrho_2}{B^\pi_2 \barwedge B^\varrho_2}$ čili *pole σ^π_2 a σ^ϱ_2 jsou kollineárná.* Stanovím tedy čtyři body v poli ${}^2\sigma^\varrho$ (${}^2a^\varrho_1$, ${}^2a^\varrho_2, \dots$) odvodím je do σ^ϱ_2 (do bodů $a^\varrho_2, \dots$). Čtyři body ($a^\varrho_2 \dots$) pole σ^ϱ_2 a příslušné k nim body ($a^\pi_2 \dots$) pole σ^π_2 určují vztah obou polí, pomocí něhož přímo z jednoho pole do druhého mohu přecházeti. — (Při konstrukci 4 bodů (${}^2a^\varrho_1$, ${}^2a^\varrho_2 \dots$) z příslušných [$(a^\pi_2\ a^\pi_1) \dots$] s výhodou mohu použíti toho, že pole σ^π_2 a ${}^2\sigma^\varrho_2$ nejen, že jsou kollineární, ale i soumístně affinní, neboť úběžnice obou soustav spadají do U^π. Středem a zároveň jediným bodem samodružným v konečnu je bod ${}^2x^\varrho_2 \equiv x^\pi_2$, značí-li x průsečík rovin ϱ a σ.)

Abych mohl v transformované soustavě prováděti konstrukce, musím znáti C^ϱ_2 a příslušnou distanční hyperbolu. Přímku C^ϱ_2 obdržím z ${}^2C^\varrho$, jejíž prvý průmět ${}^2C^\varrho_1$ stotožňuje se s průmětem $U^{\varrho'}_1$. Ku ${}^2C^\varrho_1$ najdu v ϱ_2 příslušný průmět ${}^2C^\varrho_2$. Jedná-li se jen o polohu přímky C^ϱ_2, mohu ku transformaci použíti přímky $A \equiv \sigma . (C\, U^{\varrho'})$ jejíž ${}^2A^\varrho \equiv {}^2C^\varrho$. (a tedy ${}^2A^\varrho_1 \equiv {}^2C^\varrho_1$, ${}^2A^\varrho_2 \equiv {}^2C^\varrho_2$, nikoliv však řady bodové na nich)). Pak $A^\varrho_2 \equiv C^\varrho_2$ stanovím pomocí polí σ^π_2 a σ^ϱ_2. Chci-li však transformovati řadu ${}^2C^\varrho$ (${}^2c^\varrho \dots$) do řady ($c_2^\varrho \dots$)

*) t. j. v zásadě transformace přímky Γ.

na C^ϱ_2, smím použíti jen vztahů kollineace polí $\varrho\ \varrho_1\ \varrho_2$. Distance d nové hyperboly distanční jsou $d = \overline{c\,{}^2c^\varrho}$. (Tečna T ke kuželosečce, příslušné přímce ${}^2C^\varrho$ je $T \equiv \overline{{}^2c^\varrho_2\ {}^2c^\varrho_1}$ a protne C^π_2 v bodě c^π_2.)

III.

29. *Kuželosečka K* v rovině ϱ *promítá se* z C resp. Γ *do kuželoseček K_1 resp. K_2*. Důkaz pomocí průmětů nějaké přímky v ϱ je snadný. *Obrysy ${}^CO_1$ resp. ${}^\Gamma O_2$ kvadratické plochy K z přímek C a Γ jsou kuželosečky.* Neboť prostor $\mathfrak{K}$ plochy K protíná přímku C resp. Γ v bodě ${}^cp$ resp. ${}^\Gamma p$, k němuž rovina polárná ku K protíná plochu v kuželosečce ${}^CO$ resp. ${}^\Gamma O$. Tečna ${}^cT$ resp. ${}^\Gamma T$ v bodě. kuželosečky ${}^ct$ resp. ${}^\Gamma t$ a bod ${}^cp$ resp. ${}^\Gamma p$ určují rovinu ku K tečnou. Prostor $(C\,{}^cT)$ resp. $(\Gamma\,{}^\Gamma T)$ dotýká se K v bodě ${}^ct$ resp. ${}^\Gamma t$. Postupuje-li ${}^ct$ resp. ${}^\Gamma t$ po ${}^cO$ resp. ${}^\Gamma O$ obalují tyto prostory plochu K podél ${}^cO$ resp. ${}^\Gamma O$. (Každý takový prostor má však jen tři splývající body s K společné) která se promítá do ${}^cO_1$ ${}^\Gamma O_2$ — kuželoseček. Oba obrysy můžeme stanoviti konstrukcemi, známými z promítání centrálného neb orthogálného.

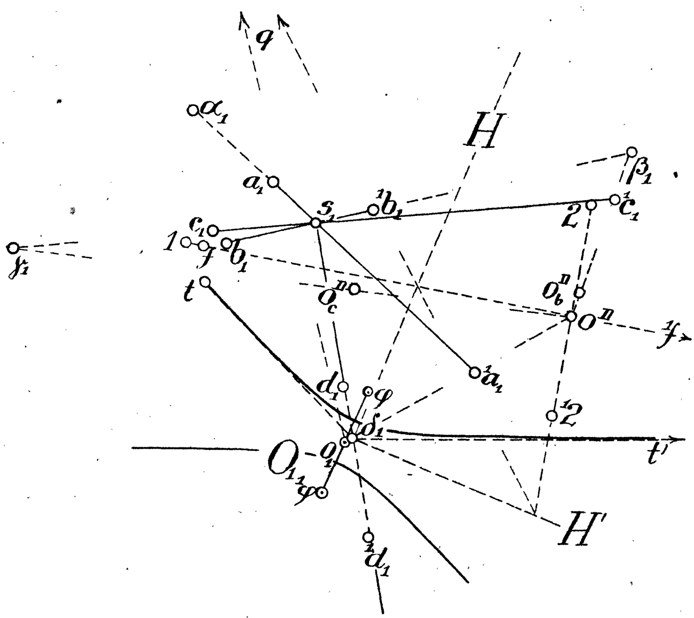
30. *Obrys kvadratické variety* $\mathfrak{M}$.*) Jednoduchým počtem dá se dokázati, že ku přímce P útvar polárně sdružený ku $\mathfrak{M}$ je rovina π. (Polárnými útvary ku $\mathfrak{M}$ nazývám takové, kterým odpovídají stejné operace mathematické, jako polárným útvarům ku ploše v trojrozměrném prostoru.) Prochází-li $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{pol } p}{\text{prostor } \mathfrak{P}}$ $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{přímkou } P}{\text{rovinou } \pi}$, tu polárný $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{prostor } \mathfrak{P}}{\text{bod } p}$ prochází $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{rovinou } \pi}{\text{přímkou } P}$ sdruženou ku $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{přímce } P}{\text{rovině } \pi}$. Polárně sdružené prostory π $(\mathfrak{P}\ldots)$ k řadě bodové P $(p\ldots)$**) protínají se v rovině π, která varietu protíná v kuželosečce O. Prostor $\mathfrak{P}$ protíná P v bodě p' a $\mathfrak{M}$ v ploše M. Rovina π je v $\mathfrak{P}$ polárně sdružená ku p' vzhledem k M. Je tedy kuželosečka O obrysovou kuželosečkou plochy M. Probíhá-li p přímku P, zůstává π pevná, plochy M však probíhají (současně s p') varietu $\mathfrak{M}$. — Tato kuželosečka O jest geometrickým místem dotyčných bodů lineárných prostorů přímkou P ku $\mathfrak{M}$ položených. (Je jich ∞^1.) Neboť tečny T v bodech t kuželosečky O určují prostory $(P\,T)$, které mají s varietou čtyři splývající reálné body společné. Dva ve směru T, tři v rovině $(P\,t)$. Ježto počítáme bod t dvakráte, jsou skutečně jen čtyři společné body splývající v t. — Můžeme tedy ve známém smyslu nazývati O kuželosečkou obrysovou: *Obrysem variety $\mathfrak{M}$ je prvý průmět O_1 průsečné kuželosečky O roviny π***) — polárně sdružené ku P*) — a variety $\mathfrak{M}$.*

*) Varietou $\mathfrak{M}$ nazývám kvadratický prostor, jehož rovnice v souřadnicích homogenních je $\Sigma\, x_i\, x_k = O$ $(i,\ k = 1,\ldots 5)$.

**) V této úvaze přímku C z dřívějška nazývám P.

***) neznačí průmětnu.

Budiž dána kvadratická varieta $\mathfrak{M}$ čtyřmi sdruženými průměry $a\,{}^1a$, $b\,{}^1b$, $c\,{}^1c$, $d\,{}^1d$. (Tab. 7.) Prostor $s\,(\alpha\,\beta\,\gamma)$ polárně sdružený ku δ vzhledem ku $\mathfrak{M}$ ($\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1\,\delta_1$ jsou úběžníky) protíná varietu v ploše $s\,(a\,b\,c)$, jejíž obrys má s obrysem O_1 dvojnásobný společný dotyk. Neboť obrysová kuželosečka plochy $s\,(a\,b\,c)$ protíná O ve dvou bodech*) průsečné přímky rovin obou kuželoseček



Tab. 7.

(které určují prostor polárný ku bodu $[C\,.\,s\,(\alpha\,\beta\,\gamma)]$). — Spojnice bodu δ se všemi body plochy $s\,(a\,b\,c)$ dotýkají se variety v bodech této plochy. (Důkaz: Každá kuželosečka $s\,(b\,c)$ v $s\,(a\,b\,c)$ je zároveň v prostoru $s\,(\beta\,\gamma\,\delta)$ v polárné rovině $s\,(\beta\,\gamma)$ ku δ vzhledem ku ploše $s\,(b\,c\,d)$). Musí tedy přímky $\delta_1 t$ $\delta_1 t'$ dotýkati se obrysu variety i plochy $s\,(a\,b\,c)$ a tudíž v bodech společného dotyku obou kuželoseček. Z toho plyne, že ke konstrukci os obrysu O_1 mohu použíti známé věty: „Osy kuželoseček o společném dvojnásobném dotyku obalují parabolu.“ Sestrojíme známým způsobem (třeba dle této věty) obrys plochy $s\,(a\,b\,c)$, určený osami $\overline{O^D 1}$, $\overline{O^D 2}$. Svrchu zmíněná parabola musí míti $\delta_1 O^D$ za řídící přímku. Analogicky musí se nalézati střed o_1 i na $\gamma_1 O^C$, kde O^C je střed obrysu plochy $s\,(a\,b\,d)$. (O^C nerýsováno). Jsou-li středy kuželoseček $s_1\,(a_1\,b_1)$

*) Ježto patří téže varietě. Obecně však dvě kuželosečky téže variety se neprotínají.

$s_1 (a_1 c_1)\, o_c^D$ resp. o_b^D obdržím $O^D \equiv \overline{\gamma_1\, o_c^D} . \overline{\beta\, o_b^D}$.) Musí býti tedy v jejich průsečíku $o_1 \equiv \overline{\delta_1 O^D} . \overline{\gamma_1 O^c}$. Pomocí ohniska q paraboly svrchu zmíněné sestrojím osy a ohniska $\varphi\ {}^1\varphi$ obrysu, načež pomocí tečny $\delta_1 t$ (nebo $\delta_1 t'$) osy omezím.

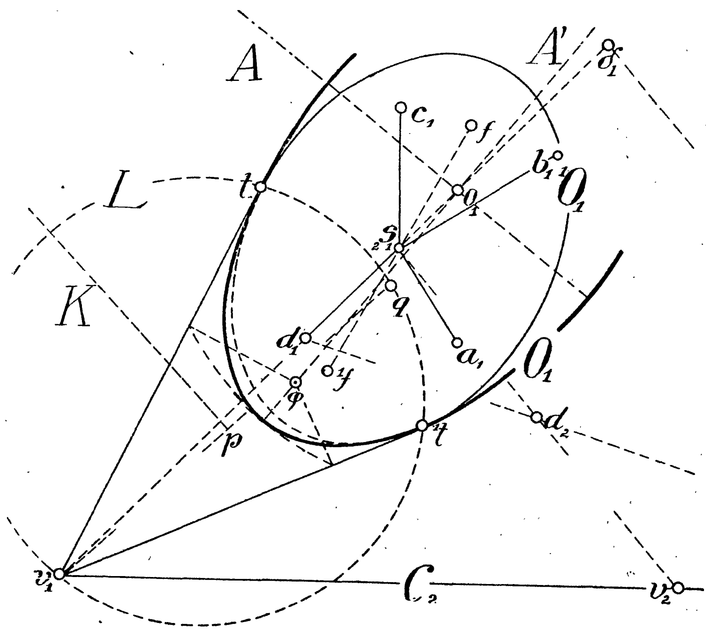
K obrysu O_1 dospěji též cestou úvahy prostorové. Označme U^π úběžnou přímku průmětny π. Všechny útvary v prostoru $(CU^\pi) \equiv \mathfrak{P} \parallel \pi$ promítají se do $U^\pi_{1\infty}$. Rovinou ϱ v $\mathfrak{P}$ proložme prostor $\mathfrak{R}$, který seče C v bodě $s \equiv (\varrho\, C)$. Jeho polární rovina σ v ploše $Q \equiv (\mathfrak{R}\, \mathfrak{M})$ protíná ϱ v přímce $S \equiv (\varrho\sigma)$, kteráž je polárou ku polu s kuželosečky $K \equiv (\varrho \mathfrak{M})$. Útvary $K s$ a tedy i S jsou pevné pro všechny prostory $\mathfrak{R}$ rovinou ϱ. Jejich plochy protínají se v K, a obrysové kuželosečky – v rovinách σ, přímkou S procházejících, – protínají se právě v průsečících SK. Ježto S leží v ϱ a tedy i v $\mathfrak{P}$, první průměty všech obrysových kuželoseček ploch $(\mathfrak{R}\, \mathfrak{M}) \equiv Q$ jsou kuželosečky homothetické. — Dříve jsem dokázal, že obrys plochy *s (a b c)* se dvojnásob dotýká O_1. Toto tvrzení dá se rozšířiti lehce na každou plochu variety a tedy i na plochy Q. Mohu tedy na základě známé věty*) uvésti toto: *Všechny prostory* $\mathfrak{R}$, *proložené rovinou* ϱ, *kteráž se nalézá v* $(C\, U^\pi) \equiv \mathfrak{P} \parallel \pi$, *protínají varietu v plochách, jichž obrysy jsou homothetické kuželosečky, dvojnásob obrysu variety se dotýkající. Jejich ohniska vyplňují tedy dvě kuželosečky E, F s obrysem* O_1 *konfokální.*

Je-li rovina ϱ úběžnou rovinou prostoru $\mathfrak{P}$ změní se tato věta: *Průsečné plochy rovnoběžných prostorů* $\mathfrak{R}$ *s varietou jsou homothetické. Jsou-li tyto prostory rovnoběžny s prostorem, určeným přímkami* $(U^\pi C)$, *pak obrysy jejich průsečných ploch jsou homothetické kuželosečky, vyplňující svými ohnisky dvě kuželosečky, s obrysem variety konfokální.*

Prvé věty užijeme u variety $\mathfrak{M}$ (tab. 7). Nejdříve stanovíme střed o_1 obrysu O_1. Rovina w kuželosečky O (polárně sdružená ku C vzhledem k $\mathfrak{M}$) protíná prostor $\mathfrak{P} \parallel \pi$ v přímce S. Pól o přímky S ke kuželosečce O je polem prostoru $(C S) \equiv \mathfrak{P}$. Ježto $S_1 \equiv U^\pi_{1\infty}$ je o_1 středem kuželosečky O_1. Obdržíme jej v průsečíku dvou prvých průmětů přímek X^d a X^a, polárně sdružených ku rovinám $\xi^d\ \xi^a$ v $\mathfrak{P}$. Zvolme $\xi^d \equiv s\, (\alpha \beta \gamma) . \mathfrak{P}$. Přímka X^d je rovnoběžná s $s\delta$ (neboť ξ^d leží v $s\, (\alpha\, \beta\, \gamma)$ sdruženém ku δ) a prochází polem p roviny ξ^d v ploše *s (abc)*. Bod $p_1 \equiv O^d$ je středem obrysu plochy *s (a b c)*. Neboť značím-li $s = (\xi^d . C)$, pak polárná rovina σ k s v $s\, (a\, b\, c)$ protíná ξ^d v přímce P, k níž patří pol p vzhledem k obrysové kuželosečce plochy $s\ (a\ b\ c)$ v σ. Bod p je tedy polem roviny ξ^d a ježto $P_1 \equiv U^\pi_{1\infty}$ je $p_1 \equiv O^D$ středem obrysu plochy *s (a b c)*. Proto $X_1^d \equiv \overline{\delta_1 O^D}$ a podobně $X_1^a \equiv \alpha_1 O^A$, ($X_1^a$ ani

*) Ohniska homothetických kuželoseček o dvojnásobném dotyku s O_1 vyplňují dvě kuželosečky E, F s kuželosečkou O_1 konfokální.

O^A nerysováno) a $o_1 \equiv \delta_1 O^D . \alpha_1 O^A$. Nyní stanovím ohniska $\varphi . {}^1\varphi$ kuželosečky E (a obrysu O_1). Prostory $\mathfrak{R}$ prokládám rovinou ξ^d. Pak je spojnice $f\, {}^1f$ ohnisek obrysu plochy $s\,(a\,b\,c)$ tětivou kuželosečky E. Sdružený průměr k ní musí procházeti bodem O^D a být nositelem středů obrysů průsečných ploch variety s prostory $\mathfrak{R}$. Oběma podmínkám hoví $X_1^d \equiv \overline{\delta_1 O^D}$. Průsečíky přímky X s $\mathfrak{M}$ — jsou-li reálné — určují s ξ^d dva prostory tečné reálné, (jinak prostory ty jsou imaginárné). Průsečíky ty musí se promítati do ome-



Tab. 8.

zujících bodů průměru sdruženého ku $f\,{}^1f$. Jsou to samodružné body involuce sdružených polů na X^d, jejíž jeden pár je δ a pol $\mathfrak{p}$. roviny ξ^d v $s\ (a\ b\ c)$ a druhý pár je tvořen body o a $(X^d\ \mathfrak{P})$ Involuce ta se promítá na X_1^a do páru $\delta_1 o^D$ a o_1 jakožto středu. Přímky $\delta_1 f$ resp. $\delta_1 {}^1f$ jsou tedy tečny kuželosečky E. V takto určené kuželosečce stanovím ohniska $\varphi\ {}^1\varphi$, jež patří i obrysu O_1 (z něhož znám střed o_1, ohniska $\varphi\ {}^1\varphi$ a tečny $\delta_1 t$, $\delta_1 t'$).

Druhé věty s výhodou použiji, jsou-li dva z průměrů $s\ (a\ b)$ dány v π. Je-li náš prostor rovnoběžný s C, stanovím v rovině $s\ (c\,d)$ ku π sdružené průsečný průměr sc' dle toho, že $c'_1\,{}^1c'_1$ je bodem $s_{1,2}$ půlen. Najdu v kuželosečce $s_1\ (c_1\ d_1)$ takovou tětivu, aby $s_1\,{}^1c'_1 = sc'_1$ a tětivu sd'_1 k ní sdruženou. Pak je varieta dána $s\,(a\,b\,c'\,d')$. Dále počínám si podobně, jako u elipticko-parabolické variety na tab. 8., dané $s\,(a\,b\,c)$ v našem prostoru a průměrem sd ($\mathfrak{d}$ je úběžný bod) sdruženým. Prostory $\mathfrak{R}$ pokládám rovnoběžně s naším prostorem. Tětiva $f\,{}^1f$ — spojující ohniska obrysu klinogonálného plochy $s\,(a\,b\,c)$ v našem prostoru — patří kuželosečce E. Přímka polárně sdružená k úběžné rovině našeho prostoru je $X^d \equiv d\delta$, neboť musí procházeti polem „v" *) našeho prostoru a polem úběžné roviny našeho prostoru. Samodružné body dříve zmíněné involuce jsou zde již dány v δ_1 a d_1, prvních průmětech průsečíků X^d s varietou a bod o_1 ($d_1\,o_1 = o_1\,\delta_1$) je středem involuce, kuželosečky E a obrysu O_1. Tečny z bodu „v" *) — $v_1 f$ a $v_1\,{}^1f$ — s předcházejícími prvky stačí ku stanovení ohnisek φ a ${}^1\varphi$ (vypadlo z mezi nákresny) kuželosečky E_1 a tedy i O_1, jejíž osy stanovím a omezím pomocí tečny v, t ku ${}^1O_1$. (Stanovíme ohnisko q paraboly — os kuželoseček, které se v bodech t a ${}^1t$ obrysu O_1 dvojnásob dotýkají — na kružnici L, načež kružnice o středu „l" $\equiv (K\,A)$ $[pv_1 = pq\,,\, K \perp pq]$ a poloměru $r = lq$ velkou osu A' protíná ve $\varphi\,.\,{}^1\varphi$.)

O varietách specielních se pro stručnost nezmiňuji.

Tento způsob promítání je zvláštním případem promítání z roviny na rovinu v prostoru pětirozměrném, o němž pojednám jindy.

*

La projection d'une droite sur un plan dans l'espace à quatre dimensions.

(Extrait de l'article précédent.)

Les méthodes de la projection de l'espace à quatre dimensions étant un peu compliquées — à cause de ce qu'il faut projeter indirectement sur le plan du papier — je tâche de résoudre le problème suivant: étant donné un plan π et une droite C qui fixent l'espace à quatre dimensions ${}^4E$, on veut projeter les figures G de l'espace ${}^4E$ de la droite C directement sur le plan π.

Soit Γ la droite fuyante du plan ξ, totalement orthogonal au plan π. Les points a_1, a_2 de rencontre des deux plans (Ca), (Γa) et π, a étant un point quelconque, sont la première et la deuxième projection de la droite C de ce point. C et π étant fixés, le point a est déterminé par ses projections, puisque les plans $\varrho \equiv (Ca_1) \equiv$ $\equiv (Ca)$ et $\varphi \equiv (\Gamma a_2) \equiv (\Gamma a)$ se rencontrent dans un même point a. Donc, le point de départ de cette façon de projeter est de savoir fixer la droite C en se servant de sa deuxième projection C_2.

*) Bod v_1 stanovím buď z $(d_1\ \delta_1\ s_1\ v_1) = -1$ nebo $sd = dv$, což ihned plyne z průsečné plochy $s\,(abd)$ prostoru $(\pi\delta)$ s varietou.

On résout ce problème en supposant C parallèle à l'espace ordinaire et en se servant d'une hyperbole équilatére dont C_2 est l'axe imaginaire (les distances $d = \overline{c_0 c_2}$ de ses points $c_0, \ldots$ de l'axe C_2 $(c_2, \ldots)$ nous donnent celles de chaque point c de C du plan π).

Le point a détermine, avec π, l'espace $(a\pi) \equiv {}^3E$. On peut donc le considérer comme un point de cet espace, et qui est projeté du point $c \equiv (C\,{}^3E)$ sur le plan π.

Une droite A et la droite C (Γ) déterminent un espace (CA) $[(\Gamma A)]$ qui coupe π suivant la droite A_1 (A_2). Les droites joignant les deux projections a_1, a_2 du point a sur A enveloppent une conique K (dont A_1, A_2, C_2 sont les tangentes).

Deux droites A, A' se coupent en un point x, si la droite $\overline{x_1 x_2}$ est une tangente commune des deux coniques K, K'. En ce cas les deux droites déterminent un plan ϱ. Les deux plans ϱ_1, ϱ_2 sont collinéaires. Le point d'intersection du plan ϱ avec π peut être trouvé comme l'un des trois points unis de ces deux systèmes collinéaires. On peut y parvenir aussi par une construction plus simple, en fixant, dans ϱ, une droite qui rencontre π.

L'espace linéaire ${}^3E$ est donné par quatre points a, b, c, d; on trouve son plan fuyant en déterminant les points fuyants de trois droites du tétraedre $(abcd)$. On arrive, par une construction bien simple, aux points $c \equiv (C\,{}^3E)$, $g = (\Gamma\,{}^3E)$; le point g est le point fuyant des droites perpendiculaires au plan π dans ${}^3E$. On peut, à l'aide de ces deux points et de la ligne d'intersection $({}^3E\pi)$, résoudre facilement beaucoup de problèmes dans ${}^3E$.

Orthogonalité: en projetant $C\,(\Gamma)$ de $\Gamma\,(C)$ sur π, on obtient $C_2 \equiv \Gamma_1$ $(\Gamma_1 \equiv C_2)$. L'intersection de l'involution rectangulaire (dont le centre est le sommet „h" de l'hyperbole mentionnée cidessus) avec C_2 donne l'involution des points fuyants γ_1, γ_1', ... Ces points déterminent les droites perpendiculaires mutuellement et au plau π.

Pour construire le plan fuyant, orthogonalement associé au point fuyant u, on trouve d'abord dans l'espace $(u\pi)$ la droite fuyante U associée orthogonalement a u; cette droite et le point γ_1, correspondant à γ'_1 $(\gamma'_1 \equiv c_2 \equiv u_1 u_2 \,.\, C)$ dans l'involution mentionnée toute à l'heure, déterminent le plan cherché. Cette construction est le point de départ des problèmes suivants: 1. Trouver l'espace ${}^3E$ perpendiculaire à une droite A. 2. Trouver le plan ϱ' totalement perpendiculaire à un plan ϱ. 3. Les problèmes relatifs à l'orthogonalité dans ${}^3E$. On peut, cependant, résoudre ces derniers problèmes en faisant tourner l'espace ${}^3E$ (qui rencontre C en c) autour du plan cP (P étant la droite d'intersection de ${}^3E$ avec π) de sorte qu'il coïncide avec l'espace $(c\,\pi)$.

Dans la troisième partie je détermine les contours des variétés $\mathfrak{M}$ données par l'équation $\Sigma\, x_i\, x_k = 0$ $(i, k = 1, \ldots$ 5. en coordonnées homogènes. En faisant usage de deux théorèmes de Pelz j'aboutis à la proposition suivante: „Faisant tourner des espaces linéaires ${}^3E$ autour d'un plan ϱ quelconque (dans CU^π, U^π étant la droite fuyante du plan π) on obtient des coniques, qui sont les contours des corps d'intersection $Q \equiv (\mathfrak{M}\ {}^3E)$, et lesquelles, étant enveloppées par la conique O_1, contour de $\mathfrak{M}$, engendrent, par leurs foyers, deux coniques homofocales a O_1."

Ke chronologii Archimedových objevů a spisů.

Dodatek ke článku tohoto titulu v tomto časopise, ročník L., str. 81 nn a 250 nn.

Teprve nedávno četl jsem velmi pěknou práci F. Arendta „Zu Archimedes" v posledním sešitě posledního ročníku Bibliotheca mathematica, který vyšel v nepravidelných lhůtách za války. S potěšením jsem shledal, že asi v téže době, kdy jsem se zabýval studiem Archimeda, neznaje Arendtova článku, tento publikoval práci, v níž „Metodu" klade před „Plovoucí tělesa" a za ostatní geometrické spisy Archimedovy. Naše důvody, pokud jsou čerpány z Archimedových předmluv, jsou částečně stejné. Okolnost, že jsme oba došli k témuž výsledku místy touže cestou, jeden o druhém nevědouce, jest dalším dokladem pro správnost této domněnky. Kdežto já jsem se ve svém článku snažil ukázati na vůdčí myšlenku Archimedovy práce a vnitřní souvislost jeho objevů, obírá se Arendt hlavně chronologií jeho spisů, studuje s filologickou akribií jednotlivé Archimedovy výroky, při čemž se pokouší i o přesnější datování, klada smrt Kononovu kol r. 240 a narození Archimedovo asi do r. 275.

Q. Vetter.

Röntgenovo spektrum hafnia.*)

Napsal *August Žáček.*

Koncem minulého roku našli Coster a Hevesy**) v norvéžském zirkonovém minerálu dosud neznámý prvek pořadového čísla 72, jejž nazvali hafnium. Objevení stalo se röntgenospektroskopicky, totiž tak, že v röntgenospektrogramu onoho minerálu byly nalezeny linie, jež bylo možno dle Moseleyovy relace interpretovati jako linie L-serie prvku s pořadovým číslem 72.

Coster měl k disposici pouze malý spektrograf bez precisně děleného kruhu, takže mohl vlnové délky určovati pouze relativně vzhledem k liniím o známé vlnové délce. V té době pracoval jsem v Lundu s velkým precisním spektrografem a pokládal jsem za důležito, změřiti aspoň nejsilnější linie v L-serii hafnia absolutně.

---

*) Vychází současně ve výtahu v Zeitschr. f. Phys. (384) roč. 1923.
**) Nature, 111. str. 79, 1923.