Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Karel Čupr

O některých řadách a součinech konvergujících podmíněně

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 53 (1924), No. 3, 241--247

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121634`

O některých řadách a součinech konvergujících podmínečně.

Napsal *K. Čupr.*

Ed. Weyr stanovil užitím funkce gamma hodnoty absolutně konvergujících řad a součinů, jichž obecný člen jest určitou racionální funkcí indexu ν. Při téže vlastnosti obecného členu lze stanoviti hodnoty řad a součinů nekonvergujících absolutně; řady takové (i v případě obecnějším) sečtl již Schlömilch, velmi obecně o tomto thematu jedná Pringsheim (Vorl. über Zahlenlehre II. Abt. 424/437).

Chceme uvésti některé jednoduché příklady.

1. Jest stanoviti součet řady, jež vznikne, řadíme-li z řady

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}-\frac{1}{a+3}+\ldots \quad a \neq 0, -1, -2, -3, \ldots$$

vždy p členů kladných a q záporných. Obecný člen takto vzniklé řady jest

$$u_\nu=\left(\frac{1}{a+2\nu p}+\frac{1}{a+2+2\nu p}+\ldots+\frac{1}{a+2p-2+2\nu p}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{a+1+2\nu q}-\frac{1}{a+3+2\nu p}-\ldots-\frac{1}{a+2q-1+2\nu q}\right)=$$

$$=\left(\frac{\frac{1}{2p}}{\nu+\frac{a}{2p}}+\frac{\frac{1}{2p}}{\nu+\frac{a+1}{2p}}+\ldots+\frac{\frac{1}{2p}}{\nu+\frac{a+2p-2}{2p}}-\right.$$

$$\left.-\frac{\frac{1}{2q}}{\nu+\frac{a+1}{2q}}-\frac{\frac{1}{2q}}{\nu+\frac{a+3}{2q}}-\ldots-\frac{\frac{1}{2q}}{\nu+\frac{a+2q-1}{2q}}\right).$$

Rada $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} u_\nu$ konverguje absolutně: obecný člen její jest lomená racionálná funkce mající v čítateli polynom o 2 nižšího stupně, než ve jmenovateli; skutečně jest

$$\lim\,(\nu u_\nu) = \left[p\cdot\frac{1}{2p} - q\cdot\frac{1}{2q}\right] = 0,\quad \nu \sim \infty.$$

I lze na řadu $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} u_\nu$ applikovati pravidlo odvozené Weyrem (Časopis XXI., pag. 175.); zde užijme ho s malou změnou: budeme značiti

$$\Psi(z) = \frac{d\log\Gamma(z)}{dz},$$

kdežto Weyr značí

$$\Psi(z) = \frac{d\log\Gamma(z-1)}{dz}.$$

I jest pak:

$$Sp^1 q = \frac{1}{2q}\left[\Psi\left(\frac{a+1}{2q}\right) + \Psi\left(\frac{a+1}{2q}+\frac{1}{g}\right) + \ldots + \Psi\left(\frac{a+1}{2g}+\frac{q-1}{q}\right)\right]$$
$$-\frac{1}{2q}\left[\left(\Psi\frac{a}{2p}\right) + \Psi\left(\frac{a}{2p}+\frac{1}{p}\right) + \ldots + \Psi\left(\frac{a}{2p}+\frac{p+1}{p}\right)\right].$$

Použijeme-li identity

$$\Psi(z) + \Psi\left(z+\frac{l}{m}\right) + \ldots + \Psi\left(z+\frac{m-1}{m}\right) = m\,\Psi(mz)\ \text{nelogm},$$

máme

$$S_{p,\,q} = \frac{1}{2q}\left[q\,\Psi\left(\frac{a+1}{2}\right) - q\,\log q\right] - \frac{1}{2p}\left[p\,\Psi\left(\frac{a}{2}\right) - p\log p\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\Psi\left(\frac{a+1}{2}\right) - \Psi\left(\frac{a}{2}\right)\right] + \frac{1}{2}\log\frac{p}{q}.$$

Poněvadž $\quad \Psi(z) = \int\limits_0^\infty \left(\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-zx}}{1-e^{-x}}\right) dx, \quad$ jest

$$\frac{1}{2}\left(\Psi\left(\frac{a+1}{2}\right) - \Psi\left(\frac{a}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\frac{ax}{2}} - e^{-\frac{(a+1)}{2}x}}{1-e^{-x}}\,dx$$

a po substituci $y = e^{-\frac{x}{2}}$ máme

$$S_{p,\,q} = \int_0^1 \frac{y^{a-1}}{1+y}\,dy + \frac{1}{2}\log\frac{p}{q}, \qquad a > 0.$$

2. Je-li dána řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} v_n,$$

kdež
$$v_n = \frac{a_1\,u^{k-1} + a_2\,u^{k-2} + \ldots + a_k}{(\nu+\alpha_1)\,(\nu+\alpha_2)\ldots(\nu+\alpha_k)} =$$
$$= \frac{A_1}{\nu+\alpha_1} + \frac{A_2}{\nu+\alpha_2} + \ldots + \frac{A_k}{\nu+\alpha_k},$$

při čemž $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$ jsou vesměs různá kladná od 0 různá čísla, jest opět řada

$$S_{p,\,q} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (v_{2\nu p+1} + v_{2\nu p+3} + \ldots + v_{2\nu p+2p-1} -$$
$$- v_{2\nu q+2} - v_{2\nu q+4} + \ldots + v_{2\nu q+2q})$$

absolutně konvergentní. Po delších výpočtech stejných jako v 1., jest

$$S_{p,\,q} = \frac{A_1}{2}\left[\Psi\left(\frac{\alpha_1+1}{2}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) + \log\frac{p}{q}\right] + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{A_k}{2}\left[\Psi\left(\frac{\alpha_{k+1}+1}{2}\right) - \Psi\left(\frac{\alpha_k}{2}\right) + \log\frac{p}{q}\right] =$$
$$= \int_0^1 \frac{A_1\,x^{\alpha_1-1} + A_2\,x^{\alpha_2-1} + \ldots + A_k\,x^{\alpha_k-1}}{1+x}\,dx + \frac{a_1}{2}\log\frac{p}{q},$$

poněvadž $A_1 + A_2 + \ldots + A_k = a_1$.

3. Obraťme se nyní k součinům. Součin

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{a}{kb+c}\right)\left(1 - \frac{a}{kb+c}\right)$$

nekonverguje absolutně. Stanovme hodnotu součinu, jenž vznikne, řadíme-li p členů tvaru $\left(1 + \frac{a}{kb+c}\right)$ a q členů tvaru $\left(1 - \frac{a}{kb+c}\right)$. Obecný člen součinu takto vzniklého jest

$$v_\nu = \frac{\left(\nu-1+\frac{b+c+a}{bp}\right)\cdot\left(\nu-1+\frac{2b+c+a}{bp}\right)\cdots\left(\nu+\frac{c+a}{bp}\right)}{\left(\nu-1+\frac{b+c}{bp}\right)\left(\nu-1+\frac{2b+c}{bp}\right)\cdots\left(\nu+\frac{c}{bp}\right)}\cdot$$

$$\cdot\frac{\left(\nu-1+\frac{b+c-a}{bq}\right)\left(\nu-1+\frac{2b+c-a}{bq}\right)\cdots\left(\nu+\frac{c+a}{bq}\right)}{\left(\nu-1+\frac{b+c}{bq}\right)\left(\nu-1+\frac{2b+c}{bq}\right)\cdots\left(\nu+\frac{c}{bq}\right)}.$$

Součin $\prod\limits_{\nu=1}^{\infty} v_\nu$ konverguje obsolutně, poněvadž řada $\sum\limits_{1}^{\infty}(1-v_\nu)$ konverguje absolutně; způsobem podobným jako $v\ldots.1)$ ukážeme, že $1-v_\nu$ jest lomená racionálná funkce v čitateli, mající mnohočlen o 2 nižší než ve jmenovateli. Dle methody Weyrovy (Časopis XXII. 173) jest

$$P_{p,q} = \frac{\Gamma\left(\frac{b+c}{bp}\right).\Gamma\left(\frac{2b+c}{bp}\right)\ldots.\Gamma\left(\frac{bp+c}{bp}\right)}{\Gamma\left(\frac{b+c+a}{bp}\right)\Gamma\left(\frac{2b+c+a}{bp}\right)\ldots.\Gamma\left(\frac{bp+c+a}{bp}\right)}\times$$

$$\times\frac{\Gamma\left(\frac{b+c}{bq}\right).\Gamma\left(\frac{2b+c}{bq}\right)\ldots.\Gamma\left(\frac{bq+c}{bq}\right)}{\Gamma\left(\frac{b+c-a}{bq}\right)\Gamma\left(\frac{2b+c-a}{bq}\right)\ldots.\Gamma\left(\frac{bq+c-a}{bq}\right)}.$$

Součin tento zjednodušíme dále pomocí Gaussovy relace:

$$\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{m}\right)\cdots\Gamma\left(z+\frac{m-1}{m}\right)=\Gamma(mz)\,(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}\,m^{\frac{1}{2}-mz}$$

jest pak

$$\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{a}{b}}\cdot\frac{\Gamma\left(1+\frac{c}{b}\right)\;\Gamma\left(1+\frac{c}{b}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{c+a}{b}\right)\Gamma\left(1+\frac{c-a}{b}\right)}.$$

Položme $c=0$, $\frac{a}{b}=z$; řadíme-li tedy ze součinu

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{\nu}\right)\left(1-\frac{z}{\nu}\right)$$

nejprvé p členů se znaménkem kladným, pak q členů se znaménkem záporným, jest

$$P(p, q, z) = \left(\frac{q}{p}\right)^z \frac{1}{\Gamma(1+z)\,\Gamma(1-z)} = \left(\frac{q}{p}\right)^z \frac{\sin \pi z}{\pi z},$$

$$P\left(p, q, \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{q}{p}} \cdot \frac{2}{\pi},$$

$$P\left(1, 1, \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\pi} \text{ (formule Wallisova).}$$

4. Uvažujme ještě součin:

$$\left(1 - \frac{a}{b+c}\right)\left(1 + \frac{a}{2b+c}\right)\left(1 - \frac{a}{3b+c}\right)\left(1 + \frac{a}{4b+c}\right)\cdots.$$

Raďme opět p členů tvaru

$$1 - \frac{a}{kb+c}$$

a z členů tvaru

$$1 + \frac{a}{kb+c}.$$

Zde jest

$$v_\nu = \frac{\left(\nu-1+\frac{b+c-a}{2pb}\right)\left(\nu-1+\frac{3b+c-a}{2bp}\right)\cdots\left(\nu-1+\frac{(2p-1)\,b+c-a}{2pb}\right)}{\left(\nu-1+\frac{b+c}{2pb}\right)\left(\nu-1+\frac{3b+c}{2bp}\right)\cdots\left(\nu-1+\frac{(2p-1)\,b+c}{2pb}\right)} \cdot \frac{\left(\nu-1+\frac{a+2b+c}{2qb}\right)\cdot\left(\nu-1+\frac{a+4b+c}{2qb}\right)\cdots\left(\nu-1+\frac{a+2qb+c}{2qb}\right)}{\left(\nu-1+\frac{2b+c}{2qb}\right)\left(\nu-1+\frac{4b+c}{2qb}\right)\cdots\left(\nu-1+\frac{2qb+c}{2qb}\right)}.$$

Součin $\prod\limits_{\nu=1}^{\infty} v_\nu$ konverguje absolutně; pomocí Weyrovy formule máme

$$1 : P(p, q) = \frac{\Gamma\left(\frac{b+c-a}{2pb}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{3b+c-a}{2pb}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{(2p-1)\,b+c-a}{2pb}\right)}{\Gamma\left(\frac{b+c}{2pb}\right)\;\Gamma\left(\frac{3b+c}{2bp}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{(2p-1)\,b+c}{2pb}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{a+2b+c}{2qb}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{a+4b+c}{2qb}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{a+2qb+c}{2qb}\right)}{\Gamma\left(\frac{2b+c}{2qb}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{4b+c}{2qb}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{2qb+c}{2qb}\right)}$$

a odtud pomocí identity Gaussovy

$$P\ (p,\ q) = \frac{c}{a+c} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{b+c}{2b}\right)\ \Gamma\left(\frac{e}{2b}\right)}{\Gamma\left(\frac{b+c-a}{2b}\right)\Gamma\left(\frac{a+c}{2b}\right)}.$$

Položme $e=0$, $\frac{a}{b}=z$; béřeme-li tedy ze součinu

$$\left(1-\frac{z}{1}\right)\ \left(1+\frac{z}{2}\right)\ \left(1-\frac{z}{3}\right)\ \left(1+\frac{z}{4}\right)\dots$$

vždy p členů se znaménkem — a q členů se znaménkem $+$, máme

$$P(p,q,z) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{z}{2}\right)} \cdot \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{z}{2}};\ P\,(p,q,z) = \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{z}{2}} P(1,1,z)$$

jednoduchého výsledku docílíme pro $a=1$, $b=1$:

$$P\ (p,\ q) = \frac{c}{1+c}\sqrt{\frac{q}{p}};$$

součin, jehož faktory po p a q členech řadíme, jest

$$\left(1-\frac{1}{c+1}\right)\ \left(1+\frac{1}{c+2}\right)\ \left(1-\frac{1}{c+3}\right)\ \left(1+\frac{1}{c+4}\right)\dots$$

$$c \neq -1,\ \ -2,\ \ -3,\dots$$

$$P\ (p,\ q) = P\ (1,\ 1).\sqrt{\frac{q}{p}}.$$

*

Sur quelques séries et produits semi-convergents.

(Extrait de l'article précédent.)

M. Appel (C. R. LXXXVI, p. 953) a fait voir comment on peut effectuer la sommation de séries infinies dont le terme général est une fonction rationnelle de l'indice ν. C' est Éd. Weyr qui a approfondi (ce Journal, XXI) cette méthode en l'étendant, en même temps, au calcul de produits infinis dont le terme général est une fonction rationnelle de l'indice, satisfaisant à certaines conditions (ce Journal, XXII); dans les deux cas, la méthode s'appuie sur des relations appartenant à la théorie de la fonction $\Gamma\ (\nu)$.

Étant donnée une série semi-convergente dont le terme général est une fonction rationnelle de l'indice, soit

$$S_{1,1} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + - \dots$$

on démontre aisément qu'on peut considérer la série S_{pq}, dans laquelle p termes positifs sont suivis de q termes négatifs, comme une série absolument convergente dont le terme général est

$$u'_n = (u_{np} + u_{np+1} + \dots + u_{np+p-1} - u_{nq} - u_{nq+1} - \dots - u_{nq+q-1})$$

et dont la somme se calcule aisément par la méthode de Weyr. On peut faire voir, d'une manière analogue, qu'on peut réunir les facteurs d'un produit infini semi-convergent de manière qu'on obtienne un produit absolument convergent et dont la valeur se calcule par la méthode de Weyr.

Některé věty týkající se rozkladu mnohočlenů jedné proměnné.

Napsal *Zdeněk Chládek*.

Známá věta Eisensteinova, o níž se opírá důkaz irreducibility rovnice pro primitivní n-té kořeny jednotkové, je-li n prvočíslo, jest východiskem pro řadu vět jiných, udávajících kriteria k zjištění irreducibility mnohočlenů jedné proměnné se součiniteli celistvými. Takové věty odvodili Koenigsberger,[1]) Netto[2]) a Perron,[3]) který nad to všecky věty jemu známé, sem spadající, odvodil znovu pomocí teorie ideálů, při čemž mohl některé z nich rozšířiti.

Zde odvodím dvě věty obsahující větu Eisensteinovu jako zvláštní případ, které, ač jsou na snadě, dle mého vědomí dosud uveřejněny nebyly.

První větu obdržíme užívajíce postupu Weberova[4]) při důkazu věty Eisensteinovy na rozklad mnohočlenu

$$M(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-l-1} x^{l+1} + q\, a_{n-l} x^l + q\, a_{n-l+1} x^{l-1} + \dots + q a_n,$$

kde q značí prvočíslo, jímž a_{n-l-1}, a_n nejsou dělitelna a $2l + 1 > n$.

Předpokládejme totiž možný rozklad $M(x) = m(x) \cdot n(x)$, kde

---

[1]) Crelles Journal, sv. 115.

[2]) Mathem. Annalen, sv. 48.

[3]) Mathem. Annalen, sv. 60.

[4]) Weber, Algebra.