Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Věstník literární

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 35 (1906), No. 4, 367--376

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121606

se theoretikovi, jenž shrnouti chce rozmanité výsledky tyto v jediné a jednoduché theorii. Není divu, že mnohé pokusy o jednotnou theorii stavby spekter, ač po některých stránkách velice zajímavé a zdařilé, se neosvědčily. Uváděti tyto theorie vedlo by příliš daleko, mimo to nejsou v článku tomto uvedena *všecka fakta o spektrech vůbec,* nýbrž pouze vztahy a zákonitosti spekter emissních a závislosti určitých obvykle užívaných zdrojů světelných na podmínkách, které jsou pro tyto zdroje zvláště důležity. Tak na př. nebylo jednáno o spektrech *spojitých* ani o spektrech *absorpčních,* nejednáno o rozmanitých zdrojích *luminiscense,* o spektrech pozorovaných na přerušovačích, nediskutován rozkladný účinek pole *magnetického* atd. Přes toto omezení jeví se v uvedeném řada velice zajímavých závislostí a zákonitostí, které překvapují podrobností a přesností, s níž se vyskytují, tak že tu souhlas na několik setin procenta mezi hodnotami pozorovanými a počítanými není nijakou zvláštností. Po této stránce nelze v jiných partiích fysiky pro souhlas počtu a pozorování nalézti podobného příkladu.

Věstník literární.

Recense knih.

H. Weber u. J. Wellstein: **Encyklopädie der Elementarmathematik.** Ein Handbuch für Lehrer und Studierende. I. Bd. Enc. der elementaren Algebra und Analysis. Vydání druhé. 1906. (XVIII + 540) Cena M. 9·60 II. Bd. Enc. der elementaren Geometrie. 1905 (XII + 604). Cena M. 12. III. Bd. (má vyjíti co nejdříve). Lipsko. B. G. Teubner.

Název této pozoruhodné knihy nesmí svésti k domněnce, že se jedná o podnik podobný velké encyklopedii („Encyklopaedie der mathem. Wissenschaften"), pohybující se však v mezích elementární mathematiky. Velká encyklopedie přirozeně zahrnuje mathematiku elementární*) a projednává ji dle hledisek, které jsou pro její účel směrodatny. Kniha, o níž referuji, nemá-li býti zbytečna, musí přirozeně míti účel jiný; jaký tento účel jest, vytýkají oba autoři zcela stručně v předmluvě: podati učiteli pomůcku, v níž by nalezl vědecky správně opřeno to, co má ve škole vykládati, podnítiti ho, aby prohloubil své vlastní vědomosti a snažil se způsobiti totéž u žáků; na druhé straně doplniti vzdě-

---

*) Příslušná stať bude uveřejněna co nejdříve; autorem jest M. Simon.

lání studujícího vysokých škol v těch částech, které se na střední škole probírají nedosti vědecky a na vysoké škole buď pomíjejí mlčením nebo odbývají co nejstručněji.

Ať se soudí o volbě látky a o provedení díla — o čemž bude obšírněji promluveno — jakkoliv: účel knihy sám zasluhuje všestranného uznání, ježto neběží o nic menšího, než o to, pozdvihnouti učitelovu úroveň vědeckou právě v těch oddílech vědy, které má ovládati co nejdokonaleji. A že naopak pro tuto důležitou věc dosud nebylo činěno tolik, kolik zasluhuje, ukazuje jednak nedostatek přístupné literatury a odborných přednášek, jednak značná nevšímavost k příslušným otázkám v kruzích, jichž se věc týká. Nutnost nápravy pociťuje se stále silněji; hnutí v Německu probuzené, směřující ke sblížení učitelů středoškolských s universitou, má jistě jednu svou příčinu právě v uznání uvedeného nedostatku.*)

„Encyklopedie“ je zajisté jedním z pokusů, jak odstraniti tento nedostatek; myslím, že i v našich poměrech kniha může vykonati mnoho dobrého, i dovolím si na její obsah obšírněji upozorniti.

Obsahem knihy má býti „elementární mathematika“. Autoři sami upozorňují na neurčitost tohoto pojmu; nelze vědecky přesně rozhodnouti, co k elementům ještě náleží a co již ne. I řídili se, jak se zdá, ve výběru látky v základě středoškolskou osnovou a připojili nad to vše, čím má se školské učivo prohloubiti a uvésti v souvislost s ostatními díly vědy, mimo jiné zvláště také tu partii elementů, která jedná o základech mathematiky. Ježto mimo to jde o to, postaviti učitele co možná vysoko nad jeho látku, řídili se autoři pravidlem přibrati k vlastní školské látce raději více než méně; to tím spíše, že při sepsání knihy měli na mysli rozhodně ještě jeden účel, třeba jej výslovně neuvádějí: přiblížiti tomu, kdo trochu déle byl vzdálen zdroje živé vědy, problémy, které si klade a řeší současná mathematika, a zároveň ukázati methodiku moderní mathematiky v její novosti a síle. Tím stává se kniha znamenitou pomůckou k prvému uvedení v některé novější theorie (na př. v theorii množin, grup, v neeuklidovskou geometrii a mn. j.).

Uvážíme-li rozmanitost účelů, jež si kniha klade, budeme nutně očekávati i jistou rozmanitost v látce, v tom smyslu totiž, že bude někdy možno rozhodnouti, který z uvedených účelů má při určité partii převahu.

Co dosud řečeno, charakterisuje v hlavních rysech knihu;

---

*) Jaký zájem o střední školu v poslední době projevuje v Německu universita, toho dokladem je zajímavá kniha Klein-Riecke: »Neue Beiträge etc.« Teubner, Lipsko, 1904, sbírka přednášek feriálního kursu.

z obsahu stačí uvésti jen oddíly význačné a ty, jež sahají mimo látku školní.

Sv. I. (autor H. Weber) počíná velmi názorným výkladem theorie množin, jejíž hlavní výsledky jsou uvedeny. Tato theorie je zároveň východiskem pro definici čísla a základní čtyři výkony početní; je provedena tak, že takřka nabádá k tomu, alespoň některé z projednaných otázek přenésti do školy (škola ovšem implicite pojmu množiny užívá). V podrobnějším výkladu výkonů početních je opět a opět výslovně poukazováno k tomu, že číslo i každé jeho rozšíření je svobodný výtvor lidského ducha, řízený ovšem zřeteli praktickými. Čísla irracionálná jsou zavedena Dedekindovým „řezem“; této definice je pak užito k důkazu existence horní a dolní meze.

Čísla imaginárná zavedena dle způsobu Hamiltonova co číselné dvojice, pro něž se definují základní výkony početní. Geometrické znázornění těchto čísel je obšírně vyloženo.

Permutace probrány mnohem šíře než se děje ve škole; vyloženy i základy theorie permutačních grup. Permutací je pak užito v theorii determinantů.

Druhá kniha prvého svazku, „Algebra“, je založena z větší části na theorii čísel. Látka volena je se zřetelem k novějším výsledkům a vyložena všude tak, že se otvírají čtenáři méně sběhlému v novějších theoriích stále nové obzory. Oddíl počíná výkladem o dělení celistvých funkcí a o možnosti jich rozkladu v oboru čísel racionálných. Zavádí se pojem tělesa číselného, oboru racionálnosti („Rationalitätsbereich“) a adjunkce. Následují funkce symmetrické a důkaz Gaussův základní věty algebraické; pak z theorie čísel: zbytky potenční (s užitím na theorii periodických zlomků), kongruence 1. i 2. st., theorie kvadratických zbytků, velká věta Fermatova, věta o rozkladu čísel ve dva čtverce; rovnice Pellova (řetězce). K algebraickému řešení rovnic st. 3. a 4. je připojena theorie Galoisovy gruppy příslušné rovnici bikvadratické. Dále: numerické řešení rovnic, kořeny jednotkové, konstrukce pravidelného 17tiúhelníku; úvahy o sestrojitelnosti kořenu rovnice a důkaz nemožnosti řešiti rovnici st. pátého radikály.

Třetí kniha, „Analysis“, jedná velmi obšírně o nekonečných řadách; obecná theorie vrcholí ve známé větě Riemannově o závislosti součtu řady podmínečně konvergentní na pořadu členů. Nebyly opomenuty ani řady s členy komplexními. Z příkladů, jež osvětlují tuto theorii, buďtež zvláště uvedeny ty řady trigonometrické, jež definují funkce nespojité. Stručně projednány nekonečné součiny (čísla Bernoulliho, Eulerův důkaz o nekonečném počtu prvočísel). Zvláštního upozornění zasluhuje důkaz o transcendentnosti čísel e a π.

Poslední kapitola projednává základy počtu infinitesimálného v takovém způsobu (co možná názorném), jak by mohly býti vykládány na střední škole.

Výklad v tomto svazku je provázen historickými statěmi, jež jsou cenné zvláště tím, že se snaží vystihnouti význam jednotlivých disciplin a jich vztahy k jiným.

Svazek druhý obsahuje v prvém dílu výklad o základech geometrie od J. Wellsteina. Tato partie náleží přirozeně do elementů, ježto je nezbytným požadavkem, aby každý učitel geometrie znal základy své vědy. Proto je čtenář hned od počátku uveden v okruh geometrie neeuklidovské, jejíž pochopení jde ruku v ruce s pochopením povahy geometrie vůbec. Výklad je uspořádán po stránce věcné, hlavně však po stránce methodické pečlivě a obratně. Kritikou základních pojmů euklidovské geometrie dochází se k poznání, že podkladem vlastností geometrických nejsou individuální vlastnosti základních útvarů, nýbrž ty vlastnosti jejich, jež vyjadřují axiomy (autor přijímá Hilbertův systém axiomů). Toto poznání je opřeno v několika směrech: výkladem Paschovy „přirozené geometrie" s jejím formalismem: podrobným provedením geometrie v parabolickém „svazku koulí" Kugelgebüsch). Přechodem k svazku koulí elliptickému a hyperbolickému ocitá se čtenář nenáhle v geometrii neeuklidovské, jež podává předpoklady nutné k důkazu nezávislosti axiomu o rovnoběžkách. Aby pak čtenář ihned byl upozorněn na to, že se mu nepředvádí jen nějaká zábavná paradoxa, nýbrž theorie v principu stejně oprávněná s geometrií euklidovskou, dokazuje se výpočtem, že při určité volbě základních koulí nelze prakticky obě neeuklidovské geometrie od euklidovské rozlišiti.

Že i prostornost útvarů geometrických je pro dedukci geometrickou vlastnost naprosto irrelevantní, stává se zjevno důkazem, že lze euklidovskou geometrii realisovati vůbec v každé množině *trojrozměrné*. Úvaha o dosahu Hilbertových axiomů a o osmi konstantách euklidovské geometrie vede k otázce o empirickém elementu v geometrii a ke kritice Kantova apriorismu; zde ovšem osobní náhled autorův silněji proniká. Ke konci ještě děje se zmínka o základech mechaniky.

Celý oddíl je psán s jistou vervou, jež činí četbu velmi zajímavou.

Jen stručně lze se zmíniti o dalších dílech svazku: v dílu druhém jsou zcela axiomaticky odvozeny základní věty projektivní geometrie (ve spojení s tím metrika neeuklidovská); totéž je učiněno pro planimetrii v díle třetím. V tomto dílu zvláštní zmínky zasluhuje theorie podobnosti.

Trigonometrie rovinná (od H. Webera) o málo přesahuje školskou látku; za to trigonometrie sférická (od Jacobsthala) je projednána šíře a nese význačný charakter uspořádanosti, čehož docíleno (dle příkladu Study-ho) zavedením gruppy co pořádacího principu. Vůbec je tento oddíl znamenitým příkladem pro význačnou snahu moderní mathematiky uvésti každou disciplinu v celek co nejsoustavnější.

Kniha třetí obsahuje především analytickou geometrii v rovině (Weber); povšimnutí zasluhuje zavedení symbolických rovnic pro přímku a redukce obecné funkce kvadratické. V theorii ellipsy, jež je podrobněji projednána, promluveno o křivosti, evolutě, problému normál. Analytika sférická (Jacobsthal) ukazuje překvapující analogie s analytikou rovinnou. Ve stereometrii (Weber) proveden důkaz, že lze na základě axiomů planimetrických dospěti k theorii kongruence a k měření veličin prostorových. Oddíl je zakončen theorií grup, jež přísluší k pravidelným tělesům.

Kniha je zakončena stručným (snad až příliš stručným) uvedením základních vět analytické geometrie v prostoru (rovina, plocha 2. st.).

Na základě uvedeného obsahu lze posouditi bohatost látky; pro podrobnější charakteristiku budiž ještě stručně poukázáno k způsobu zpracování, jenž ovšem částečně je patrný z obsahu. Přesně vědecký (až na nepatrné výjimky) postup je spojen se snadnou čitelností, což obé činí knihu velmi sympathickou. Kniha je proniknuta vědomou snahou vyloučiti z obsahu vše, co má význam jen speciální a není v těsné souvislosti s celkem vědy; naopak zase pojmy důležité objasněny co možná všestranně, zvláště ty, jež jsou fundamentální pro celou mathematiku (tak opětovně ukazováno na základní ráz mathematické spekulace — abych uvedl jediný příklad). Jak se kniha snaží učiniti zadost požadavkům moderní methodiky, na to bylo již poukázáno.

Výběr látky nutno v základě uznati za vhodný; v jednotlivostech ovšem možno míti jiný názor a leckde snad by si někdo přál ještě doplnění látky. Tak při zmínce o číslech transfinitních bylo by možno poukázati na dvojí pojem čísla nekonečného, což náleží k základním poznatkům mathematiky. Arithmetika byla by velmi pěkně zaokrouhlena poukazem k vyšším číslům imaginárným a důkazem, že čísla soujemná jsou nejobecnější, jež se řídí pravidly o počítání s čísly reálnými. Mnohý asi bude postrádati všeobecné definice funkce nebo základů abstraktní theorie grup; ke konstrukci pravidelných mnohoúhelníků bylo by možno připojiti větu Gaussovu o sestrojitelnosti kořenů jednotkových. Druhý svazek byl by nabyl rázu větší jednotnosti, kdyby v oddílech jednajících o geometrii na kouli (sférika, sférická trigonometrie) bylo poukázáno na její souvislost s geometrií neeuklidovskou. Některé věty (o rázu duálnosti na kouli, metrika na kouli, nemožnost útvarů podobných atd.) takřka volají po tom, aby byly přeloženy v řeč neeuklidovské geometrie.

Ovšem jsou to věci spíše osobního názoru a vkusu a neubírají knize ceny; není pochybnosti, že byli autoři k jistému omezení látky vedeni také obavou, aby kniha příliš nevzrostla.

Dr. B. Bydžovský.

Leçons sur les fonctions discontinues *professées au collège de France* par **René Baire,** maître de conférences à la faculté des sciences de Montpellier. Redigées par A. Denjoy, élève de l'école normale supérieure. Paris, Gauthier-Villars 1905. Str VIII — 128. Cena fr. 3·50.

Účel tohoto spisu, který vyšel ve sbírce monografií o theorii funkcí vydávané Borelem, jest vyšetřiti nutné a postačující podmínky proto, aby funkce rozpojitá byla limitou funkcí spojitých; t. j. aby ona funkce rozpojitá $f(x)$ v každém bodě daného oboru x_0 dala se vyjádřiti pomocí řady funkcí spojitých $f_1(x)$, $f_2(x)$ . . . limitou

$$\lim_{n=\infty} f_n(x_0) = f(x_0).$$

Vyšetřování toto nabývá důležitosti větou: Máme-li řadu funkcí $f_1, f_2 \ldots f_\nu \ldots$, jež jsou limity funkcí spojitých a které konvergují stejnoměrně ku funkci f, jest funkce f též limitou funkcí spojitých.

Kapitoly I.—III. věnovány jsou jednak základním pojmům o rozpojitých funkcích, jednak a to z největší části nauce o množinách lineárních. V kap. IV. řešen jest svrchu vytčený problém pro funkce o jedné a v kap. V. pro funkce o několika proměnných.

Výsledek, k němuž autor dospívá, jest zcela jednoduchý. Aby funkce rozpojitá byla limitou funkcí spojitých, definovaných pro množinu perfektní H, jest nutno a postačí, aby byla bodově rozpojitá na H (ponctuellement discontue). Při tom říkáme o funkci, že jest bodově rozpojitá ku př. v intervalu 0 . . 1, jestliže v každém intervalu (a, b) obsaženém mezi 0 a 1 lze nalézti bod, ve kterém funkce jest spojitá.

Z velmi zajímavé předmluvy uvádím ve volném překladu toto místo: Se stanoviska applikací zdá se předčasnou otázka, zda takové úvahy mají nějakou užitečnost praktickou. Nicméně jest možno poznamenati, že při mathematickém výkladu zjevů v přírodě používá se střídavě a jaksi dle okamžitých potřeb obou pojmů spojitosti a rozpojitosti. Jestliže v mechanice předpokládáme zpravidla, že rychlosti mění se spojitě, v nauce o rázu naproti tomu přibíráme do úvah svých i náhlé změny v rychlosti. Běží zde ovšem jenom o přiblížení, avšak jest patrno, že rozpojité přechody právě tak jako spojité mohou se vyskytovati v přiblíženích. Některé theorie z fysiky, chemie a mineralogie nejsou bez jisté analogie s pojmem diskontinuity mathematické. Na žádný způsob — vzdor zastaralému rčení — nic neopravňuje k tvrzení „příroda nečiní skoků“. Zda za těchto okolností není povinností mathematika započíti se studiem *in abstracto*, poměrů obou těchto pojmů, spojitosti a rozpojitosti? *r.*

Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes, professées à l'école normale supérieure par **Émile Borel** et redigés par *Maurice Fréchet*, avec des notes par *Paul Painlevé* et *Henri Lebesgue*. Paris, Gauthier-Villars, 1905. Str. IX. — 160. Cena 4·50 fr.

Spis tento jako předcházející vyšel v Borelově sbírce monografií o theorii funkcí. Pojednav v kapitole I. a II. o nauce o množinách a o pojmu kontinuity, číslech derivovaných a integrálech (zvláště dle definice Lebesgueovy), přistupuje autor k vyšetřování řad funkcí reálních a jich integrálů. Zvláště pak zabývá se otázkou, kdy řada funkcí spojitých v intervalu daném jest v tom intervalu funkcí spojitou. Tuto otázku z části řeší pojem stejnoměrné konvergence (vyskytující se poprvé u Stokesa a Seidla a rozšířený poněkud Dinim). Každá řada funkcí spojitých stejnoměrně konvergující jest v daném intervalu funkcí spojitou. Avšak, jak Bendixson na příkladech ukázal, jsou řady funkcí spojitých, jež nejsou stejnoměrně konvergentní (i ve smyslu Diniově) a přece definují v celém intervalu spojité funkce. Teprve Arzela zavedením nového pojmu — dle pojmenování Borelova — *konvergence quasi-uniformní* tuto otázku zplna rozřešil.

Řada funkcí spojitých $U_1(x) + U_2(x) + \ldots + U_n(x) + \ldots$ konverguje quasi-uniformně mezi a a b, jestliže: 1. Řada konverguje mezi a a b. 2. Můžeme přiřaditi každému kladnému číslu ε jakkoliv malému a každému číslu N jakkoliv velikému, číslo konečné $N' \geqq N$ a takové, že pro každou hodnotu x mezi a a b lze udati číslo celé n_x obsažené mezi N a N', pro něž platí

$$r_{n_x}(x) < \varepsilon.$$

Při tom jest $r_n(x) = U_{n+1}(x) + U_{n+2}(x) + \ldots$ A tu nutná a postačující podmínka, aby řada o členech spojitých mezi a a b představovala funkci spojitou v tom intervalu, jest, aby řada konvergovala quasi-uniformně. Borel podává ve svém spise nový, zcela jednoduchý důkaz této věty.

Nejdůležitější částí knihy jest oddíl čtvrtý pojednávající o vyjádření funkcí spojitých řadami polynómů. Nejprve podán výklad a několik důkazů věty Weierstrassovy, že každou funkci spojitou lze vyjádřiti řadou polynómů. Zvláště však zajímavý v tomto oddílu jest výklad o *methodách interpolačních*. Nejznámější vzorec interpolační jest Lagrangeův. Ten, jak známo, udává polynóm $P(x)$ stupně $n - 1$, jenž nabývá pro n hodnot neodvisle proměnné týchž hodnot jako daná funkce $f(x)$. A tu jest na snadě domněnka, že s rostoucím n vzrůstá přiblížení, t. j. že odchylky polynómu $P(x)$ od $f(x)$ v intervalu interpolačním s rostoucím n stávají se libovolně malými. Ale domněnka tato jest nesprávnou, jak ukazuje Borel na příkladě poněkud složitém a jak ukázal dříve Runge. Příklad Rungeův jest tento: Vypočteme-li polynóm Lagrangeův pro funkci $\frac{1}{1+x^2}$ v intervalu -5, $+5$, dostaneme výsledek, který konverguje k hodnotám funkce v intervalu $-3{\cdot}63$, $+3{\cdot}63$, který však nekonverguje vně tohoto intervalu.

Ukazuje pak Borel, že lze provésti interpolaci pomocí polynómů způsobem, jenž by tento nedostatek Lagrangeovy formule neměl. Při tom však vyskytují se polynómy $P_{pq}(x)$ závislé na číslech celých p, q a nezávislé od funkce, jež se má interpolovati, jichž výpočet ani pro malé hodnoty čísel p a q Borel nepodává, ba ani nenaznačuje pohodlnou cestu, po níž bychom k numerickému vyjádření těchto mnohočlenů dospěti mohli.

Konečně jest podán výklad *methody approximační Čebyševovy*. Jestliže $f(x)$ jest spojitá funkce a $\Pi(x)$ polynóm, tu nabývá difference $f(x) - \Pi(x)$ v intervalu (a, b) jisté maximální hodnoty L. Problém Čebyševův pak spočívá v nalezení polynómu určitého stupně n, tak, aby pro tento polynóm byla absolutní hodnota čísla L menší nežli u jiných polynómů téhož stupně. Borel nazývá tento polynóm *approximačním*. A tu jest věta: Pro každou funkci existuje jeden a jenom jeden polynóm approximační n-tého stupně. Lze též udati snadno nutnou a postačující podmínku proto, aby polynóm n-tého stupně $\Pi(x)$ byl approximačním pro funkci $f(x)$. Buďtež $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_N$ hodnoty, pro které rozdíl $f(x) - \Pi(x)$ nabývá hodnoty $\pm L$ (kde L jest maximální absolutní hodnota toho rozdílu v intervalu (a, b); nechť pak jest $a \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots \alpha_N \leq b$ (předpokládáme pro jednoduchost, že $f(x)$ nesplývá v žádné konečné části intervalu (a, b) s polynómem n-tého anebo nižšího stupně a že nemá s takovým polynómem v intervalu (a, b) nekonečně mnoho hodnot společných). Pak nutná a postačující podmínka proto, aby $\Pi(x)$ byl approximačním polynómem n-tého stupně, jest, aby v řadě

$$f(\alpha_1) - \Pi(\alpha_1), f(\alpha_2) - \Pi(\alpha_2) \ldots f(\alpha_N) - \Pi(\alpha_N)$$

bylo aspoň $n+1$ změn znaménkových. Borel podává odvození těchto výsledků způsobem zjednodušeným a poněkud obecnějším než jest Čebyševův.*)

*) Pojednání Čebyševovo »Sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions« vyšlo v pojednáních petrohradské akademie roku 1859. (Mémoires de l'Acad. Imp. des sc. de St. Pét. VI série, VII. svazek.) Znovu otištěno v »Oeuvres de P. L. Tchebychef« Tome I., str. 273—378. Pozoruhodno jest, že popud k vyšetřování, jehož plodem byly tak důležité a krásné výsledky, daly problémy

V kapitole poslední vykládá pak Borel o vyjádření funkcí rozpojitých řadami polynómů. Knize přidány jsou tři poznámky a to od Painlevéa „Sur le développement des fonctions analytique“ (str. 101—148), kde se pojednává o t. zv. řadách vytvořujících (séries génératrices), pak od H. Lebesguea (str. 149—155), kde podán jest důkaz věty Baireovy o funkcích rozpojitých (viz předešlý referát) a konečně poznámka od Borela, jež rovněž vztahuje se k vyšetřováním Baireovým. *r.*

The theory of determinants and their applications.

By *Robert Forsyth Scott*, M. A. of Lincoln's Inn; fellov of St. John's College, Cambridge. Second edition: Revised by G. B. Mathews. Cambridge at the University Press, 1904. Stran XI — 288.

Tato učebnice determinantů odlišuje se od učebnic u nás známých a rozšířených, že opírá se při odvození pojmu determinantu, jakož i jeho základních vlastností o tak zvaná alternující čísla (alternate numbers). Chci pojem těchto čísel v následujícím stručně vyložiti.

Pro čísla v arithmetice užívaná platí vzhledem ku sčítání a vzhledem k násobení zákony associativní a kommutativní:

$$(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c;$$
$$ab \, . \, c = a \, . \, bc = abc; \qquad \text{I.}$$
$$a + b = b + a; \; ab = ba; \qquad \text{II.}$$

mimo to jest platný zákon distributivní

$$(b + c)\, a = ba + ca. \qquad \text{III.}$$

Čísla vyhovující těmto třem zákonům nazývána bývají skaláry.

Obor čísel v mathematice užívaných rozšiřme* zavedením řady n jednotek $e_1, e_2, \ldots e_n$. Pro počítání s těmito jednotkami nechť platí všecky zákony I., II., III. vyjma kommutativní při násobení; místo něho nechť jest

$$e_r e_s = - e_s e_r, \qquad (1)$$

a rovněž kladme

$$e_r^2 = 0. \qquad r, s = 1, 2, \ldots n \qquad (2)$$

Pro základní výkony početní s některou nově zavedenou jednotkou a skaláry nechť platny jsou všecky tři zákony základní.

Pak jest

$$A = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \ldots + a_n e_n,$$

kde $a_1, a_2, \ldots a_n$ jsou skaláry, obecný tvar alternujícího čísla. Jestliže podobně jest dáno jiné alternující číslo výrazem

$$B = b_1 e_1 + b_2 e_2 + \ldots + b_n e_n,$$

čistě praktické a to zdokonalení mechanismů tak zv. parallelogrammů (nejznámější jest parallelogram Wattův). Práce Čebyševovy o interpolaci teprve v poslední době docházejí náležitého ocenění. Srovnej F. Klein, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, 1902, str. 166 a násl.

dostaneme snadno roznásobením a užitím (1) a 2)

$$AB = (a_1 b_2 - a_2 b_1) e_1 e_2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1) e_1 e_3 + \dots$$
$$+ (a_{n-1} b_n - a_n b_{n-1}) e_{n-1} e_n ;$$

dle výsledku tohoto platí

$$AB = - BA, \; A^2 = 0$$

a jsou tudíž vztahy (1) a (2) pro jednotky základní platné platny též pro libovolná alternující čísla. Zvlášť pak platí, že součin několika alternujících čísel vždy rovný jest nulle, kdykoliv dva činitele v tom součinu jsou si rovny. Rovněž jest $(A + kB)B = AB$, je-li k skalár atd.

Při definici determinantu*) vycházíme od součinu alternujících čísel

$$(a_{11} e_1 + a_{12} e_2 + \dots + a_{1n} e_n)(a_{21} e_1 + a_{22} e_2 + \dots$$
$$+ a_{2n} e_n) \dots (a_{n1} e_1 + a_{n2} e_2 + \dots + a_{nn} e_n) ; \quad (3)$$

tento součin, jak snadno se ukáže, rovná se součinu z výrazu $e_1 e_2 \dots e_n$ a funkce skalárů a_{ik}, jíž říkáme determinant. Snadno plyne shoda této definice s definicí běžnou.

Základní vlastnosti determinantů, věta Laplaceova, věty o součinu dvou matic plynou hravě na základě výrazu (3) pro determinant; i výpočet různých determinantů zvláštních velmi jest definicí (3) usnadněn. Rovněž rozšíření pojmu determinantu obyčejného zavedením determinantů kubických a odvození jich vlastností bez jakýchkoliv potíží plynou. Výkladům těmto jsou věnovány kapitoly I.—V., IX.

Mimo to pojednáno jest v knize této o determinantech z determinantů (compound determinants) a odvozeny některé důležitější věty o nich jako Sylvestrova, Frankova.**)

Další kapitoly pojednávají o arithmetických vlastnostech determinantů, o determinantech speciálních, determinantech nekonečných, determinantech z racionálních funkcí, o užití na bilineární a kvadratické formy, na zlomky řetězové. Pak o eliminaci, o determinantech funkcionálních a Hesseových, o determinantech z funkcí jedné proměnné. Zakončeno jest pak dílo pojednáním o applikacích determinantů na geometrii a četnými příklady ku cvičení.

Výklad vyniká při vší stručnosti snadnou srozumitelností a velikou jednoduchostí a lze tuto knihu vřele studujícím a přátelům mathematiky k četbě doporučiti. *r.*

---

*) Definice tato pochází od Grassmanna.

**) Zajímavá jest v té příčině poznámka literární na str. 287, kde se praví, že F. Schweins ve svém díle »Theorie der Differenzen und Differenziale u. s. w.« (Heidelberg, r. 1825.) uveřejnil některé důležité výsledky o determinantech z determinantů. Knize však dostalo se buď malé anebo žádné pozornosti a výsledky Schweinsovy později od Sylvestra, Kroneckra a jiných znovu byly objeveny.