Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Jan Vojtěch

Geometrické transformace prvního stupně v rovině a jejich grupy. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 35 (1906), No. 4, 377--397

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121600

Geometrické transformace prvního stupně v rovině a jich grupy.

Napsal dr. **Jan Vojtěch** v Lipníku.

(Dokončení.)

K témuž přivádí jednoduchá úvaha geometrická: Majíce na zřeteli (obr. 10.) trojúhelník aa_1a_2 (a bod původní, a_1, a_2 první a druhý transformovaný) a označíce průsečíky stran jeho aa_1, a_1a_2, a_2a s osou resp. a_0, a'_0, a''_0, můžeme psáti $\frac{a_1a_0}{aa_0} = p$, $\frac{a_2a'_0}{a_1a'_0} = p'$; veďme bodem a_2 s osou rovnoběžku, jež protne aa v bodě a^*, pak jest

$$\frac{a_2a''_0}{aa''_0} = \frac{a^*a_0}{aa_0}, \quad \frac{a^*a_0}{a_1a_0} = \frac{a_2a'_0}{a_1a'_0},$$

z druhé

$$a^*a_0 = \frac{a_2a'_0}{a_1a'_0} \cdot a_1a_0$$

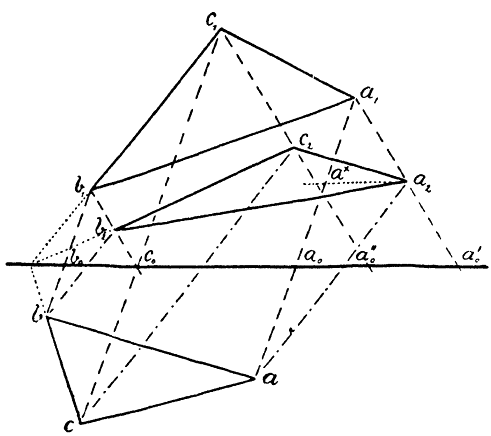
dosadíme do první, i vychází

$$\frac{a_2a''_0}{aa''_0} = \frac{a_1a_0}{aa_0} \cdot \frac{a_2a'_0}{a_1a'_0} = p \cdot p'.$$

Obdobně každý trojúhelník z bodu původního a obou transformovaných (bb_1b_2, cc_1c_2, . .) jest protat osou tak, že průsečík její se stranou třetí (bb_2, cc_2, . . .) dělí tuto v poměru pp'; rovněž jsou třetí strany všechny spolu rovnoběžny (aa_1a_2, bb_1b_2, . . . podobné a podobně položené); souvisí proto útvar $a_2b_2c_2$ s abc perspektivní affinitou poměru pp'.

Podobným postupem lze nalézti i dokázati, že také produkt dvou perspektivních affinit *při různých osách* a *pevném směru* (ovšem spolu při libovolných poměrech) jest zase perspektivní affinita téhož směru, jejíž poměr je součinem jednotlivých poměrů a jejíž osa prochází průsečíkem os jednotlivých. Tvoří tedy také persp. affinity pevného směru grupu ∞^2 členů.

Avšak dvě affinity perspektivní *různých os i středů*, applikovány postupně na rovinu, nemají výsledkem vztah perspektivně affinní. Vztah ten jest však vyjádřen lineárními celými (v x, y) výrazy pro x_2, y_2, jak nalezneme pouhým propočítáním, usta-



Obr. 10.

novíce nejprve rovnice pro perspektivní affinitu při ose obecně položené (týmž způsobem jako nahoře při ose X) a spojíce potom substitucemi dvojí takové rovnice, příslušící dvěma persp. affinitám. Jest tedy tento vztah affinita neperspektivní, obecná; složíme-li tuto affinitu s kteroukoli transformací z dosud uvažovaných, na př. s pohybem, nedostaneme transformaci podstatně obecnější. *Obecná affinita* neboli *transformace lineární* (v tom smyslu, že rovnice její jsou lineární *celé* funkce souřadnic bodových) je transformace, zahrnující všechny dosavadní jako zvláštní případy. Obecná affinita převádí bod (x, y) v (x_1, y_1), při čemž platí

$$x_1 = ax + by + c,$$
$$y_1 = dx + ey + f.$$

Perspektivní affinita mění tvar i velikost útvarů rovinných; avšak plocha každého útvaru transformovaného jest k ploše původního útvaru v konstantním poměru $= p$. Jestliže totiž útvar abc přechází zde v útvar $a_1 b_1 c_1$, jest zajisté $abc = a_0 a c c_0 + c c_0 b b_0 - a_0 a b b_0$, podobně $a_1 b_1 c_1 = a_0 a_1 c_1 c_0 + c_0 c_1 b_0 b_1 - a_0 a_1 b_1 b_0$, lichoběžníky uvedené mají však stejné výšky a strany v poměru p; jest proto i $\frac{a_1 b_1 c_1}{abc} = p$. Stejně vychází užitím souřadnic a determinantů (píšeme-li místo $\frac{p-1}{k}$, stručně e):

$$\triangle a_1 b_1 c_1 = \begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x'_1, & y'_1, & 1 \\ x''_1, & y''_1, & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x + ey, & py, & 1 \\ x' + ey', & py', & 1 \\ x'' + ey'', & py'', & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x, & py, & 1 \\ x', & py', & 1 \\ x'', & py''. & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} ey, & py, & 1 \\ ey', & py', & 1 \\ ey'', & py'', & 1 \end{vmatrix} = p \begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ x', & y', & 1 \\ x'', & y'', & 1 \end{vmatrix} + 0 = p \,.\, \triangle abc.$$

Útvar geom. a ten, jenž z něho vychází applikací dvou zcela různých persp. affinit, mají ovšem též stálý poměr ploch; také s druhé strany, poněvadž z dosavadních transformací některé velikost plochy vůbec nemění (pohyb se svými zvl. případy, osová šikmá souměrnost, elace, stejnoplochá affinita) nebo ji mění podobným způsobem jako persp. affinita (homothetie, podobnostní affinita), mají útvary souvisící spolu obecnou affinitou *konstantní poměr ploch.*

Všechny affinity v rovině tvoří grupu; neboť applikujeme-li na U transformaci

$$\begin{cases} x_1 = ax + by + c, \\ y_1 = dx + ey + f, \end{cases}$$

na útvar tím vzniklý U_1 transformaci

$$\begin{cases} x_2 = a'x_1 + b'y_1 + c', \\ y_2 = d'x_1 + e'y_1 + f', \end{cases}$$

jíž přejde U_1 v U_2, souvisí U s U_2 transformací

$$x_2 = a'(ax + by + c) + b'(dx + ey + f) + c',$$
$$y_2 = d'(ax + by + c) + e'(dx + ey + f) + f',$$

což jest opět affinita. Vzorce pro lineární transformaci obsahují 6 koefficientů, z nichž každý může nabýti všech hodnot od $-\infty$ do $+\infty$, existuje tedy ∞^6 lineárních transformací v rovině.

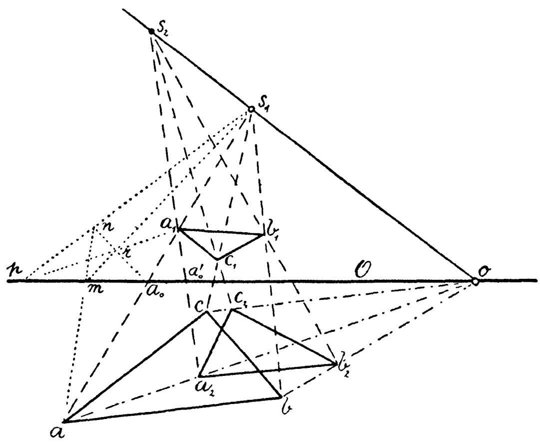
Každá affinita, jak jsme poznali, násobí všechny plochy geom. útvarů v rovině týmž číslem; na základě toho (i z rovnic pro affinitu) je jasno, že uzavřený útvar přechází nutně v uzavřený útvar, tedy bod a přímka v nekonečnu nemůže přejíti v bod nebo přímku v konečnu. Tím jsou affinity podstatně charakterisovány.

Z výsledků tohoto odstavce podtrhujeme: *Perspektivní affinita je určena osou, směrem a poměrem. Perspektivní affinity téže osy a téhož směru tvoří grupu ∞ členů záměnných; poměr výsledné transformace je součinem poměrů složek. Perspektivní affinity téže osy (téhož směru) tvoří grupu ∞^2 členů nekommutativních; poměr výsledné transformace je součinem poměrů složek. Dvě persp. affinity různých os i směrů jsou ekvivalentní obecné affinitě, jež body v konečnu převádí do bodů tamtéž, body v nekonečnu do bodů v nekonečnu; obecné affinity tvoří grupu ∞^6 členů.*

6. Přicházíme k nejdůležitějšímu doplnění transformací uvedených, totiž k transformaci daného útvaru (a celé roviny) v útvar *perspektivní* (*homologický*) vzhledem k pevnému *středu* homologie s a pevné *ose* homologie O. Bod $a, b, c, \ldots$ převedeme v homologický $a_1, b_1, c_1, \ldots$ dle s a O, jestliže sestrojíme na přímce $as, bs, cs, \ldots$ bod, jenž tvoří s bodem a, b, c vzhledem k bodu s a průsečíku $a_0, b_0, c_0 \ldots$ přímky $as, bs, cs, \ldots$ s osou O čtveřinu bodů stálého dvojpoměru. Dejme tomu, že přímka as protne O v bodě a_0; dělicí poměr bodu a vzhledem k s a a_0 jest $\frac{sa}{a_0a}$, dělicí poměr jiného bodu a_1 téže přímky vzhledem k týmž bodům základním s, a_0 jest $\frac{sa_1}{a_0a_1}$· předpis pak žádá sestrojiti a_1 tak, aby poměr těchto dělicích poměrů, totiž dvojpoměr $\frac{sa}{a_0a} : \frac{sa_1}{a_0a_1} = p$, kde p jest daná konstanta; jest tedy nutno, aby bylo

$$\frac{sa}{a_0a} : \frac{sa_1}{a_0a_1} = \frac{sb}{b_0b} : \frac{sb_1}{b_0b_1} = \frac{sc}{c_0c} : \frac{sc_1}{c_0c_1} = \ldots = p.$$

Vyšetřujme nejprve důležitý případ zvláštní, kdy $p = -1$; čtveřiny s, a_0, a, a_1; s, b_0, b, b_1; $s, c_0, c, c_1, \ldots$ slují harmonické. Homologie taková sluje *harmonická* a jest, jak hned uvidíme, involutorní. Sestrojíme tedy k danému útvaru útvar *harmonicky perspektivní* vzhledem k pevnému středu s a ose perspektivnosti O, spojíme-li každý bod jeho se středem s a nalezneme na této spojnici bod čtvrtý, s oním bodem harmonicky sdružený dle středu a průsečíku spojnice s osou.



Obr. 11.

nicky sdružený dle středu a průsečíku spojnice s osou. Dělicí poměr $\frac{sa_1}{a_0a_1}$ musí býti tedy absolutně roven poměru $\frac{sa}{a_0a}$, ale opačného označení.

Když jsme v rovině ustanovili střed a osu homologie, nalezneme pohodlně k bodu a bod harmonicky sdružený a_1 pouhým pravítkem pomocí úplného čtyrúhelníka a jeho úhlopříček (obr. 11.). Je-li bod a vně úsečky a_0s, volíme a_0, s za 2 vrcholy a as, O za dvě strany čtyrúhelníka, bodem a vedeme třetí stranu, jež protne O v 3. vrcholu m a čtvrtou stranu, vedenou bodem s v 4. vrcholu n; 5. a 6. strana a_0n, sm mají průsečík, který spojíme s průsečíkem p stran O a sn přímkou; tato stanoví na sa_0 bod hledaný a_1. Je-li bod a mezi body a_0, s, volíme zase a_0, s za 2 vrcholy, as, O za dvě strany čtyrúhelníka, bodem a vedeme úhlopříčku, jež protne O v bodě p, na ap zvolíme bod r a spojnice sr, a_0r vytknou na přímce O, resp. sp 3. a 4. vrchol čtyrúhelníka m, n; spojnice těchto mn stanoví na as bod a_1.

Je zřejmo, že a_1 odpovídá bodu a stejně jako a odpovídá bodu a_1, t. j. sestrojíme-li bod a_2, harmonicky sdružený k a_1 (harmonicky sdruženému k a) při pevné dvojici bodů základních a_0, s, jest $a_2 \equiv a$. Nazýváme tedy správně tuto perspektivní transformaci také involutorní (I): píšeme $I^2 = 1$. Spojnice všech dvojic korrespondujících bodů procházejí dle definice středem; korrespondující přímky protínají se na ose homologie, ježto každý bod osy je samodružný.

Analytické vyjádření transformace I dostaneme, volíce osu X za osu homologie, bod (a, b) za střed, ze vztahů:

$$\frac{a-x}{x_0-x} : \frac{a-x_1}{x_0-x_1} = -1, \quad \frac{b-y}{y_0-y} : \frac{b-y_1}{y_0-y_1} = -1,$$

$$\frac{b-y_0}{a-x_0} = \frac{y-y_0}{x-x_0},$$

z nichž první dvě vyjadřují (pro úsečky i pořadnice), že body (a, b), (x_0, y_0), (x, y), (x_1, y_1) tvoří harmonickou skupinu, třetí pak praví, že body (a, b), (x_0, y_0), (x, y) leží na přímce; ve shodě s uvedenou volbou píšeme $y_0 = 0$, dále volme $a = 0$, i dostaneme z 2. rovnice přímo y_1, z 3. pak a 1. obdržíme x_1 a sice

$$x_1 = \frac{bx}{-2y+b}, \quad y_1 = \frac{-by}{-2y+b}$$

$$\left(x_1 = \frac{x}{hy+1}, \quad y_1 = \frac{-y}{hy+1}, \quad \text{když položíme } -\frac{2}{b} = h.\right)$$

Ponecháme-li střed v obecné poloze (a, b), dostaneme transformační rovnice méně souměrné

$$x_1 = \frac{bx-2ay}{-2y+b}, \quad y_1 = \frac{-by}{-2y+b}.$$

Rovnice pro involutorní perspektivní transformaci jsou první, kde se vyskytuje souřadnice bodu v jmenovateli; jmenovatele výrazů pro x_1 a y_1 jsou stejné.

Jaký je výsledek dvou involutorně perspektivních transformací při pevné ose a různých středech homologie? Analyticky nalezneme snadno, že při ose X jako ose homologie jest

$$\begin{matrix} I_1 \\ s_1(a,\, b) \end{matrix} \left\{ \begin{aligned} x_1 &= \frac{bx - 2ay}{-2y + b} \\ y_1 &= \frac{-by}{-2y + b} \end{aligned} \right., \qquad \begin{matrix} I_2 \\ s_2(a',\, b') \end{matrix} \left\{ \begin{aligned} x_2 &= \frac{b'x_1 - 2a'y_1}{-2y_1 + b'} \\ y_2 &= \frac{-b'y_1}{-2y_1 + b'} \end{aligned} \right.$$

a tedy $I_2 \,.\, I_1$ má vzorce transformační:

$$x_2 = \frac{b'bx - 2y\,(ab' - a'b)}{-2y\,(b' - b) + b'b}, \quad y_2 = \frac{b'by}{-2y\,(b' - b) + b'b}$$

což, jak patrno, není už involutorní perspektivnost, ježto tyto vzorce nelze uvésti na tvar vzorců pro I (znaménko u $b'b$ v čitateli a jmen. výrazu pro y_2). Ve zvláštním případě, kdy spojnice obou středů s_1, s_2 je rovnoběžna s osou (t. j. $b' = b$), jest produkt $I_2 \,.\, I_1$ elace tvaru

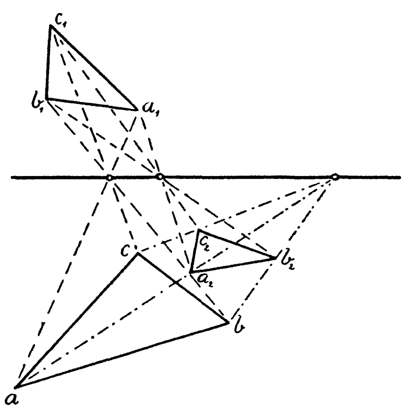
$$x_2 = x - 2y\left(\frac{a}{b} - \frac{a'}{b'}\right), \quad y_2 = y.$$

Jest proto na snadě nazvati obecnější tento případ $I_2 \,.\, I_1$ (kdy s_1 a s_2 mají obecnou polohu) *obecnou elací*, jestliže ve svých vlastnostech je elace dříve definovaná zvláštním případem této transformace.

Při elaci byly spojnice bodů sobě odpovídajících rovnoběžny s osou, majíce s ní tedy společný bod úběžný; při transformaci, ke které jsme teď dospěli, protínají se spojnice korrespondujících bodů v jediném bodě osy, jímž také prochází spojnice obou středů s_1, s_2 (obr. 11.). Neboť přechází-li útvar abc transformací I_1 v útvar $a_1b_1c_1$, tento pak transformací I_2 v $a_2b_2c_2$ (při čemž aa_1s_1 protíná O v a_0, $a_1a_2s_2$ v a'_0 atd.), tvoří body s_1, s_2, a_0, a'_0 vrcholy úplného čtyrúhelníka, jehož strany a_0s_1 a'_0s_2 jsou v bodech a, a_2 harmonicky děleny vzhledem k průsečíku svému a_1, procházejí proto přímky $a_0a'_0 \equiv O$, s_1s_2, aa_2 jediným bodem o (na ose), podobně přímky $b_0b'_0 \equiv O$, s_1s_2,

bb_2 atd., jest tedy bod o osy O průsečíkem všech spojnic korrespondujících bodů v útvarech U a U_2. — Že pak korrespondující přímky (na př. ab, a_2b_2, dále ac, a_2c_2 atd.) protínají se na ose O, netřeba dokazovati (ab protíná se s a_1b_1 v jediném bodě osy, a_1b_1 s a_2b_2 ovšem v témž bodě); tak odůvodněn název obecné elace. Její analytické vyjádření hořejší lze upraviti tím, že dělíme v čitateli i jmen. součinem $b'b$; vychází

$$x_1 = \frac{x - 2y\left(\frac{a}{b} - \frac{a'}{b'}\right)}{-2y\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b'}\right) + 1} = \frac{x + ny}{my + 1}, \quad y_1 = \frac{y}{my + 1}.$$

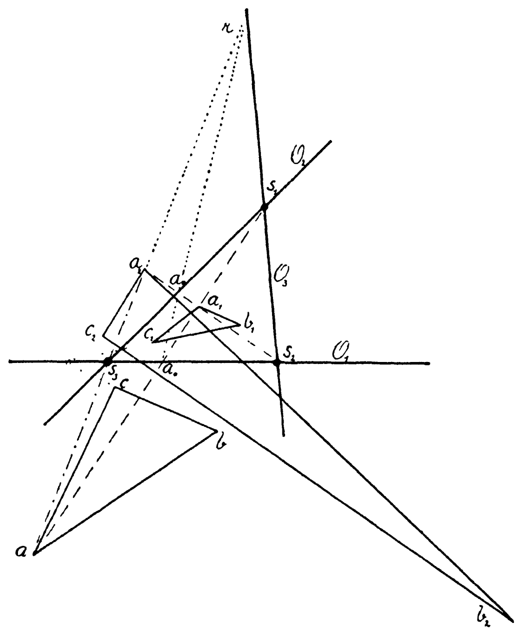


Obr. 12.

Volíme-li pak střed s_2 druhé invol. homologie tak, aby s_1s_2 procházela počátkem, t. j. $\frac{a'}{b'} = \frac{a}{b}$, máme jako nejjednodušší výraz obecné elace, jejíž osa leží v ose X a jejíž průsečík spojnic bodů korrespondujících (střed elace) jest v počátku souřadnic

$$E \begin{cases} x_1 = \dfrac{x}{my + 1}, \\ y_1 = \dfrac{y}{my + 1}. \end{cases}$$

Elace obecná jest, jak patrno, určena osou, středem na této a koefficientem m; os jest v rovině ∞^2, na každé možno voliti ∞ středů, při tom pak ∞ koefficientů, pročež jest různých obecných elací v rovině ∞^4.



Obr. 13.

Elace téže osy a téhož středu tvoří grupu ∞^1 transformací kommutativních a platí $E_{m'} \cdot E_m = E_{m+m'}$, t. j. koefficient výsledné elace jest součtem koefficientů složek, jak vychází pouhou substitucí ve vzorcích transformačních. Stejně nalezneme, že elace téže osy a různých středů tvoří grupu ∞^2 členů (obr. 12.), rovněž elace téhož středu a různých os, jdoucích tímto středem.

Dvě involutorní homologie I_1, I_2 v té zvláštní poloze, že osa druhé O_2 prochází středem prvé s_1 a střed druhé s_2 leží na ose prvé homologie O_1, transformují, postupně applikovány na útvar U, útvar ten v U_2; i souvisí U_2 s U involutorní perspektivností, jejíž střed $s_3 \equiv (O_1, O_2)$ a osa $\equiv s_1 s_2$ (obr. 13.). Neboť jestliže $a_1 = I_1\, a)$, $a_2 = I_2(a_1)$, tvoří body a_0, a'_0, s_1, s_2 vrcholy úplného čtyrúhelníka, jehož strany $s_1 a_0$, $s_2 a'_0$ protínají se v bodě a_1, strany $s_1 a'_0 \equiv O_2$, $s_2 a_0 \equiv O_1$ v bodě s_3, strany pak $s_1 s_2$, $a_0 a'_0$ v bodě r, jehož spojnice s bodem s_3 nutně prochází body a, a_2; tvoří pak na této úhlopříčce čtyrúhelníka body a_1, a_2 s body s_3, r harmonickou čtveřinu. Involutorní homologie I_1, I_2, $I_2 \,.\, I_1$ tvoří spolu s identickou transformací (1) čtyrčlennou grupu (jest totiž $I_1 I_2 = I_2 I_1$, $I_1^2 = 1$, $I_2^2 = 1$, $(I_1 I_2)^2 = 1$).

Obecná homologie určena je, jak bylo uvedeno, svojí osou, středem a poměrem; jest tedy různých homologií v rovině ∞^5.

Korrespondující body dvou útvarů obecně homologických procházejí dle definice středem, korrespondující přímky protínají se na ose, geometrickém to místě bodů samodružných. Stačí proto sestrojiti k jedinému bodu a útvaru U odpovídající bod a_1 útvaru U_1 tak, aby dvojpoměr jich vzhledem ke středu a průsečíku a_0 přímky $a a_1 s_1$ s osou byl roven danému. Chceme-li pak nalézti k bodu b korrespondující b_1, protneme osu přímkou ab v bodě b', v průsečíku pak přímek $s_1 b$ a $a_1 b'$ nachází se b_1.

Analytického vyjádření obecné perspektivnosti nabudeme obdobně jako prve z rovnic

$$\frac{a-x}{x_0-x} : \frac{a-x_1}{x_0-x_1} = p, \quad \frac{b-y}{y_0-y} : \frac{b-y_1}{y_0-y_1} = p, \quad \frac{b-y_0}{a-x_0} = \frac{y-y_0}{x-x_0},$$

při čemž zvolena osa X za osu homologie, střed její pak v bodě (a, b); nalezneme

$$P \left\{ \begin{aligned} x_1 &= \frac{bx + (p-1)ay}{(p-1)y + b} = \frac{x + (p-1)\frac{a}{b}\, y}{\frac{p-1}{b}\, y + 1} \\ y_1 &= \frac{bpy}{(p-1)y + b} = \frac{py}{\frac{p-1}{b}\, y + 1} \end{aligned} \right. ,$$

ve zvl. případě pak, kdy středem je bod $(0, b)$:

$$x_1 = \frac{bx}{(p-1)y + b}, \quad y_1 = \frac{bpy}{(p-1)y + b}.$$

Netřeba připomínati, že vzorce dříve uvedené pro homologii involutorní plynou z těchto pro $p = -1$. *Degenerovanými* (zvrhlými, singulárními) transformacemi lze nazvati homologie, jichž $p = 0$ nebo ∞; homologie poměru $p = 0$ převádí každý bod roviny v bod na ose, homologie poměru $p = \infty$ převádí každý bod roviny ve střed. Oboje vyplývá z transformačních vzorců nebo touto úvahou: v prvém případě jest

$$\frac{sa}{a_0a} : \frac{sa_1}{a_0a_1} = 0,$$

což je při libovolném a a pevném s (a tím stanoveném a_0 na pevné ose) možno pouze tím, že

$$\frac{sa_1}{a_0a_1} = \frac{sa_0 + a_0a_1}{a_0a_1} = \frac{sa_0}{a_0a_1} + 1 = \infty \text{ čili } \frac{sa_0}{a_0a_1} = \infty$$

čili $a_0a_1 = 0$, bod a_1 je totožný s a_0 na ose; v druhém případě jest

$$\frac{sa}{a_0a} : \frac{sa_1}{a_0a_1} = \infty \text{ t. j. } \frac{sa_1}{a_0a_1} = \frac{sa_0 + a_0a_1}{a_0a_1} = \frac{sa_0}{a_0a_1} + 1 = 0$$

čili $sa_0 = -a_0a_1$, $sa_0 = a_1a_0$, čili konečně $s \equiv a_1$.

Skládejme transformace perspektivní nejprve při pevné ose i středu (proměnlivé p), potom při pevné ose a konečně při pevném středu.

a) Jestliže $a_1 = P_{p1}(a)$, $a_2 = P_{p2}(a)$, jest $a_2 = P_{p2} \cdot P_{p1}(a)$; jakou transformací přechází a v a_2? (ovšem také b v b_2, c v c_2, d v $d_2, \ldots$). Ježto platí

$$\frac{sa}{a_0a} : \frac{sa_1}{a_0a_1} = p_1, \quad \frac{sa_1}{a_0a_1} : \frac{sa_2}{a_0a_2} = p_2, \text{ jest } \frac{sa}{a_0a} : \frac{sa_2}{a_0a_2} = p_1p_2,$$

t. j. a přechází v a_2 obecnou homologickou transformací středu s, osy O, poměru p_1p_2. Píšeme proto

$$P_{p1} \cdot P_{p2} = P_{p1 \cdot p2}.$$

Všechny homologie téhož středu a osy tvoří grupu ∞^1 členů kommutativních; dvojpoměr produktu dvou takových transformací je součinem dvojpoměrů složek.

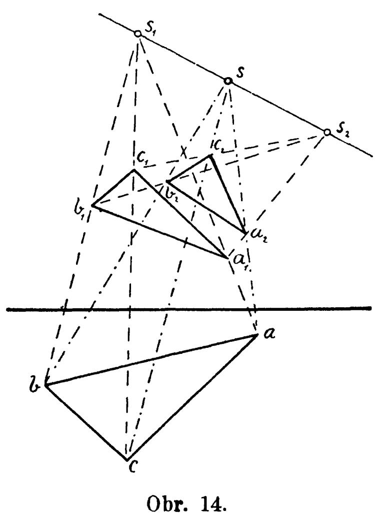
b) Při pevné ose homologie (ose X) a středech (a, b), (a', b') [poměrech p, p'] je výsledná transformace dána vzorci

$$x_2 = \frac{bb'x + \left(ab'(p-1) + a'bp\,(p'-1)\right) y}{\left(bp\,(p'-1) + b'(p-1)\right) y + bb'}$$

$$= \frac{x + \left(\frac{a}{b}\,\overline{p-1} + \frac{a'}{b'}\,p\overline{p'-1}\right) y}{\left(p\frac{p'-1}{b'} + \frac{p-1}{b}\right) y + 1},$$

$$y_2 = \frac{bb'pp'y}{\left(bp\,(p'-1) + b'(p-1)\right) y + bb'}$$

$$= \frac{pp'y}{\left(p\frac{p'-1}{b'} + \frac{p-1}{b}\right) y + 1}.$$



Obr. 14.

Transformace tato je zase homologie (obr. 14.); koefficient v čitateli výrazu pro y_2 udává dvojpoměr její, jest součinem jednotlivých poměrů pp'. Souřadnice středu jejího (a'', b'') nalezneme takto: b'' je součin převratné hodnoty koefficientu u y v jmenovatelích a dvojčlenu $pp' - 1$ (viz původní vzorce pro obecnou homologii, uvedené na tvar, kde absolutní člen v jmenovateli jest 1), tedy

$$b'' = \frac{bb'(pp'-1)}{bp(p'-1)+b'(p-1)}; \quad a'' = \frac{nb''}{pp'-1},$$

je-li n koefficient u y v čitateli výrazu pro x_2, tedy

$$a'' = \frac{ab'(p-1)+a'bp(p'-1)}{bp(p'-1)+b'(p-1)}$$

$$= \frac{a + a'\dfrac{bp(p'-1)}{b'(p-1)}}{1+\dfrac{bp(p'-1)}{b'(p-1)}} = \frac{a+a'\lambda}{1+\lambda},$$

kde

$$\lambda = \frac{bp(p'-1)}{b'(p-1)}.$$

Jest důvodná domněnka, že i b'' lze uvésti na tvar podobný $\dfrac{b+b'\lambda}{1+\lambda}$; skutečně se to podaří, rozšíříme-li čitatele výrazu pro b'' členy $bb'p - bb'p$, což ovšem hodnoty jeho nemění. Poněvadž pak souřadnice a'', b'' mají uvedený obdobný tvar $\varkappa a + \mu a'$, $\varkappa b + \mu b'$, leží nový střed na spojnici starých. Tvoří tedy homologie pevné osy, jichž středy leží na jediné přímce, grupu ∞^2 členů v souhlase s ∞ dvojpoměrů a ∞ poloh středu na přímce určené středy dvou homologií.

Aby transformace této grupy byly záměnné, jest nutno a stačí, by

$$\frac{a}{b}(p-1)+\frac{a'}{b'}p(p'-1) = \frac{a'}{b'}(p'-1)+\frac{a}{b}p'(p-1)$$

a spolu

$$\frac{p(p'-1)}{b'}+\frac{p-1}{b} = \frac{p'(p-1)}{b}+\frac{p'-1}{b'};$$

avšak z 1. rovnice vychází

$$\frac{a'}{b'} = \frac{a}{b},$$

z 2. pak $\dfrac{1}{b'} = \dfrac{1}{b}$, tedy $b' = b$, $a' = a$; nejsou proto homologie téže osy a různých středů kommutativní.

Podobně lze nalézti, že také perspektivní transformace téhož středu různých os, jež procházejí týmž bodem, tvoří grupu ∞^2 členů nekommutativních. Takové dvojice *duálních* vět (zvl. případy této) vyskytly se už v dřívějších úvahách.

Výsledná transformace perspektivní při pevné ose a různých středech nabude tvaru zvláštního, už známého, jestliže $p' = \frac{1}{p}$; pak totiž máme

$$x_2 = \frac{x + ny}{my + 1}, \quad y_2 = \frac{y}{my + 1},$$

kde položeno

$$m = \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b'}\right)(p - 1) \text{ a } n = \left(\frac{a}{b} - \frac{a'}{b'}\right)(p - 1);$$

jest to obecná elace.

Perspektivní transformace při obecné poloze osy i středu má výraz analytický méně jednoduchý, ač odvození jeho nečiní obtíže; plyne, zvolíme-li $uX + vY - 1 = 0$ za osu, bod (a, b) za střed, p za poměr, z rovnic

$$uX + vY - 1 = 0, \tag{1}$$

$$\frac{a - x}{X - x} : \frac{a - x_1}{X - x_1} = p, \quad \frac{b - y}{Y - y} : \frac{b - y_1}{Y - y_1} = p, \tag{2}$$

$$y_1 - b = \frac{b - y}{a - x}(x_1 - a); \tag{3}$$

z (1) a obou (2) vyloučíme nejprve X, Y, určíce je z (2) a dosadíce do (1), čímž vyjadřujeme, že bod, jenž s body (a, b), (x, y), (x_1, y_1) tvoří čtveřinu stálého dvojpoměru p, leží na ose; z rovnice, která vznikne, a z (3) určíme x_1, y_1. Rovnice (3) vyjadřuje, jak viděti, že body (a, b), (x, y), (x_1, y_1) leží na jednom paprsku. Zmíněný výraz analytický, který takto vyjde, jest

$$x_1 = \frac{xw + aM(p - 1)}{w + M(p - 1)}, \quad y_1 = \frac{yw + bM(p - 1)}{w + M(p - 1)},$$

kde k vůli stručnosti značí

$$M = xu + yv - 1, \quad w = au + bv - 1.$$

Jak patrno, jsou jmenovatele výrazů pro x_1 a y_1 sobě rovny, čitatele pak obdobně utvořeny.

Zajímavá je otázka, které body v rovině zůstávají při perspektivní transformaci na svém místě. K tomu je nutno a stačí, aby $x_1 = x$, $y_1 = y$; i dostáváme z hořejších vzorců rovnice

$$xw + xM(p-1) = xw + aM(p-1),$$
$$yw + yM(p-1) = yw + bM(p-1),$$

čili

$$M(x-a)(p-1) = 0,$$
$$M(y-b)(p-1) = 0.$$

I jest buď $M = 0$ nebo $x - a = 0$ a spolu $y - b = 0$ nebo $p - 1 = 0$; *invariantní* při homologii jsou tedy: všechny body osy homologie a střed homologie. Z $p - 1 = 0$ vychází $p = 1$, což znamená, že při perspektivní transformaci, jejíž dvojpoměr jest 1, zůstávají všechny body roviny beze změny; jest to identická transformace.

Přímka, jejíž body mají své korrespondující v nekonečnu, které tedy odpovídá přímka úběžná, má patrně rovnici

$$M(p-1) + w = 0,$$

neboť v tom případě vychází $x_1 = \infty$, $y_1 = \infty$. Rovnice uvedená zní určitěji $ux + vy = 1 - \frac{w}{p-1}$, jest rovnoběžná s osou homologie (jak svědčí stejné koefficienty u x, y). — Přímce úběžné odpovídá zase jiná přímka v konečnu, jejíž rovnici obdržíme, určíme-li z obou rovnic pro x_1, y_1 souřadnice x, y a položíme jmenovatel výrazů těch roven 0 (čili $x = \infty$, $y = \infty$).

Že perspektivní transformace jsou podstatným rozšířením dřívějších transformací, jest viděti z toho, že výrazy pro ně jsou lineární sice, ale lomené; bod v nekonečnu přechází v bod v konečnu a naopak.

Buďtež opakovány hlavní výsledky úvah tohoto odstavce: *Obecná homologie určena jest osou, středem a poměrem. V případě, kdy tento poměr $= -1$, je homologie involutorní. Dvě homologie involutorní s pevnou osou a různými středy jsou ekvivalentní obecné elaci. Elace je stanovena osou, středem na ní a konstantou; elace téže osy a téhož středu tvoří grupu ∞ členů záměnných, konstanta produktu elací této grupy je součtem* *konstant složek. Elace téže osy (téhož středu) tvoří grupu* ∞^2 *členů. Tři involutorní homologie, jejichž osy a středy jsou stranami a vrcholy trojúhelníka, tvoří s identitou grupu. Perspektivní (obecné) transformace téže osy i středu tvoří grupu* ∞ *členů záměnných. Homologie téže osy (středu), jichž středy (osy) leží na přímce (procházejí bodem), tvoří grupu* ∞^2 *členů nezáměnných; poměr výsledné homologie ve všech těch grupách je součinem poměrů složek. Dvě perspektivní transformace téže osy různých středů, jichž poměry jsou reciproké, dávají obecnou elaci, jejíž střed je v průsečíku spojnice oněch středů s osou (produkt dvou involutorních homologií je zvl. případ tohoto).*

7. Nejobecnější transformace, ke kterým jsme dosud dospěli, jsou obecná elace a obecná homologie.

Obecná elace ve zvláštní poloze (osa X osou, počátek středem) má transformační rovnice $x_1 = \frac{x}{my+1}$, $y_1 = \frac{y}{my+1}$; jest stanovena osou, středem a konstantou m. Její invariantní útvar, totiž útvar v rovině, jenž při elaci se nemění, sestává ze všech bodů osy a ze všech paprsků, jdoucích středem, jenž leží na ose. Neboť kterýkoli bod na ose na př. ξ, $\eta = 0$ přechází, jak vzorce ukazují, v bod $\xi_1 = \xi$, $\eta_1 = \eta = 0$, je tedy invariantní; podobně každá přímka $\eta = a\xi$ přechází v přímku $\eta_1 = a\xi_1$. Nutno si ovšem všimnouti, že každý paprsek jdoucí počátkem jest pouze jako celek invariantní. kdežto osa jest invariantní v každém svém bodě.

Obecná homologie jest určena osou, středem mimo ni ležícím a konstantním dvojpoměrem. Její invariantní útvar, jak bylo vyšetřeno, sestává ze všech bodů osy, ze středu a všech paprsků jdoucích středem; tyto paprsky jsou pouze invariantní jako celky, majíce ze svých bodů invariantní jen dva, střed a průsečík svůj s osou. Elaci lze pokládati za zvláštní případ homologie.

Jaký je výsledek dvou perspektivních transformací, jestliže střed druhé leží na ose prvé a osa druhé prochází středem první transformace? Snadno nalezneme *invariantní útvar* výsledné transformace: invariantními při prvé transformaci jsou s_1, každý paprsek skrze s_1, každý bod na O_1; z těchto prvků zůstanou invariantními i při druhé transformaci bod s_1, ježto leží na ose

O_2, bod s_2, ježto leží na ose O_1 a je teď středem, bod $s_3 \equiv (O_1, O_2)$, ježto leží na obou osách, potom spojnice $s_1 s_2$, ježto je paprskem skrze s_1 a také skrze s_2, konečně ostatní dvě spojnice $s_1 s_3$, $s_2 s_3$. Invariantní útvar výsledné transformace jest tedy trojúhelník v rovině, má 3 invariantní body a 3 invariantní paprsky.

Každému bodu v rovině odpovídá touto transformací patrně jediný bod, jakož není nesnadno ho sestrojiti; každé přímce v rovině odpovídá první perspektivní transformací přímka, této pak druhou homologií zase přímka, korresponduje tedy původní přímce výslednou transformací jediná přímka; konečně bodu na přímce korresponduje týmž postupem bod na korrespondující přímce. Odtud sluje výsledná transformace *kollineace* [1]) pojmenováním *Möbiusovým* (Der barycentrische Calcul 1827) nebo *homografie* názvem *Chaslesovým* (Traité de géométrie supérieure 1852).

Kollineace s invariantním trojúhelníkem může býti nazvána I. typem kollineace; jest produkt dvou perspektivních transformací.

Produkt dvou transformací, z nichž jedna jest homologie, druhá elace, je ovšem zase kollineace. Osa elace ať prochází, jako prve, středem homologie, střed elace pak ať leží na ose homologie. Invariantní útvar výsledné transformace, kollineace typu II., jest patrně složen z dvou bodů (obou středů), z přímky je spojující a z přímky druhé, jdoucí jedním z nich (středem elace).

Produkt dvou elací, kdy osa druhé prochází středem prvé elace (střed druhé neleží ani v středu druhé ani na ose druhé) je kollineace typu III. Invariantní útvar této kollineace skládá se z jediného bodu, středu první elace, a z jediné přímky, jím procházející, osy druhé elace; neboť body prvé osy přecházejí při druhé elaci v body jiné přímky, střed druhé elace pak se mění při prvé elaci.

Perspektivní transformace a elace jsou ovšem zvláštní typy kollineace, typ IV. a V., jejich invariantní útvary už uvedeny. [2])

---

[1]) jestliže leží bod na přímce, collineantur, leží korresp. bod na korresp. přímce, tato soumístnost se zachovává.

[2]) Sophus *Lie*-G. Scheffers, Vorlesungen über continuierliche Gruppen, Leipzig 1893 (zvl. str. 56 a násl., 288 a násl.). H. B. *Newson*, A new theory of collineations and their Lie groups, American Journal of mathematics XXIV. 1902. (str. 109 a násl.).

Abychom bez obtížných redukcí početních došli analytického výrazu pro kollineaci, složme obecnou affinitu s perspektivní transformací, jejímž středem je počátek souřadnic; obecná affinita má transformační rovnice:

$$x_1 = a_1 x + b_1 y + c_1, \quad y_1 = a_2 x + b_2 y + c_2,$$

zmíněná perspektivnost pak (z obecných vzorců pro $a = 0$, $b = 0$):

$$x_2 = \frac{x_1}{x_1 u (1 - p) + y_1 v (1 - p) + p},$$

$$y_2 = \frac{y_1}{x_1 u (1 - p) + y_1 v (1 - p) + p};$$

dosadíme-li za x_1 a y_1 do druhých rovnic, dostaneme jako výraz kollineace:

$$x_2 = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{N}, \quad y_2 = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{N},$$

kde

$$N = (a_1 u + a_2 v)(1 - p) x + (b_1 u + b_2 v)(1 - p) y + (c_1 u + c_2 v)(1 - p) + p,$$

stručněji psáno

$$x_1 = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_3 x + b_3 y + c_3}, \quad y_1 = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{a_3 x + b_3 y + c_3}. \qquad (1)$$

Vzorce tyto obsahují devět koefficientů, z nichž však jeden lze odstraniti, na př. c_3 tím, že čitatel i jmenovatel v obou zlomcích dělíme číslem c_3. V souhlase s tím existuje v rovině ∞^8 *různých kollineací; všechny* tyto *kollineace tvoří grupu.* Neboť jestliže kollineace K je dána vzorci (1), kollineace K' pak výrazy

$$x_2 = \frac{a'_1 x_1 + b'_1 y_1 + c'_1}{a'_3 x_1 + b'_3 y_1 + c'_3}, \quad y_2 = \frac{a'_2 x_1 + b'_2 y_1 + c'_2}{a'_3 x_1 + b'_3 y_1 + c'_3},$$

má transformace $K'K$ rovnice

$$x_2 = \frac{a'_1 (a_1 x + b_1 y + c_1) + b'_1 (a_2 x + b_2 y + c_2) + c'_1 (a_3 x + b_3 y + c_3)}{a'_3 (a_1 x + b_1 y + c_1) + b'_3 (a_2 x + b_2 y + c_2) + c'_3 (a_3 x + b_3 y + c_3)}$$

a podobný výraz pro y_2, oba lze ovšem stručně psáti

$$x_2 = \frac{a''_1 x + b''_1 y + c''_1}{a''_3 x + b''_3 y + c''_3}, \quad y_2 = \frac{a''_2 x + b''_2 y + c''_2}{a''_3 x + b''_3 y + c''_3}.$$

Ostatně jednoduchá úvaha svědčí také o tom, že dvě kollineace složeny dávají zase kollineaci; neboť jestliže první transformací přechází bod v bod, přímka v přímku a bod na přímce zase v bod na korrespondující přímce, děje-li se pak totéž i druhou transformací, není možno, aby obě transformace takové, provedeny postupně, vyvolaly nějakou změnu jinou. Vzorce pro souřadnice transformovaného bodu při transformaci kollineární jsou lomené a 1. stupně v souřadnicích původního bodu; bodové transformace 1. stupně jsou kollineace.

Všechny transformace v tomto článku vyšetřované jsou kollineace a plynou jako zvláštní případy z obecné kollineace dvojím způsobem, zvláštním zřetelem k bodům a přímce v nekonečnu a specialisací metrickou.

Sledujme zpátky zvláštní případy obecné kollineace a homologie. Obecná kollineace redukuje se požadavkem, aby bodu a přímce v nekonečnu odpovídaly bod a přímka v nekonečnu, na affinitu; affinita násobí plochy stálým činitelem, její zvláštní případ je podobnostní affinita, která vedle toho zachovává tvar. Je-li zmíněný stálý činitel = 1, máme jako zvláštní případ obecné affinity stejnoplochou affinitu a speciální případ podobnostní zase rotaci (pohyb). Obecná homologie, určená středem, osou a poměrem má především jako význačný zvláštní případ obecnou elaci, při níž střed leží na ose. Střed perspektivnosti může býti v nekonečnu: perspektivní affinita, její zvláštní případy jsou osová souměrnost šikmá a pravoúhlá (poměr = — 1, směr affinity svírá s osou úhel kosý nebo pravý). Je-li však osa perspektivnosti v nekonečnu a střed v konečnu, specialisuje se transformace perspektivní v homothetičnost (perspektivní a spolu podobnostní affinita), jejímž zvláštním případem je středová souměrnost ($p = -1$). Homologie (obecná i speciální) poměru $= -1$ jsou involutorní. Při elaci může ležeti střed v nekonečnu, osa v konečnu, což je elace affinní, nebo střed i osa v nekonečnu, což je translace.

Kollineace obecná (i všechny její zvláštní případy) může býti stanovena dvojicemi korrespondujících bodů. Obecná kollineace určena jest čtyřmi dvojicemi bodů sobě odpovídajících (obecně položených), a, a_1; b, b_1; c, c_1; d, d_1; dosadíme-li totiž souřadnice těchto bodů, vždy dvou korrespondujících do rovnic kollineace, obdržíme celkem osm rovnic lineárních, jež právě stačí k jednoznačnému výpočtu osmi koefficientů obecné kollineace. Další dvojice korrespondujících bodů nalezneme v průsečících korrespondujících přímek, totiž na př. přímek ac, bd a přímek a_1c_1, b_1d_1; tak lze v konstrukci nových dvojic pokračovati bez konce. — Obecná affinita stanovena jest třemi dvojicemi bodů zvolených za korrespondující; podobnostní affinita dvěma dvojicemi. Další dvojice bodů korrespondujících v obecné affinitě nalezneme na základě charakteristické vlastnosti affinity, že bod v nekonečnu přechází v jiný bod v nekonečnu čili že rovnoběžným přímkám odpovídají rovnoběžky; na př. průsečíku přímky vedené bodem c rovnoběžně s ab a přímky bodem a rovnoběžně s bc odpovídá průsečík rovnoběžky bodem c_1 k a_1b_1 a rovnoběžky bodem a_1 k b_1c_1. — Stejnoplochá affinita stanovena je třemi dvojicemi bodů s podmínkou, aby trojúhelníky jimi určené měly stejnou plochu; rotace stanovena dvěma dvojicemi bodů s podmínkou, aby vzdálenost bodů a, b rovnala se vzdálenosti bodů a_1, b_1. — Obecná homologie určena je třemi dvojicemi bodů a, a_1; b, b_1; c, c_1 s podmínkou, aby bod c_1 ležel na paprsku vedeném body c a (aa_1, bb_1); bod (aa_1, bb_1) je střed, přímka $[(ab, a_1b_1), (ac, a_1c_1)]$ osa homologie. Perspektivní affinita určena je také třemi dvojicemi bodů s podmínkami. aby přímky bb_1, cc_1 byly rovnoběžné s přímkou aa_1; osová šikmá souměrnost určena je dvěma dvojicemi bodů a, a_1; b, b_1 s podmínkou, aby bod b_1 ležel na rovnoběžce bodem b k aa_1, osa symmetrie pak ovšem prochází půlícími body úseček $\overline{aa_1}$, $\overline{bb_1}$. Osová pravoúhlá souměrnost stanovena je už jednou dvojicí bodů korrespondujících. Homothetičnost dána jest dostatečně dvěma dvojicemi bodů sobě odpovídajících a, a_1; b, b_1 s podmínkou, že bod b_1 leží na rovnoběžce bodem a_1 vedené k přímce ab; středová souměrnost určena je už jednou dvojicí bodů sobě příslušných, v půlícím bodě jich spojnice jest ovšem střed. — Elace obecná dána je úplně dvěma dvojicemi bodů korrespondujících affinní dvěma dvojicemi s podmínkou $aa_1 \parallel bb_1$, translace konečně jedinou dvojicí bodů sobě přiřazených. — Jak se potom geom. konstrukcí určí další dvojice při každé z uvedených transformací, ukazují vlastnosti dotčené transformace.

Poznámka. Vedle bodových transformací 1. stupně lze vyšetřovati takové, při nichž bodu neodpovídá bod, nýbrž přímka; vedle transformací 1. stupně jsou zvláště důležité transformace bodové 2. stupně, při nichž bodu sice odpovídá bod, ale přímce křivka 2. stupně, na př. kruh. Nejznámější kvadratickou transformací bodovou jest inverse, při níž bod transformovaný leží s původním na témž paprsku vedeném pevným bodem (středem inverse) a jest na něm stanoven požadavkem, že součin vzdáleností obou korrespondujících bodů od zmíněného středu jest konstantní. Volíme-li onen bod v počátku souřadnic a konstantu k, platí tedy

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = k, \quad \frac{y_1}{x_1} = \frac{y}{x},$$

odkudž plynou rovnice transformační

$$x_1 = \frac{kx}{x^2 + y^2}, \quad y_1 = \frac{ky}{x^2 + y^2}.$$

Jest patrno, že přímka $y = ax + b$ přechází touto transformací v křivku $b(x^2 + y^2) + akx - ky = 0$, tedy v kružnici

---

Některé drobnosti geometrické.

Podává **Václav Hübner**, professor na Král. Vinohradech.

Ze středu o kružnice vepsané do $\triangle abc$ spusťme kolmice $\overline{oa_1}$, $\overline{ob_1}$, $\overline{oc_1}$ na strany trojúhelníka $\overline{bc}$, $\overline{ac}$, $\overline{ab}$, a spojme paty těchto kolmic mezi sebou, čímž obdržíme $\triangle a_1b_1c_1$. Strany $\triangle a_1b_1c_1$ buďtež a_1, b_1, c_1 a vnitřní úhly α_1, β_1, γ_1.

O úhlech $\triangle a_1b_1c_1$ platí, že

$$\alpha_1 = \frac{\beta + \gamma}{2} = \frac{\alpha'}{2}, \quad \beta_1 = \frac{\alpha + \gamma}{2} = \frac{\beta'}{2} \text{ a } \gamma_1 = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\gamma'}{2},$$

značí-li α', β', γ' vnější úhly $\triangle abc$.

Je-li ϱ poloměr vepsané kružnice do $\triangle abc$ a tudíž $\triangle a_1b_1c_1$ opsané, jest

$$a_1 = 2\varrho \cos\frac{\alpha}{2} = 2\varrho \sin\frac{\alpha'}{2}, \quad b_1 = 2\varrho \cos\frac{\beta}{2} = 2\varrho \sin\frac{\beta'}{2},$$

$$c_1 = 2\varrho \cos\frac{\gamma}{2} = 2\varrho \sin\frac{\gamma'}{2}, \qquad 1)$$