Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 32 (1903), No. 5, 412--442

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121584

pročež hledaný plášť

$$\Pi = \pi \cdot \frac{m+n}{2} \sqrt{mn} \cdot \cos\alpha .$$

Úlohy.

Řešení úloh.

Úloha 21.

Úhly α, β, γ *sférického trojúhelníka mají se k jeho nadbytku* ε *v poměru* $\alpha : \beta : \gamma : \varepsilon = m : n : p : q$.

a) Ustanovte obsah trojúhelníka.

b) Dokažte, že trojúhelník jest pravoúhlý, je-li

$$m + n = p + q.$$

Řed. *A. Strnad* v Kutné Hoře.

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Závada,* stud. VII. tř. r. v Lipníku.)
Z dané úměry vyvodíme

$$\alpha = \frac{m\varepsilon}{q}, \quad \beta = \frac{n\varepsilon}{q}, \quad \gamma = \frac{p\varepsilon}{q}$$

a dosazením do rovnice

$$\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - 2R,$$

vypočítáme
$$\varepsilon = \frac{q \cdot 2R}{m + r + p - q}.$$

Jest proto obsah sférického trojúhelníka

$$\Delta = \frac{\pi r^2 \varepsilon}{180} = \frac{\pi r^2 q}{m + r + p - q}.$$

Při podmínce $m + r = p + q$,

jest
$$\varepsilon = \frac{q \cdot 2R}{2p} = \frac{qR}{p},$$

tudíž
$$\gamma = \frac{p\varepsilon}{q} = R;$$

trojúhelník jest tedy pravoúhlý.

Úloha 22.

Který jest středový úhel kruhové výseče, obsahuje-li kruh do výseče vepsaný 16°/₀ plochy celého kruhu?

Řed. *A. Strnad* v Kutné Hoře.

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Šabršula*, stud. VII. tř. r. v Uh. Brodě.)

Poloměr výseče budiž r, středový úhel 2α. Kruh do výseče vepsaný jest též vepsán v trojúhelník omezený prodlouženými dvěma poloměry výseče a tečnou v bodě půlícím příslušný oblouk.

Obsah tohoto trojúhelníka jest

$$\Delta = r^2 \operatorname{tg} \alpha$$

a obvod
$$2s = 2r \operatorname{tg} \alpha + \frac{2r}{\cos\alpha};$$

proto poloměr vepsaného kruhu

$$\varrho = \frac{\Delta}{s} = \frac{r \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \sec \alpha} = \frac{r \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}.$$

Z podmínky
$$\pi\varrho^2 = 0{\cdot}16\pi r^2,$$

vyplývá
$$\varrho = \frac{2}{5} r;$$

pročež k určení středového úhlu nabudeme rovnice

$$\frac{\sin \alpha}{1 + \sin \alpha} = \frac{2}{5},$$

z níž ustanovíme

$$\sin \alpha = \frac{2}{3}, \qquad \alpha = 41^0 48' 39''.$$

Druhé řešení. (Zaslal p. *Josef Mašata*, stud. VII. tř. g. v Hradci Králové.)

Střed vepsaného kruhu dělí poloměr r v části ϱ a $\frac{\varrho}{\sin \alpha}$; jest tedy

$$\varrho + \frac{\varrho}{\sin \alpha} = r \quad \text{čili} \quad \varrho = \frac{r \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}.$$

Z toho plynou ostatní výsledky jako při řešení prvním.

Třetí řešení. (Zaslal p. *Vladimír Heinrich*, stud. VIII. tř. g. v Příbrami.)

Podle sestrojení jest patrno, že

$$\varrho = r \operatorname{tg} \alpha \,.\, \operatorname{tg} \frac{R-\alpha}{2}$$

čili $$\varrho = r \,.\, \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \,.\, \frac{1-\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{2r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\left(1+\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)^2}.$$

Z podmínky $\varrho = \frac{2}{5} r$ vyplývá rovnice

$$\left(1+\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)^2 = 5 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2},$$

z níž $$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - 3 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + 1 = 0.$$

Z rovnice té vycházejí dvě řešení

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} (3 \pm \sqrt{5}),$$

z nichž však jen spodního znaménka užiti lze. Obdržíme

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} (3 - \sqrt{5})$$

a z toho úhel α jako nahoře.

Hodnota $$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} (3 + \sqrt{5})$$

vede k úhlu $\frac{\alpha}{2} > 45^0$, tedy k středovému úhlu vypuklému, do jehož výseče kruh vepsati nelze.

Úloha 23.

Pravoúhlý rovnoběžnostěn, jehož tělesná úhlopříčka $u = 91$, má tu vlastnost, že se délka její nezmění, a) zkrátíme-li délku rovnoběžnostěnu o 16, šířku o 4 a prodloužíme-li za to výšku o 12; b) zkrátíme-li délku o 27, šířku o 9 a prodloužíme-li výšku o 18. Které jsou jeho rozměry?

Prof. *Ant. Sýkora* v Rakovníku.

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Grössl*, stud. VI. tř. r. na Král. Vinohradech.)

Znamená-li x délku, y šířku a z výšku rovnoběžnostěnu, jest

$$x^2 + y^2 + z^2 = 8281,$$
$$(x - 16)^2 + (y - 4)^2 + (z + 12)^2 = 8281,$$
$$(x - 27)^2 + (y - 9)^2 + (z + 18)^2 = 8281.$$

Odečtouce rovnici druhou a třetí od prvé, nabudeme

$$4x + y - 3z = 52,$$
$$3x + y - 2z = 63,$$

odtud pak
$$y = 85 - x, \quad z = x + 11.$$

Vložíme-li tyto hodnoty do rovnice první, dojdeme rovnice

$$3x^2 - 148x = 935,$$

z níž ustanovíme kladný kořen

$$x = 55.$$

Druhé dva rozměry jsou

$$y = 30, \quad z = 66.$$

Úloha 24.

Který jest povrch i obsah kolmého hranolu, jehož podstava jest čtyrúhelník o stranách $a = 40$, $b = 13$, $c = 84$, $d = 75$ a jehož úhlopříčka $m = 51$ dělí jej v trojúhelníky o stranách abm, cdm; výška hranolu rovná se druhé úhlopříčce podstavy.

Prof. *Ant. Sýkora* v Rakovníku.

Řešení. (Zaslal p. *Adolf Mikulášek*, stud. VII. tř. r. v Hodoníně.)

Dle vzorce Heronova najdeme plochu

$$\triangle(a, b, m) = 156, \quad \triangle(c, d, m) = 1890,$$

tedy plocha podstavy jest

$$Z = 2046.$$

Volíce úhlopříčku m za základnu, najdeme výšku trojúhelníka (a, b, m)

$$v_1 = \frac{104}{17}$$

a výšku trojúhelníka (c, d, m)

$$v_2 = \frac{1260}{17}.$$

Paty těchto výšek mají vzdálenost

$$p = \sqrt{a^2 - v_1^2} - \sqrt{d^2 - v_2^2} = \frac{672}{17} - \frac{195}{17} = \frac{477}{17}.$$

Potom jest druhá úhlopříčka čtyrúhelníka

$$n = \sqrt{p^2 + (v_1 + v_2)^2} = \frac{1}{17}\sqrt{1364^2 + 477^2} = 85.$$

Proto jest povrch hranolu

$$\mathrm{P} = 2\mathrm{Z} + (a + b + c + d)\, n = 22112$$

a krychlový obsah

$$\mathrm{V} = \mathrm{Z}n = 173910.$$

Jiné řešení. (Zaslal p. *Ferdinand Sobota*, právník v Praze).

Z trojúhelníků *abm*, *cdm* snadno se dokáže, že

$$\sphericalangle ab + \sphericalangle cd = 180^0,$$

a tedy čtyrúhelník je vepsán do kruhu.

Je-li $\alpha = \sphericalangle ad$, jest dle vzorce známého

$$tg\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)\,(s-d)}{(s-b)\,(s-c)}};$$

při daných hodnotách nalezneme $tg\,\frac{\alpha}{2} = 1$, pročež $\alpha = 90^0$.

Druhá úhlopříčka čtyrúhelníka jest potom

$$n = \sqrt{a^2 + d^2} = 85.$$

Úloha 25.

Podstava kolmého jehlanu jest obdélník o ploše $P = 180$, součet boků jest 384, obsah jehlanu 720. Vypočítejte rozměry jehlanu.

Prof. *Ant. Sýkora* v Rakovníku.

Řešení. (Zaslal p. *Josef Klíma*, stud. VI. tř. r. v Karlíně.)

Znamenají-li x, y hrany podstavné, v výšku pyramidy, máme k určení těchto neznámých rovnice:

(1) $$xy = 180,$$

(2) $$x\sqrt{v^2 + \frac{y^2}{4}} + y\sqrt{v^2 + \frac{x^2}{4}} = 384,$$

(3) $$x\,y\,v = 2160.$$

Z rovnic (1) a (3) plyne $v = 12$; zavedeme-li hodnotu tuto do rovnice (2), nabudeme

$$x\sqrt{144 + \frac{y^2}{4}} + y\sqrt{144 + \frac{x^2}{4}} = 384.$$

Zdvojmocníme-li rovnici tuto a dosadíme za xy hodnotu z rovnice (1), bude

$$2\,(x^2 + y^2) + 15\sqrt{4\,(x^2 + y^2) + 2529} = 1823$$

a klademe-li $$\sqrt{4\,(x^2 + y^2) + 2529} = z,$$

$$z^2 + 30\,z = 6175$$

$$z = -15 \pm 80,$$

pročež $$z = \sqrt{4\,(x^2 + y^2) + 2529} = 65$$

a odtud $$x^2 + y^2 = 424$$

$$2\,xy = 360.$$

Z těchto rovnic plyne

$$x + y = 28$$

$$x - y = \pm 8,$$

tedy $$x = 18,\ y = 10.$$

Podstavné hrany jehlanu jsou tedy 10, 18, výška pak $v = 12$.

Úloha 26.

Daný kruh rozděliti jest ve dvě výseče tak, aby kruh vepsaný do jedné z nich byl podstavou kužele, jehož pláštěm jest výseč druhá.

Prof. *Ant. Sýkora* v Rakovníku.

Řešení. (Zaslal p. *Antonín Hrázdil*, stud. VIII. tř. gym. v Olomouci.)

Je-li poloměr daného kruhu $= a$, středový úhel (v míře obloukové) výseče, do níž máme vepsati základnu kuželovou, $= 2\xi$ a poloměr této základny $= x$, sestavíme z daných výminek snadno rovnice

$$\frac{x}{\sin\xi} + x = a$$

$$2\pi\,x = 2a\,(\pi - \xi).$$

Eliminujeme-li z rovnic těchto x, nabudeme

$$\xi\,(1 + \sin\xi) = \pi.$$

Této transcendentní rovnici vyhoví
$$\xi = \frac{\pi}{2};$$
pročež jest úhel výseče $2\xi = \pi$, t. j. daný kruh jest rozpůliti průměrem.

Úloha 27.

Pravidelný čtyrstěn rozdělen jest řezem jdoucím hranou ve dvě části, jichž povrchy mají se jako 1 : 2.

a) Který úhel tvoří řez se základnou?

b) V kterém poměru jsou obsahy obou částí?

c) V kterém poměru jsou poloměry koulí částem těm vepsaných?

Učitel *Frant. Jirsák* v Dobřenicích.

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Fiala*, stud. VII. tř. r. v Písku.)

Hranou $\overline{ab} = a$ položena jest rovina protínající čtyrstěn v trojúhelníku abf a dělící čtyrstěn ve dvě části $abcf$, $abdf$, jichž povrchy jsou v poměru 1 : 2. Označme $\overline{cf} = x$; jest potom
$$\overline{af} = \overline{bf} = \sqrt{x^2 - a\,x + a^2},$$
proto obsah řezu abf
$$\Delta = \frac{a}{2}\sqrt{\overline{af}^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{4}\sqrt{4\,x^2 - 4\,a\,x + 3\,a^2}.$$
Povrch P_1 čtyrstěnu odťatého $abcf$ jest pak
$$P_1 = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} + \frac{a\,x}{2}\sqrt{3} + \frac{a}{4}\sqrt{4\,x^2 - 4\,a\,x + 3\,a^2},$$
povrch P_2 čtyrstěnu $abdf$ vyjádříme
$$P_2 = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} + \frac{a\,(a - x)}{2}\sqrt{3} + \frac{a}{4}\sqrt{4\,x^2 - 4\,a\,x + 3\,a^2}.$$
Jelikož úloha žádá, aby bylo
$$P_1 : P_2 = 1 : 2,$$
nabudeme k určení x rovnice
$$a\sqrt{4\,x^2 - 4\,a\,x + 3\,a^2} = (a^2 - 6\,a\,x)\sqrt{3};$$
tuto rovnici zjednodušíme na
$$104\,x^2 - 32\,a\,x = 0,$$
odkud vypočítáme

$$x = \frac{4}{13} a .$$

a) Odchylka φ řezu od základny abc ustanoví se z trojúhelníka cfg, jehož vrchol g půlí hranu $\overline{ab}$. Jest pak

$$\overline{cf}^2 = \overline{cg}^2 + \overline{fg}^2 - 2 \, . \, \overline{cg} \, . \, \overline{fg} \, . \cos \varphi$$

čili

$$x^2 = \frac{3a^2}{4} + x^2 - ax + a^2 - \frac{a^2}{4}$$
$$- \frac{a\sqrt{3}}{2} \sqrt{4x^2 - 4ax + 3a^2} \, . \cos \varphi,$$

z čehož
$$\cos \varphi = \frac{a - 2x}{\sqrt{3(4x^2 - 4ax + 3a^2)}} .$$

Dosadíce za x hodnotu vypočítanou, shledáme, že

$$\cos \varphi = \frac{5}{33} .$$

b) Jelikož $x = \frac{4}{13} a$, jest vzdálenost bodu f od roviny abc

$$v_1 = \frac{4}{13} v = \frac{4}{13} \cdot \frac{a}{3} \sqrt{6} = \frac{4}{39} a \sqrt{6},$$

kdež v jest výška daného čtyrstěnu.

Jest proto obsah T_1 čtyrstěnu $abcf$

$$T_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{4} \sqrt{3} \cdot \frac{4}{39} a \sqrt{6} = \frac{a^3}{39} \sqrt{2},$$

obsah čtyrstěnu $abdf$

$$T_2 = \frac{a^3}{12} \sqrt{2} - \frac{a^3}{39} \sqrt{2} = \frac{3a^3}{52} \sqrt{2},$$

tudíž
$$T_1 : T_2 = 4 : 9 .$$

c) Označíme-li poloměry koulí vepsaných čtyrstěnům posléze jmenovaným ϱ_1, ϱ_2, jest

$$T_1 = \frac{1}{3} P_1 \varrho_1 \, , \, T_2 = \frac{1}{3} P_2 \varrho_2 ,$$

pročež
$$\varrho_1 : \varrho_2 = \frac{T_1}{P_1} : \frac{T_2}{P_2} = \frac{4}{1} : \frac{9}{2}$$

čili
$$\varrho_1 : \varrho_2 = 8 : 9 .$$

Úloha 28.

Vypočítati rozměry komolého kužele, jehož povrch $P = 1368\pi$ a povrch koule vepsané $P_1 = 864\pi$.

Učitel *Frant. Jirsák* v Dobřenicích.

Řešení. (Zaslal p. *Mikuláš Kössler*, stud. VIII. tř. akad g. v Praze.)

Základny kužele komolého mějte poloměry x, y; poloměr vepsané koule r rovná se polovici výšky v; strana kužele komolého jest
$$s = x + y.$$

Poněvadž $v^2 = (x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy$,

jest
$$r = 2\sqrt{xy}.$$

Dle podmínek úlohy jest povrch kužele
$$P = \pi\,[x^2 + y^2 + (x + y)^2] = 2\pi\,(x^2 + xy + y^2),$$

pročež
$$x^2 + xy + y^2 = 684;$$

povrch koule vepsané
$$P_1 = 4\pi r^2 = 4\pi xy,$$

tudíž
$$xy = 216.$$

Z posledních dvou rovnic ustanovíme
$$(x + y)^2 = 900$$
$$(x - y)^2 = 36,$$

z čehož
$$x = 18,\ y = 12.$$

Úloha 29.

Pláštěm kužele jest výseč úhlu 60^0.

V kterém poměru jest poloměr koule kuželi vepsané k poloměru koule opsané?

Učitel *Frant. Jirsák* v Dobřenicích.

Řešení. (Zaslal p. *Václav Bátěk*, stud. VIII. tř. g. na Král. Vinohradech.)

Je-li r poloměr základny kuželové, s poloměr výseče (strana kužele), jest
$$2\pi r = \frac{\pi s \,.\, 60}{180},$$

tudíž
$$s = 6r;$$

proto výška kužele
$$v = \sqrt{s^2 - r^2} = r\,\sqrt{35}.$$

Svírá-li strana kužele s osou úhel α, jest

$$\sin\alpha = \frac{1}{6}, \quad \cos\alpha = \frac{\sqrt{35}}{6}.$$

Poloměr koule vepsané v kužel jest

$$\varrho = \frac{r\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{r}{7}\sqrt{35};$$

poloměr koule opsané vyjadřuje vzorec

$$R = \frac{r}{\sin 2\alpha} = \frac{18r}{\sqrt{35}}.$$

Jest tedy

$$\varrho : R = \frac{\sqrt{35}}{7} : \frac{18}{\sqrt{35}}$$

čili zjednodušeně

$$\varrho : R = 5 : 18.$$

Úloha 30.

V ose X soustavy pravoúhlé dány body s (a, 0), s' (—a, 0). K libovolnému bodu m v rovině přidružen bod m' tak, že spojnice $\overline{sm}$, $\overline{s'm'}$ *protínají se na ose Y a spojnice* $\overline{mm'}$ *prochází počátkem O.*

a) Jsou-li x, y souřadnice bodu m, které souřadnice má bod m'?

b) Je-li geom. místem bodu m přímka, které jest geom. místo bodu m'?

Řed. *A. Strnad* v Kutné Hoře.

Řešení. (Zaslal p. *Vilibald Růžička*, stud. VII. tř. r. v Uh. Brodě.)

Buďtež x, y souřadnice bodu m v rovině obecně daného. Přímka $\overline{sm}$ má pak rovnici

$$\eta - y = \frac{y}{x-a}(\xi - x)$$

a úsek její na ose Y jest

$$b = \frac{ay}{a-x}.$$

Proto jest rovnice přímky $\overline{s'm'}$

$$\eta = \frac{y}{a - x}(\xi + a)$$

ve spojení s rovnicí spojnice $\overline{mm'}$

$$\frac{\eta}{\xi} = \frac{y}{x}$$

vyjadřuje vzájemnost souřadnic bodů $m(x, y)$ a $m'(\xi, \eta)$.

Z rovnic těch vyjádříme

$$\xi = \frac{ax}{a - 2x}, \quad \eta = \frac{ay}{a - 2x}$$

a naopak $$x = \frac{a\xi}{a + 2\xi}, \quad y = \frac{a\eta}{a + 2\xi}.$$

K bodu m můžeme dle rovnic těchto ustanoviti sdružený bod m', naopak také k bodu m' vyvoditi sdružený bod m. Je-li geom. místem bodu m přímka M určená rovnicí

$$\frac{x}{b} + \frac{y}{c} = 1,$$

obdržíme rovnici geom. místa bodu m', dosadíme-li za x, y hodnoty svrchu uvedené; bude pak

$$\frac{(a - 2b)\,\xi}{ab} + \frac{\eta}{c} = 1,$$

z čehož zřejmo, že místem M' jest opět přímka, protínající se s M na ose Y.

Poznámka redakční: Vyšetřovaná zde sdruženost jest zvláštní případ *kollineace* či *homologie.* Při tom jest *o středem* kollineace, *Y osou* kollineace; každý bod této osy jest samodružný, t. j. leží-li bod m na ose Y, sjednocuje se s bodem m'. To vysvítá z rovnic hořejších; je-li $x = 0$, jest $\xi = 0$, $\eta = y$, tudíž $m' \equiv m$.

Je-li $a - 2x = 0$, jest $\xi = \infty$, $\eta = \infty$; leží-li tedy bod m na přímce U dané rovnicí $a - 2x = 0$, jest bod m' úběžný. Naopak k bodu m' položenému na přímce $V' \equiv a + 2\xi = 0$ přísluší úběžný bod m.

Z té příčiny slovou přímky U, V' *úběžnicemi* soustavy.

Úloha 31.

Bodem m ($x_0 > 0$, $y_0 > 0$) stanoviti přímku protínající kladné části os souřadných tak, aby součet úseků na nich vzniklých byl co nejmenší. Řed. *A. Strnad* v Kutné Hoře.

Řešení. (Zaslal p. *Rudolf Kroutil*, stud. VIII. tř. g. v Kroměříži.)

Je-li rovnice přímky žádané

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

jest pro daný bod $m(x_0, y_0)$

$$\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} = 1.$$

Přímka má býti stanovena tak, aby součet

$$a + b = s$$

měl hodnotu minimálnou.

Vyloučíme-li b z posledních dvou rovnic, nabudeme k určení a rovnice kvadratické

$$a^2 - a(x_0 - y_0 + s) + sx_0 = 0,$$

ze které plyne

$$a = \frac{1}{2}\left[x_0 - y_0 + s \pm \sqrt{(x_0 - y_0 + s)^2 - 4sx_0}\right].$$

Aby řešení bylo realné, jest třeba a stačí, aby bylo

$$x_0 - y_0 + s \geqq 2\sqrt{x_0 s}$$

čili

$$(\sqrt{s} - \sqrt{x_0})^2 \geqq y_0.$$

Odtud vysvítá podmínka

$$\sqrt{s} \geqq \sqrt{x_0} + \sqrt{y_0};$$

jest tedy pro žádané minimum

$$s = (\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0})^2,$$

z čehož ustanovíme příslušné hodnoty úseků

$$a = x_0 + \sqrt{x_0 y_0},$$
$$b = y_0 + \sqrt{x_0 y_0}.$$

Dle toho lze žádanou přímku snadně sestrojiti.

Úloha 32.

Nalézti kružnici, která má střed v počátku pravoúhlé soustavy a rozpoluje obvod kruhu

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 = 0.$$

Prof. *R. Hruša.*

Řešení. (Zaslal p. *Jan Skála*, stud. VIII. tř. g. v Třebíči.) Dle první podmínky má kruh rovnici tvaru

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Aby týž kruh rozpoloval obvod kruhu K daného rovnicí

$$K \equiv x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 = 0,$$

jest nutno a stačí, by společná tětiva obou byla průměrem kruhu K, t. j. aby chordála tětivu tu obsahující šla středem kruhu K.

Rovnice chordály jest

$$6x + 6y - 9 - r^2 = 0,$$

a podmínka, že kruh hledaný půlí obvod kruhu K, jest

$$36 - 9 - r^2 = 0,$$

z čehož plyne $\qquad r^2 = 27.$

Proto rovnice hledaného kruhu jest

$$x^2 + y^2 = 27.$$

Úloha 33.

Nalézti kružnici, která, dotýkajíc se os souřadných, půlí obvod kruhu

$$K \equiv x^2 + y^2 - 4x - 6y + 5 = 0.$$

Prof. *R. Hruša.*

Řešení. (Zaslal p. *Jaroslav Seifert*, stud. VII. tř. r. v Karlíně.)

Kruh dotýkající se os souřadných má rovnici

$$x^2 + y^2 - 2xr - 2yr + r^2 = 0,$$

při čemž r se určí podmínkou, že hledaný kruh půlí obvod kruhu K. Poslední podmínka se převádí na podmínku, že chordála obou kruhů jde středem (2, 3) kruhu K.

Ježto rovnice chordály má tvar

$$2x(r - 2) + 2r(y - 3) + 5 - r^2 = 0,$$

vede zmíněná podmínka k rovnici

$$r^2 - 10r + 21 = 0,$$

z níž dostaneme hodnoty

$$r_1 = 3, \quad r_2 = 7.$$

Tedy 2 kruhy splňují vyslovené podmínky a rovnice jejich jsou

$$x^2 + y^2 - 14x - 14y + 49 = 0,$$
$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 = 0.$$

Úloha 34.

Nalézti kružnici, která rozpoluje obvod kruhů daných rovnicemi

$$K_1 \equiv x^2 + y^2 - 4 = 0$$
$$K_2 \equiv x^2 + y^2 - 2x - 2y - 8 = 0$$
$$K_3 \equiv x^2 + y^2 - 6x - 8y + 6 = 0.$$

Prof. *R. Hruša.*

Řešení. (Zaslal p. *Ignát Vališ*, stud. VIII. tř. g. v Brně.)

Rovnice hledaného kruhu jest tvaru

$$K \equiv (x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2.$$

Dle podmínky musí chordály kruhu toho a kruhů K_1, K_2, K_3 procházeti středy posledních.

Chordála kruhu K a K_1 jest

$$2xa + 2yb - a^2 - b^2 + c^2 = 4.$$

Pro $x = 0$, $y = 0$ máme podmínku

$$a^2 + b^2 - c^2 = -4.$$

Rovnice kruhu K jest pak

$$K \equiv x^2 + y^2 - 2ax - 2by - 4 = 0.$$

Chordála kruhu K a K_2 jest

$$2x(a - 1) + 2y(b - 1) - 4 = 0,$$

podobně chordála kruhu K a K_3

$$2x(a - 3) + 2y(b - 2) + 10 = 0.$$

Dosadíme-li za x, y do prvé rovnice hodnoty (1, 1), do druhé (3, 2), dostaneme pro a, b rovnice

$$a + b = 4,$$
$$3a + 2b = 8,$$

z nichž vychází $a = 0, \quad b = 4.$

Rovnice hledaného kruhu jest tedy

$$x^2 + y^2 - 8y - 4 = 0.$$

Úloha 35.

Nalézti rovnici kruhu, jehož středem jest počátek soustavy a jehož obvod rozděluje kruh K rovnice

$$K \equiv x^2 + y^2 - 6x - 8y + 6 = 0$$

v poměru 1 : 2.

Prof. *R. Hruša.*

Řešení. (Zaslal p. *Rudolf Žanta*, stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze.)

Rovnice hledaného kruhu má jistě tvar

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Má-li kruh K děliti obvod kruhu tohoto v poměru 1 : 2, musí společná chordála o $\frac{a}{2}$ od středu hledaného kruhu býti vzdálena.

Rovnice její jest

$$6x + 8y - a^2 - 6 = 0.$$

Vzdálenost od počátku $\frac{a^2+6}{10}$ má býti zrovna $\frac{a}{2}$. Z toho plyne

pro a rovnice $\qquad a^2 \mp 5a + 6 = 0,$

z čehož $\qquad a = \pm 3, \ \pm 2.$

Daným podmínkám hoví tedy dva kruhy rovnic

$$x^2 + y^2 = 9, \quad x^2 + y^2 = 4.$$

Úloha 36.

Bodem M (11, 11) vésti tečny k ellipse

$$2x^2 + 5y^2 = 77$$

a stanoviti délky jejich od bodu M až k bodům dotyčným, jakož i odlehlosti jejich od středu ellipsy.

Prof. *Antonín Sýkora* v Rakovníku.

Řešení. (Zaslal p. *J. Drábek*, stud. VI. tř. r. v Pardubicích.)

Pro dotyčné body nabudeme známým způsobem podmínkových rovnic

$$2x_1 + 5y_1 = 7,$$
$$2x_1^2 + 5y_1^2 = 77,$$

z nichž plyne $\qquad x_1 = 6, \quad x_2 = -4,$

$\qquad y_1 = -1, \quad y_2 = 3.$

Vzdálenost d_1 bodu m od dotyčného bodu $t_1\,(6, -1)$ jest

$$d_1 = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$$

a vzdálenost d_2 od dotyčného bodu druhého $t_2\,(-4,\ 3)$

$$d_2 = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17.$$

Vzdálenosti těchto tečen od středu křivky jsou

$$p_1 = \frac{77}{13}, \quad p_2 = \frac{77}{17}.$$

Poznámka redakční. Řešení této úlohy neposkytuje žádných obtíží; ale upozorňujeme čtenáře na sestavení úlohy této vzhledem k tomu, že výsledek (délky tečen) jest vyjádřen čísly racionalnými.

Úloha 37.

Jest dokázati větu:

Valí-li se tečna T po ellipse E, procházejí všechny ellipsy mající za poloosy úseky m, n, jež přímka T na (prodloužených) osách ellipsy E odtíná, vrcholy obdélníka ellipse této opsaného a k osám jejím souměrného.

Prof. *Ant. Sýkora* v Rakovníku.

Řešení. (Zaslal p. *Josef Hájek*, stud. VI. tř. r. v Karlíně.)

Úseky, jež tečna ellipsy v bodě (x_1, y_1) na osách odtíná, jsou

$$m = \frac{a^2}{x_1}, \quad n = \frac{b^2}{y_1};$$

ellipsa, mající tyto úseky za poloosy, má rovnici

$$\frac{x_1^2 x^2}{a^4} + \frac{y_1^2 y^2}{b^4} = 1,$$

anebo, jelikož

$$\frac{y_1^2}{b^2} = \frac{a^2 - x_1^2}{a^2},$$

$$\frac{x_1^2 x^2}{a^2} + \frac{(a^2 - x_1^2) y^2}{b^2} = a^2,$$

kdež x_1 libovolný parametr značí.

Klademe-li zde $x = a$, $y = b$, jest této rovnici vyhověno, čímž věta vyslovená jest dokázána.

Úloha 38.

Sestrojiti ellipsu, dán-li vrchol její A, příslušné k němu ohnisko F a délka druhé osy CD = 2b.

Prof. *Jan Schimek* ve Št. Hradci.

Řešení. (Zaslal p. *Antonín Růžička,* stud. VIII. tř. g. v Chrudimi.)

Označíme-li vzdálenost $AF = c$, máme k určení poloosy $OA = a$ a výstřednosti $OF = e$ rovnice

$$a^2 - e^2 = b^2,$$

$$a - e = c.$$

Jest tedy
$$a + e = \frac{b^2}{c},$$

pročež
$$2a = c + \frac{b^2}{c}, \quad 2e = \frac{b^2}{c} - c.$$

Vztyčíme-li v F kolmici

$$FG = b, \quad FG \perp AF$$

a ustanovíme-li v prodloužení AF bod B tak, že $BG \perp AG$, jest

$$AB = AF + FB = c + \frac{b^2}{c} = 2a,$$

pročež AB jest hlavní osa ellipsy.

Úloha 39.

Na parabole $y^2 = 2px$ ustanoviti bod, aby součet (rozdíl) průvodiče a normály bodu tomu příslušné měl hodnotu danou s. Zvláště vyšetřiti $s = 4p$.

Řed. *A. Strnad* v Kutné Hoře.

Řešení. (Zaslal p. *Jaroslav Kulhánek,* stud. VII. tř. r. v Karlíně.)

Bod hledaný m měj souřadnice x, y, o nichž v platnosti jest rovnice paraboly $y^2 = 2px$.

K bodu m náleží průvodič

$$r = x + \frac{p}{2} = \frac{y^2}{2p} + \frac{p}{2} = \frac{y^2 + p^2}{2p},$$

normala pak příslušná jest

$$n = \sqrt{y^2 + p^2}.$$

Dle podmínky $r + n = s$, dospějeme k rovnici

$$n^2 + 2pn - 2ps = 0,$$

z níž
$$n = -p \pm \sqrt{p^2 + 2ps}.$$

Znajíce hodnoty $n_{1,2}$ ustanovíme snadno příslušné k nim x a y.

Ve zvláštním případě $s = 4p$ bude

$$n_1 = 2p, \qquad n_2 = -4p;$$

k těmto hodnotám přísluší

$$r_1 = 2p, \qquad r_2 = 8p,$$

$$x_1 = \frac{3}{2}p, \qquad x_2 = \frac{15}{2}p,$$

$$y_1 = p\sqrt{3} \qquad y_2 = p\sqrt{15}.$$

Úloha 40.

K bodu m paraboly $y^2 = 2px$ sestrojen průvodič fm a pořadnice mn. a) Jest ustanoviti poloměr kružnice vepsané trojúhelníku fmn; b) vyšetřiti geom. místo středů kružnic způsobem tím vepsaných.

Řed. *A. Strnad* v Kutné Hoře.

Řešení. (Zaslal p. *Jan Michna,* stud. VII. tř. r. v Lipníku.) Strany trojúhelníka *fmn* jsou:

$$\overline{fm} = x + \frac{p}{2} = \frac{y^2 + p^2}{2p}, \ \overline{fn} = x - \frac{p}{2} = \frac{y^2 - p^2}{2p}, \ \overline{nm} = y.$$

Jest tedy obvod jeho

$$2s = 2x + y = \frac{y^2 + p^2}{p},$$

obsah

$$\Delta = \frac{y(y^2 - p^2)}{4p};$$

poloměr kružnice vepsané

$$\varrho = \frac{\Delta}{s} = \frac{y - p}{2}.$$

Souřadnice středu této kružnice vyjádříme hodnotou ϱ takto:

$$\xi = x - \varrho, \ \eta = \varrho, \ \xi + \eta = x.$$

V rovnici poslední nahradíme x hodnotou z rovnice paraboly, načež

$$\xi + \eta = \frac{y^2}{2p};$$

poněvadž však

$$\eta = \frac{y - p}{2},$$

tedy

$$y = 2\eta + p,$$

dospějeme k rovnici geometrického místa žádaného

$$\xi + \eta = \frac{(2\eta + p)^2}{2p},$$

kterou lze upraviti na tvar

$$4\eta^2 + 2p\eta + p^2 = 2p\xi.$$

Křivka jest parabola, jejíž vrchol má souřadnice $\left(\frac{3}{8}p, -\frac{p}{4}\right)$; osa jest rovnoběžná s osou X. Ku hledanému místu geometrickému náleží ještě druhá parabola, s vyšetřenou dle osy X souměrně položená.

Poznámka redakční. Vyvození podané má platnost jen potud, pokud jest $x > \frac{p}{2}$.

Je-li $x < \frac{p}{2}$, jest obvod trojúhelníka fmn

$$2s = \left(x + \frac{p}{2}\right) + \left(\frac{p}{2} - x\right) + y = p + y$$

a obsah trojúhelníka

$$\varDelta = \frac{y}{2}\left(\frac{p}{2} - x\right) = \frac{y(p^2 - y^2)}{4p};$$

tudíž jest pak

$$\varrho = \frac{\varDelta}{s} = \frac{y(p - y)}{2p}.$$

Střed kružnice vepsané má souřadnice

$$\xi = x + \varrho, \quad \eta = \varrho,$$

při čemž

$$x = \frac{y^2}{2p}, \quad y^2 - py + 2p\eta = 0.$$

Vyloučíce x, y, ϱ z těchto čtyř rovnic, obdržíme rovnici geom. místa středů pro $x < \frac{p}{2}$

$$2\xi^2 = p(\xi + \eta);$$

pro negativné y bylo by

$$2\xi^2 = p(\xi - \eta).$$

Z toho patrno, že *vyšetřované místo geometrické skládá se ze čtyř oblouků parabolických.*

Úloha 41.

Do barometrické trubice průřezu q (cm^2), jejíž evakuovaný prostor má výšku v (cm), vnikl vzduch, tak že pozorovaný tlak p_1 (cm) nutno opraviti korrekcí k_1 (cm) na skutečný tlak vzduchu. Jak velká bublinka vzduchu x (cm^3) vnikla do barometru? Jak velkou korrekci k má tlakoměr při pozorovaném tlaku p? Kolik se odečítá na něm při skutečném tlaku p_2? Vypočtěte hodnoty x a k, když $q = 1\ cm^2$, $v = 8\ cm$, $p_1 = 71{\cdot}1\ cm$, $k_1 = 0{\cdot}9\ cm$, $p = 74\ cm$ a $p_2 = 76\ cm$.

Dr. *Vl. Novák* v Brně.

Řešení. (Zaslal p. *Miloš Kössler*, stud. VIII. tř. akad. g. v Praze.)

Je-li objem vzduchu p pod tlakem $p_1 + k_1$, objem vzduchu v barom. trubici vq pod tlakem k_1, jest dle zákona Boyleova

$$vqk_1 = x(p_1 + k_1),$$

odtud

$$x = \frac{vqk_1}{p_1 + k_1}.$$

Při pozorovaném tlaku p má vzduch v barom. trubici objem $(v + p_1 - p)q$ a jeho tlak jest k; dle zákona Boyleova jako dříve jest

$$kq(v + p_1 - p) = vqk_1,$$

tudíž

$$k = \frac{vk_1}{v + p_1 - p}.$$

V číselném případě vypočítáme

$$x = \frac{8 \,.\, 0{\cdot}9}{71{\cdot}1 + 0{\cdot}9} = \frac{7{\cdot}2}{72} = 0{\cdot}1\ cm^3,$$

$$k = \frac{8 \,.\, 0{\cdot}9}{8 + 71{\cdot}1 - 74} = \frac{7{\cdot}2}{5{\cdot}1} = 1{\cdot}4\ cm.$$

Při skutečném tlaku p_2 jest pozorovaný tlak p', a tudíž korrekce

$$k_2 = p_2 - p'.$$

Dle zákona Boyleova platny jsou rovnice

$$k_2(v + p_1 - p')q = vqk_1,$$

$$k_2[v + p_1 - (p_2 - k_2)]q = vqk_1,$$

$$k_2(v + p_1 - p_2) + k_2^2 = vk_1,$$

z nichž vyvodíme

$$k_2 = -\frac{v + p_1 - p_2}{2} \pm \sqrt{\frac{(v + p_1 - p_2)^2}{4} + vk_1}.$$

Ve zvláštním případě daném jest

$$k_2 = -1{\cdot}55 \pm \sqrt{1{\cdot}55^2 + 7{\cdot}2}.$$

Positivná hodnota k_2, kterou od p_2 jest odečísti, jest tudíž

$$k_2 = 1{\cdot}55.$$

Úloha 42.

Poloměry dvou malých kulových vodičů jsou v poměru 2 : 3. Menší koule má náboj + 1, větší má neznámý náboj negativní — x. Jak velký jest tento náboj, nezmění-li se vzájemné působení obou koulí, spojíme-li je teninkým drátem?

Dr. *Vl. Novák* v Brně.

Řešení. (Zaslal p. *Adolf Mikulášek*, stud. VII. tř. r. v Hodoníně.)

Budiž poloměr koulí r_1 a r_2, vzdálenost jich středů y.

Síla, se kterou se koule přitahují, jest

$$f = \frac{e \, . \, x}{y^2}, \tag{1}$$

kde e značí náboj na první kouli.

Spojíme-li obě koule, jest společný potencial

$$v = \frac{e - x}{r_1 + r_2};$$

na menší kouli vznikne náboj vr_1, na větší náboj vr_2, i jest tudíž

$$f = \frac{vr_1 \, . \, vr_2}{y^2}, \tag{2}$$

z čehož spojením s rovnicí (1)

$$ex = v^2 r_1 r_2$$

a dosazením hodnoty pro v

$$ex = r_1 r_2 \frac{(e - x)^2}{(r_1 + r_2)^2}$$

čili

$$ex = \frac{(e - x)^2}{\frac{r_1}{r_2} + 2 + \frac{r_2}{r_1}}.$$

V daném případě číselném jest

$$x = \frac{6\,(1 - x)^2}{25} \quad \text{čili} \quad x^2 - \frac{37}{6} x + 1 = 0.$$

Jelikož $x_1 = 6, \quad x_2 = \frac{1}{6},$

jest tudíž $-x_1 = -6, \quad -x_2 = -\frac{1}{6}.$

Koule druhá má náboj -6 nebo $-\frac{1}{6}$ jednotky.

Úloha 43.

Poměr kapacit dvou lejdských lahví jest k. Lahev první byla nabita a vybita. Na to se nabije znovu na týž potencial a vybije částečně spojením vnitřních polepů s druhou dosud nenabitou lahví. Konečně vybije se každá lahev pro sebe. Jest dokázati, že energie čtyř oněch výbojů jsou v poměru

$$(k+1)^2 : (k+1) : k^2 : k.$$

Dr. *Vl. Novák* v Brně.

Řešení. (Zaslal p. *Vilibald Růžička*, stud. VII. tř. r. v Uher. Brodě.)

Budiž kapacita láhve první c_1, láhve druhé c_2; mimo to jest $\frac{c_1}{c_2} = k$. Potencial první lahve budiž V. Poněvadž energie rovná se $\frac{1}{2}$ kapacity násobené čtvercem potencialu, jsou energie E_1, E_2, E_3, E_4 prvních 4 výbojů dány vzorci:

$$E_1 = \frac{1}{2} c_1 V^2,$$

$$E_2 = -\frac{1}{2}(c_1 + c_2)\frac{c_1^2}{(c_1+c_2)^2} V^2 + \frac{1}{2} c_1 V^2$$

$$= \frac{1}{2}\frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} V^2,$$

$$E_3 = \frac{1}{2} c_1 \frac{c_1^2}{(c_1+c_2)^2} V^2,$$

$$E_4 = \frac{1}{2} c_2 \frac{c_1^2}{(c_1+c_2)^2} V^2.$$

Odtud vyjádříme poměr energií

$$\mathrm{E}_1 : \mathrm{E}_2 : \mathrm{E}_3 : \mathrm{E}_4 = 1 : \frac{c_2}{c_1 + c_2} : \frac{c_1^2}{(c_1 + c_2)^2} : \frac{c_1 c_2}{(c_1 + c_2)^2}$$
$$= (c_1 + c_2)^2 : c_2 (c_1 + c_2) : c_1^2 : c_1 c_2$$
$$= \left(\frac{c_1}{c_2} + 1\right)^2 : \left(\frac{c_1}{c_2} + 1\right) : \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 : \frac{c_1}{c_2},$$

z čehož konečně

$$\mathrm{E}_1 : \mathrm{E}_2 : \mathrm{E}_3 : \mathrm{E}_4 = (k + 1)^2 : (k + 1) : k^2 : k.$$

Úloha 44.

Kolik akkumulatorů elektrom. síly 2·05 volt a vnitřního odporu 0·01 ohm jest nejméně potřebí ku světlu 100 žárovek vedle sebe spojených, vyžaduje-li každá lampa proud 0·75 ampère a napjetí 65 volt?

Dr. *Vl. Novák* v Brně.

Řešení. (Zaslal p. *Karel Rychlík,* stud. VII. tř. akad. g. v Praze.)

Nechať jest x počet akkumulatorů, e elektromotorická síla jednoho akkumulatoru, ϱ odpor akkumulatoru, úhrnná elektromotorická síla $= xe$. Potom jest úhrnný odpor $= x\varrho +$ odpor žárovek. Značí-li

e' napjetí m, jež vyžadují žárovky,

i intensitu proudu úhrnnou,

i' intensitu proudu pro jednu žárovku, jest

$$i = mi' \quad \text{a odpor žárovek} = \frac{e'}{i}.$$

Jest tedy

$$i = \frac{xe}{x\varrho + \frac{e'}{i}} = mi'.$$

V daném případě číselném vypočítáme

$$\frac{2{\cdot}05\, x}{0{\cdot}01\, x + \frac{65}{75}} = 100 \,.\, 0{\cdot}75,$$

z čehož $\qquad x = 50.$

Jest tedy potřebí 50 akkumulatorů za sebou spojených.

Úloha 45.

Pod skleněným zvonem ve vzduchu zapálí se proužek magnesia; povstalý kysličník naplní hořejšek zvonu v podobě husté mlhy, která se zvolna snáší. Jak velké jsou částice kysličníku, předpokládáme-li tvar kulový, snáší-li se oblak stálou rychlostí $v = 4 \frac{cm}{sec}$?

(*Specif. hmota MgO jest* $3{\cdot}22 \frac{g}{cm^3}$, *koefficient viskosity vzduchu* $\mu = 0{\cdot}000188$, *tangenciální síly vznikající viskositou určeny výrazem* $6\pi\mu va$, *kde a značí poloměr kulové částice padajícího prášku.*)

Dr. *Vl. Novák* v Brně.

Řešení. (Zaslal p. *Josef Szalaÿ*, stud. VIII. tř. g. v Olomouci.)

Aby povstal pohyb rovnoměrný, musí síly tangencialní vyrovnati se s vahou padající částice čili

$$6\pi\mu va = \frac{4}{3}\pi a^3 sg,$$

kde s značí specifickou hmotu částice, g urychlení tíže. Z toho vyplývá obecně

$$a = 3\sqrt{\frac{\mu v}{2sg}}.$$

V daném případě jest

$$a = 6\sqrt{\frac{0{\cdot}000188}{6{\cdot}44\,.\,981}} = 0{\cdot}0010\ cm.$$

Průměr částeček (kulových) jest tedy okrouhle $0{\cdot}02\,mm$.

Správná řešení úloh v tomto ročníku Časopisu obsažených zaslali pp.:

Altmann Josef, stud. VIII. tř. g. v Přerově, úl. 12., 21. až 40.
Archleb Jiří, t. č. správce internátu při zemské vyšší reálce v Jevíčku, úl. 21. až 40.

Barbořík Arnošt, stud. VI. tř. g. v Olomouci, úl. 22. až 26., 28., 29.
Bátěk Václav, stud. VIII. tř. g. na Král. Vinohradech, úl. 21., 22., 23., 28. až 39.
Baumann Josef, stud. VII. tř. r. v Hodoníně, úl. 21. až 24., 28., 29., 31., 32., 36., 38.
Bršlica Jan, stud. VIII. tř. g. v Uh. Hradišti, úl. 21. až 40.
Březina Ferdinand, stud. VII. tř. g. v Jindř. Hradci, úl. 21., 23., 24., 29.
Čupr Karel, stud. VII. tř. g. ve Vysokém Mýtě, úl. 21. až 40.
Dašek V., stud. V. tř. r. v Náchodě, úl. 21. až 25., 27. až 40.
Doležal Jaromír, stud. VIII. tř. g. v Pelhřimově, úl. 22. až 25., 28., 32., 36.
Drábek J., stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 21. až 40.
Duřpek Antonín, stud. VI. tř. r. v Prostějově, úl. 22. až 29., 38.
Eichler Jaroslav, stud. VII. tř. g. v Praze (Křemencová ul.), úl. 22., 25.
Eliáš Filip, bohoslovec v Olomouci, úl. 21. až 40.
Fiala František, stud. VII. tř. r. v Písku, úl. 21. až 40.
Fireš Josef, stud. VI. tř. g. v Hradci Králové, úl. 28., 29.
Frank K., stud. VI. tř. r. na Novém Městě v Praze, úl. 22., 23., 24., 28., 38.
Frantík Matouš, stud. VII. tř. g. v Olomouci, úl. 21. až 25., 28., 29., 30., 32., 36., 38., 39.
Fuchs Osvald, stud. VI. tř. r. na Novém Městě v Praze, úl. 38.
Grössl František, stud. VI. tř. r. na Král. Vinohradech, úl. 21. až 40.
Hájek Josef, stud. VII. tř. r. v Karlíně, úl. 21. až 40.
Hánek Karel, stud. VII. tř. r. v Karlíně, úl. 21., 32., 33., 35., 36.
Hassmann Antonín, stud. VII. tř. g. na Malé Straně v Praze, úl. 22., 28. až 35., 39., 40.
Heinrich Vladimír, stud. VIII. tř. g. v Příbrami, úl. 21. až 40.
Hrázdil Antonín, stud. VIII. tř. g. v Olomouci, úl. 21. až 40.
Hromádko Josef, stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 21. až 40.
Hutterer Rudolf, stud. VII. tř. r. na Král. Vinohradech, úl. 6., 20. až 40.
Charfreitág Vratislav, stud. VI. tř. r. v Kostelci n. Orl., úl. 24.
Kalina Dobroslav, stud. VII. tř. r. v Hradci Králové, úl. 12., 14., 21. až 40.
Kettner Jan, stud. VI. tř. r. v Karlíně, úl. 22. až 26., 28., 29., 38.
Klíma Josef, stud. VI. tř. r. v Karlíně, úl. 21. až 25., 28., 29., 38.

Kordina Karel, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 22., 23., 24., 28., 29., 32., 33., 36.
Kosmák František, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 21. až 36.
Kössler Miloš, stud. VIII. tř. akad. g. v Praze, úl. 21. až 40.
Kostelecký Josef, stud. VII. tř. r. v Brně, úl. 5., 7, 21. až 40.
Kovářík Otakar, stud. VIII. tř. g. v Kroměříži, úl. 21. až 40.
Kroutil Rudolf, stud. VIII. tř. g. v Kroměříži, úl. 21. až 40.
Kulhánek Jaroslav, stud. VII. tř. r. v Karlíně, úl. 21. až 40.
Kvěch Rudolf, stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 22., 29., 30., 33. až 40.
Lašek Alois, stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 22., 29., 30., 32., 33., 34., 36., 37., 39., 40.
Los František, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 21. až 40.
Ludvík Josef, stud. VI. tř. r. v Novém Městě na Moravě, úl. 21. až 28., 38.
Lupíšek Antonín, stud. VI. tř. r. v Žižkově, úl. 22.
Mancl Jaroslav, stud. VI. tř. r. v Plzni, úl. 22., 24., 26., 28., 29., 30., 38.
Marek František, stud. VIII. tř. g. v Českých Budějovicích, úl. 22. až 40.
Mareš František, stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 21. až 30., 32. až 36., 38., 39.
Mašata Josef, stud. VII. tř. r. v Hradci Králové, úl. 21. až 40.
Maýr Karel, stud. VI. tř. r. na Starém Městě v Praze, úl. 21. až 26., 28. až 36., 38., 39., 40.
Michna Jan, stud. VII. tř. r. v Lipníku, úl. 21. až 40.
Mikeska Alois, stud. VII. tř. g. v Místku, úl. 21. až 40.
Mikulášek Adolf, stud. VII. tř. r. v Hodoníně, úl. 21. až 40.
Müller Vojtěch, stud. VII. tř. g. v Olomouci, úl. 22., 28.
Neužil Innocenc, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 21. až 40.
Novák Antonín, stud. VIII. tř. g. v Pelhřimově, úl. 22. až 26., 28., 29., 30., 32., 33., 35., 36., 37.
Novák B., stud. VII. tř. g. v Rychnově nad Kněžnou, úl. 23.
Novák Jaroslav, stud. VI. tř. r. v Karlíně, úl. 22.
Novotný Jan, stud. VII. tř. r. v Českých Budějovicích, úl. 22., 23., 28. až 40.
Papež František, stud. VII. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 22., 23., 25., 27. až 30., 32. až 36.
Papřok Josef, stud. VI. tř. g. v Místku, úl. 21. až 29., 32., 35.
Petera Eduard, stud. VIII. tř. g. v Olomouci, úl. 22., 23., 25., 26., 29., 38.
Pícha Václav, stud. VI. tř. r. v Plzni, úl. 22., 23., 26., 28, 29.
Pithart Jaroslav, stud. VII. tř. r. v Hradci Králové, úl 21. až 40.

Pospíšil Petr, stud. VIII. tř. g. v Brně úl. 22. až 26., 28., 29., 30., 32. až 40.
Procházka B., svob. pán, stud. VII. tř. g. na Malé Straně v Praze, úl. 23. až 26.
Průša Vojtěch, stud. VII. tř. g. v Praze (Žitná ul.), úl. 21., 23., 24., 25., 28., 29., 32., 33.
Příbyl František, stud. V. tř. r. v Písku, úl. 22. až 25., 28., 29., 38.
Pšeničný Jan, stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 22., 23., 24., 26. až 40.
Raus František, stud. VI. tř. g. v Českých Budějovicích, úl. 22. až 29.
Růžička Antonín, stud. VIII. tř. g. v Chrudimi, úl. 22. až 25., 28., 29., 30., 32. až 36., 38., 39., 40.
Růžička Jan, učitel v Tetíně, úl. 22., 23., 24., 26., 28., 29., 32., 38.
Růžička Josef, stud. VI. tř. r. v Karlíně, úl. 22. až 25., 28., 29., 32., 33., 34., 36., 39.
Růžička Vilibald, stud. VII. tř. r. v Uh. Brodě, úl. 21. až 40.
Rychlík Karel, stud. VII. tř. akad. g. v Praze, úl. 21. až 40.
Samek Josef, stud. II. roč. obchodní akademie v Hradci Králové, úl. 21. až 40.
Secký František, stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 22., 24., 25., 29., 35., 36., 39.
Seifert Jaroslav, stud. VII. tř. r. v Karlíně, úl. 21. až 40.
Seifert Miloš, stud. V. tř. r. v Karlíně, úl. 22., 23., 24., 26., 28., 29.
Skála Jan, stud. VIII. tř. g. v Třebíči, úl. 21. až 40.
Skolil Josef, stud. VI. tř. r. v Žižkově, úl. 22., 23., 24., 27., 28., 29., 38.
Slovák Josef, bohoslovec v Olomouci, úl. 21. až 40.
Smetana Štěpán, stud. VII. tř. g. v Olomouci, úl. 21. až 25., 28., 29.
Sobota Ferdinand, právník v Praze, úl. 22. až 25., 28., 31. až 36., 38.
Spurný Karel, stud. VIII. tř. g. v Místku, úl. 21. až 40.
Strumhaus Ladislav, stud. VIII. tř. g. v Místku, úl. 21. až 40.
Stypa Ladislav, stud. VI. tř. g. v Opavě, úl. 22., 24., 28., 29.
Suchánek Josef, stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 21. až 25., 28., 29., 30., 32. až 40.
Šura František, stud. VI. tř. r. v Hodoníně, úl. 22., 23., 28., 29.
Surka Leopold, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 21. až 40.
Szalaÿ Josef, stud. VIII. tř. g. v Olomouci, úl. 21. až 40.

Šabršula František, stud. VII. tř. r. v Uher. Brodě, úl. 21. až 26., 28. až 40.
Šebela Mikuláš, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 22, 28., 29., 36.
Šich Bedřich, stud. VIII. tř. g. v Kroměříži, úl. 14., 21. až 40.
Šilhan Ludvík, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 21. až 40.
Šimůnek Václav, stud. VI. tř. r. v Kutné Hoře, úl. 21. až 24., 26., 98., 29., 32., 35., 38., 39., 40.
Škrábek Karel v Mor. Budějovicích, úl. 22. až 29., 32. až 36., 38.
Šlégr Josef, stud. VI. tř. r. v Lounech, úl. 23.
Šmeral Theodor, stud. VIII. tř. g. v Třebíči, úl. 21. až 40.
Šnábl Jaroslav, stud. VII. tř. r. v Kutné Hoře, úl. 22., 23., 24., 29., 31., 32., 36.
Štěpánek Jan, bohoslovec v Olomouci, úl. 22., 23., 24., 26., 28., 29., 32. až 36., 38.
Šticha Augustin, stud. VI. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 21. až 40.
Štojdl Jan, stud. VI. tř. r. v Českých Budějovicích, úl. 22. až 29., 32.
Táborský M., stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 22., 23.
Teyssler Vratislav, stud. VII. tř. r. v Českých Budějovicích, úl. 22., 23., 26., 30., 32., 33., 34., 36., 37., 38.
Tietz Jaroslav, stud. VI. tř. r. v Karlíně, úl. 22.
Tichý Emanuel, stud. VI. tř. r. v Žižkově, úl. 22., 23, 24., 38.
Tomeš Celestýn, stud. VII. tř. r. v Jičíně, úl. 21. až 40.
Trnka František, stud. VII. tř. g. v Olomouci, úl. 21. až 25., 28., 29., 30., 32., 36., 38., 39.
Tyleček Fr., stud. VII. tř. g. v Místku, úl. 21. až 29., 32. až 35.
Ullrich August, stud. VI. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 22. až 26., 28., 29., 38.
Urbánek Václav, stud. VII. tř. g. v Mladé Boleslavi, úl. 23., 25.
Valach František, bohoslovec v Olomouci, úl. 21. až 40.
Vališ Ignát, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 21. až 40.
Vavřinec Josef, stud. VII. tř. r. v Karlíně, úl. 21. až 40.
Zahrádka Antonín, stud. VIII. tř. g. v Slaném, úl. 21. až 40.
Závada František, stud. VII. tř. r. v Lipníku, úl. 21. až 40.
Zermanowitsch Miliwoje, stud. VII. tř. g. v Bělehradě, úl. 22., 36., 39.
Žáček Augustin, stud. VI. tř. g. v Českých Budějovicích, úl. 21., 22., 23., 26., 28., 29.
Žák Karel, stud. VII. tř. r. v Brně, úl. 1., 12., 21. až 40.

Žanta Rudolf, stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 22., 23., 24., 28. až 40.
Nepodepsaný v Brně, úl 22., 28., 29., 32., 36., 38.

Ceny udělené za řešení úloh.

Redakce těchto listů uznala, aby za řešení úloh obsažených v tomto ročníku Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky (1903) ceny vypsané výborem Jednoty českých mathematiků obdrželi tito řešitelé:

I. Ceny první.

1. *Altmann Josef,* stud. VIII. tř. g. v Přerově.
2. *Archleb Jiří,* t. č. správce internátu při zemské vyšší reálce v Jevíčku.
3. *Bršlica Jan,* stud. VIII. tř. g. v Uh. Hradišti.
4. *Čupr Karel,* stud. VII. tř. g. ve Vys. Mýtě.
5. *Drábek J.,* stud. VII. tř. r. v Pardubicích.
6. *Eliáš Filip,* bohoslovec v Olomouci.
7. *Fiala František,* stud. VII. tř. r. v Písku.
8. *Grössl František,* stud. VI. tř. r. na Král. Vinohradech.
9. *Hájek Josef,* stud. VII. tř. r. v Karlíně.
10. *Heinrich Vladimír,* stud. VIII. tř. g. v Příbrami.
11. *Hrázdil Antonín,* stud. VIII. tř. g. v Olomouci.
12. *Hromádko Josef,* stud. VII. tř. r. v Pardubicích.
13. *Kalina Dobroslav,* stud. VII. tř. r. v Hradci Králové.
14. *Kössler Miloš,* stud. VIII. tř. akad. g. v Praze.
15. *Kostelecký Josef,* stud. VII. tř. r. v Brně.
16. *Kovářík Otokar,* stud. VIII. tř. g. v Kroměříži.
17. *Kroutil Rudolf,* stud. VIII. tř. g. v Kroměříži.
18. *Kulhánek Jaroslav,* stud. VII. tř. r. v Karlíně.
19. *Los František,* stud. VIII. tř. g. v Brně.
20. *Mašata Josef,* stud. VII. tř. g. v Hradci Králové.
21. *Michna Jan,* stud. VII. tř. r. v Lipníku.
22. *Mikeska Alois,* stud. VII. tř. g. v Místku.
23. *Mikulášek Adolf,* stud. VII. tř. r. v Hodoníně.
24. *Neužil Innocenc,* stud. VIII. tř. g. v Brně.
25. *Pithart Jaroslav,* stud. VII. tř. r. v Hradci Králové.
26. *Růžička Vilibald,* stud. VII. tř. r. v Uher. Brodě.
27. *Rychlík Karel,* stud. VII. tř. akad. g. v Praze.
28. *Seifert Jaroslav,* stud. VII. tř. r. v Karlíně.

29. *Skála Jan,* stud. VIII. tř. g. v Třebíči.
30. *Slovák Josef,* bohoslovec v Olomouci.
31. *Spurný Karel*, stud. VIII. tř. g. v Místku.
32. *Strumhaus Ladislav,* stud. VIII. tř. g. v Místku.
33. *Surka Leopold*, stud. VIII. tř. g. v Brně.
34. *Szalay Josef*, stud. VIII. tř. g. v Olomouci.
35. *Ších Bedřich*, stud. VIII. tř. g. v Kroměříži.
36. *Šilhan Ludvík*, stud. VIII. tř. g. v Brně.
37. *Šmeral Theodor,* stud. VIII. tř. g. v Třebíči.
38. *Šticha Augustin*, stud. VI. tř. r. na Malé Straně v Praze.
39. *Valach František*, bohoslovec v Olomouci.
40. *Vališ Ignát,* stud. VIII. tř. g. v Brně.
41. *Vavřinec Josef*, stud. VII. tř. r. v Karlíně.
42. *Zahrádka Antonín,* stud. VIII. tř. g. v Slaném.
43. *Závada František,* stud. VII. tř. r. v Lipníku.
44. *Žák Karel,* stud. VII. tř. r. v Brně.

Poznámka. Vzhledem k tomuto neobyčejnému a *neočekávanému* počtu prvních cen nastala nutnost, jednu z knih za cenu určených zaměniti za jinou. Spisu *K. Steinich*, Počátky zeměpisu hvězdářského, nemáme totiž tolik výtisků na skladě, kolik by bylo třeba a ani u nakladatele (Dědictví Komenského) nelze již tolik výtisků zakoupiti, poněvadž je celý náklad téměř rozebrán. Páni řešitelé obdrží proto místo této kniby spis neméně cenný *Cremona-Weyr*, Úvod do geometrické theorie křivek rovinných.

II. Ceny druhé.

1. *Bátěk Václav*, stud. VIII. tř. g. na Král. Vinohradech.
2. *Dašek V.*, stud. V. tř. r. v Náchodě.
3. *Hutterer Rudolf*, stud. VII. tř. r. na Král. Vinohradech.
4. *Kosmák František,* stud. VII. tř. g. v Brně.
5. *Mareš František*, stud. VII. tř. r. v Pardubicích.
6. *Mayr Karel*, stud. VI. tř. r. na Starém Městě v Praze.
7. *Pospíšil Petr*, stud. VIII. tř. g. v Brně.
8. *Pšeničný Jan,* stud. VII. tř. g. na Malé Straně v Praze.
9. *Samek Josef*, stud. II. roč. obchodní akademie v Hradci Králové.
10. *Žanta Rudolf*, stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze.

III. Ceny třetí.

1. *Baumann Josef*, stud. VII. tř. r. v Hodoníně.
2. *Frantík Matouš,* stud. VII. tř. g. v Olomouci.
3. *Hlava B.,* stud. VI. tř. r. v Praze (Ječná ulice).
4. *Klíma Josef*, stud. VI. tř. r. v Karlíně.
5. *Kvěch Rudolf*, stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze.
6. *Lašek Alois,* stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze.
7. *Ludvík Josef*, stud. VI. tř. r. v Novém Městě na Moravě.

8. *Papřok Josef*, stud. VI. tř. g. v Místku.
9. *Průša Vojtěch*, stud. VII. tř. g. v Praze (Žitná ul.).
10. *Růžička Antonín*, stud. VIII. tř. g. v Chrudimi.
11. *Růžička Josef*, stud. VI. tř. r. v Karlíně.
12. *Sobotka Ferdinand*, právník v Praze.
13. *Suchánek Josef*, stud. VII. tř. r. v Pardubicích.
14. *Šabršula František*, stud. VII. tř. r. v Uher. Brodě.
15. *Šimůnek Václav*, stud. VI. tř. r. v Kutné Hoře.
16. *Škrábek Karel* v Mor. Budějovicích.
17. *Tomeš Celestýn*, stud. VII. tř. r. v Jičíně.
18. *Trnka František*, stud. VII. tř. g. v Olomouci.
19. *Tyleček Fr.*, stud. VII. tř. g. v Místku.
20. *Ullrich August*, stud. VI. tř. r. na Malé Straně v Praze.

Správná řešení fysikálních úloh podali pp.:

**Kössler Miloš*, stud. VIII. tř. akad. g. v Praze, úl. 41. až 45.
**Los František*, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 41., 42., 43., 45.
Mareš František, stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 42., 44.
**Mikulášek Adolf*, stud. VII. tř. r. v Hodoníně, úl. 41. až 45.
Neužil Innocenc, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 41., 42.
**Novotný Jan*, stud. VII. tř. r. v Českých Budějovicích, úl. 42., 43., 44.
**Růžička Vilibald*, stud. VII. tř. r. v Uher. Brodě, úl. 41. až 45.
**Rychlík Karel*, stud. VII. tř. akad. g. v Praze, úl. 41. až 45.
**Samek Josef*, stud. II. roč. obch. akad. v Hradci Králové, úl. 41. až 45.
Seifert Jaroslav, stud. VII. tř. r. v Karlíně, úl. 41.
Sobota Ferdinand, právník v Praze, úl. 41., 45.
Suchánek Josef, stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 42.
**Surka Leopold*, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 41., 42., 44.
**Szalay Josef*, stud. VIII. tř. g. v Olomouci, úl. 41. až 45.
Tayssler Vratislav, stud. VII. tř. r. v Českých Budějovicích, úl. 42., 44.
**Tomeš Celestýn*, stud. VII. tř. r. v Jičíně, úl. 41., 43., 44.
Vavřinec Josef, stud. VII. tř. r. v Karlíně, úl. 45.
Závada František, stud. VII. tř. r. v Lipníku, úl. 42.

Hvězdičkou označení řešitelé obdrží za odměnu po jednom výtisku: Dr. F. J. Studničky, Kartografie.