Antonín Pleskot

Vzdálenost průsečíků orthogonální trajektorie s površkou jednoplochého hyperboloidu

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 42 (1913), No. 2, 151--154

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121575

Vzdálenost průsečíků orthogonální trajektorie s površkou jednoplochého hyperboloidu.

Napsal Dr. **Ant. Pleskot**, professor v Plzni.

V čísle posledním předchozího ročníku t. čas. (str. 567 až 571) uveřejnil universitní docent p. prof. Dr. B. Hostinský zajímavou applikaci homofokálních ploch stupně druhého na stanovení odlehlosti dvou sousedních průsečíků orthogonální trajektorie površek s touže površkou hyperboloidu.

Myslím, že pro zajímavost úlohy nebude od místa, když řešení předložené úlohy provedeme způsobem jiným, a to bez užití funkcí elliptických, a délku tu vyjádříme základními typy integrálů Legendreových; toho docílíme zavedením vhodných souřadnic při čemž i přechod pro hyperboloid rotační přímo vyplyne.

Budiž dán hyperboloid jednoplochý rovnicí:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Vyjádřeme rovnici této plochy jakožto rovnici plochy přímkové. Za řídící křivku volme ellipsu:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

a označme vzdálenost libovolného bodu površky od jejího bodu na ellipse ϱ.

Libovolný bod ellipsy má souřadnice:

$$a \cos \varphi,\ b \sin \varphi,\ 0.$$

Površky jednoho systému, jdoucí tímto bodem, mají rovnici:

$$\frac{x}{a}=\cos \varphi-\frac{z}{c} \sin \varphi$$

$$\frac{y}{b}=\sin \varphi+\frac{z}{c} \cos \varphi.$$

Rovnice tyto lze psáti též ve tvaru:

$$\frac{x-a \cos \varphi}{-a \sin \varphi}=\frac{y-b \sin \varphi}{b \cos \varphi}=\frac{z}{c},$$

z něhož lze stanoviti úhly α, β, γ, které površka stanoví s osami:

$$\cos\alpha = \frac{-a \sin\varphi}{\sqrt{a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi + c^2}} = f_1(\varphi),$$

$$\cos\beta = \frac{b \cos\varphi}{\sqrt{a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi + c^2}} = f_2(\varphi),$$

$$\cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi + c^2}} = f_3(\varphi),$$

kdež $f_1(\varphi), f_2(\varphi), f_3(\varphi)$ značí zkrácené vyjádření pravých stran rovnic předchozích.

Rovnici plochy lze tedy psáti ve tvaru:

$$x = a\cos\varphi - \frac{a\varrho \sin\varphi}{\sqrt{a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi + c^2}} = a\cos\varphi + \varrho f_1(\varphi)$$

$$y = b\sin\varphi + \frac{b\varrho \cos\varphi}{\sqrt{a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi + c^2}} = b\sin\varphi + \varrho f_2(\varphi)$$

$$z = \frac{\varrho c}{\sqrt{a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi + c^2}} = \varrho f_3(\varphi).$$

Přistupme k určení orthogonální trajektorie:

Kosinusy směrné, libovolné tečny v bodě (ϱ, φ) na ploše jsou úměrny výrazům:

$$dx = \{-a\sin\varphi + \varrho f_1'(\varphi)\}\, d\varphi + f_1(\varphi)\, d\varrho,$$
$$dy = \{b\cos\varphi + \varrho f_2'(\varphi)\}\, d\varphi + f_2(\varphi)\, d\varrho,$$
$$dz = \varrho f_3'(\varphi)\, d\varphi + f_3(\varphi)\, d\varrho.$$

Ježto tečna má státi kolmo na površce, jejíž kosinusy jsou: $f_1(\varphi), f_2(\varphi), f_3(\varphi)$, nutno, aby platila rovnice:

$$f_1(\varphi)\, dx + f_2(\varphi)\, dy + f_3(\varphi)\, dz = 0,$$

t. j.

$$\{-a\sin\varphi\, f_1(\varphi) + b\cos\varphi\, f_2(\varphi)\}\, d\varphi + \varrho\,\{f_1(\varphi) f_1'(\varphi) + f_2(\varphi) f_2'(\varphi) + f_3(\varphi) f_3'(\varphi)\}\, d\varphi + d\varrho\,\{f_1^2(\varphi) + f_2^2(\varphi) + f_3^2(\varphi)\} = 0.$$

Poněvadž

$$f_1^2(\varphi) + f_2^2(\varphi) + f_3^2(\varphi) = 1,$$
$$f_1(\varphi) f_1'(\varphi) + f_2(\varphi) f_2'(\varphi) + f_3(\varphi) f_3'(\varphi) = 0,$$

máme orthogonální trajektorii určenou differenciální rovnicí:

$$\{-a\sin\varphi\, f_1(\varphi) + b\cos\varphi\, f_2(\varphi)\}\, d\varphi + d\varrho = 0.$$

Dosadíme-li za $f_1(\varphi)$, $f_2(\varphi)$ příslušné hodnoty do této rovnice, nabývá differenciální rovnice trajektorie jednoduchého tvaru:

$$\frac{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi + c^2}}\, d\varphi + d\varrho = 0.$$

Vyjdeme-li od libovolného bodu površky φ a stanovíme-li postupně průsečíky téže orthogonální trajektorie s jednotlivými površkami a to tak, až průsečíky proběhnou všecky površky, tu absolutní délka l odlehlosti průsečíku počátečního od průsečíku, v němž znovu protnuta bude táž površka φ, jest dána dle rovnice předchozí výrazem:

$$l = \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} \frac{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi + c^2}}\, d\varphi$$

$$= \int_{0}^{2\pi} \frac{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi + c^2}}\, d\varphi.$$

Z výrazu předchozího přímo patrna známá věta, že délka l nezávislou jest na površce i na bodu, z kterého jsme vyšli.

Integrál předchozí dá se snadno vyjádřiti integrály Legendreovými. Položme však napřed zvláštní specialisaci konstant, a sice učiňme:

$$a = b,$$

t. j. hyperboloid budiž rotační.

V případě tom přestává býti integrál elliptickým a délka

$$l = \int_{0}^{2\pi} \frac{a^2\, d\varphi}{\sqrt{a^2 + c^2}} = 2\pi \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + c^2}};$$

pro rotační hyperboloid jest tedy délka žádaná rovna obvodu kružnice o poloměru

$$r = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + c^2}}.$$

Abychom v obecném případě převedli integrál vyjádřující délku l na základní tvary, předpokládejme na př., že

$$b > a.$$

Tu

$$\frac{a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi}{\sqrt{a^2 \sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi + c^2}} = \frac{b^2 + (a^2 - b^2)\sin^2\varphi}{\sqrt{b^2 + c^2 - \sin^2\varphi\,(b^2 - a^2)}};$$

položíme-li:

$$\frac{b^2 - a^2}{b^2 + c^2} = k^2,$$

kdež tedy k^2 reálný zlomek pravý značí, pak

$$\frac{b^2 + (a^2 - b^2)\sin^2\varphi}{\sqrt{b^2 + c^2 - (b^2 - a^2)\sin^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{b^2 + c^2}}\,\frac{b^2 - k^2(b^2 + c^2)\sin^2\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}.$$

Uvážíme-li dále, že

$$\frac{\sin^2\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{k^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} - \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\right),$$

a zavedeme-li ještě obvyklé označení:

$$\varDelta\varphi \text{ pro } \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}, \text{ tu}$$

výraz:

$$\frac{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi + c^2}} = -\frac{c^2}{\sqrt{b^2 + c^2}}\,\frac{1}{\varDelta\varphi} + \sqrt{b^2 + c^2}\,\varDelta\varphi,$$

a proto:

$$l = \int_0^{2\pi}\left(-\frac{c^2}{\sqrt{b^2 + c^2}}\,\frac{1}{\varDelta\varphi} + \sqrt{b^2 + c^2}\,\varDelta\varphi\right)d\varphi$$

$$= -\frac{c^2}{\sqrt{b^2 + c^2}}\,F(2\pi, k) + \sqrt{b^2 + c^2}\,E(2\pi, k)$$

$$= \frac{4}{\sqrt{b^2 + c^2}}\left(-c^2 F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) + (b^2 + c^2)\,E\left(\frac{\pi}{2}, k\right)\right),$$

kdež

$$F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}},$$

$$E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi},$$

$$k^2 = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + c^2}.$$