Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Josef Klíma

Geometrické místo vrcholů a ohnisek rotačních paraboloidů, obsahujících danou ellipsu

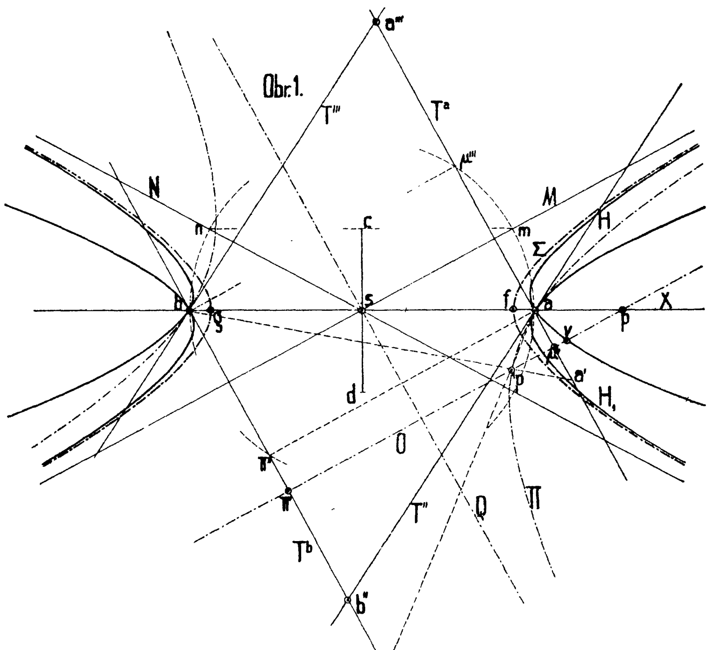
Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 42 (1913), No. 2, 226--229

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121574`

Geometrické místo vrcholů a ohnisek rotačních paraboloidů, obsahujících danou ellipsu.

Napsal **Josef Klíma**, assistent české techniky.

Stejně jako lze ellipsou proložiti ∞^1 rotačních kuželů, tak možno též danou ellipsou proložiti ∞^1 rotačních paraboloidů.



Vrcholy všech rotačních kuželů proložených ellipsou vyplňují, jak známo, hyperbolu fokální k dané ellipse, jež je v rovině kolmé k rovině dané ellipsy procházejíc hlavní osou této a jež má vrcholy reálné v ohniskách a ohniska ve vrcholech dané ellipsy. V dalším ukážeme, že stejně vrcholy rotačních paraboloidů obsahujících danou ellipsu vyplňují snadno sestrojitelné geometrické místo v téže rovině.

Budiž dána v půdorysně ellipsa E o hlavní ose $\overline{ab}$ a vedlejší ose $\overline{cd}$ (obr. 1.). Osy všech rotačních paraboloidů jdoucích ellipsou E musejí býti patrně v rovině jdoucí hlavní osou $\overline{ab}$ kolmo k půdorysně. Zvolme rovinu tu za nárysnu, takže $\overline{ab} \equiv X$. Osy ty tvoří tam dvě osnovy rovnoběžných přímek, jichž směry určíme, uvážíme-li, že na rovinu kolmou k ose rotačního paraboloidu musí se každý rovinný řez paraboloidu, tedy i ellipsa E promítati směrem osy do kružnice. Směry ty udávají nám tedy osy obou rotačních válců M a N, jež lze ellipsou E proložiti ($\overline{sm} = \overline{sn} = \overline{sa}$, $mn \parallel \overline{ab}$). Přicházíme tím vlastně k úloze, určiti geometrické místo vrcholů všech parabol o osách rovnoběžných buď s M neb N a jdoucích body a a b. Patrno, že třeba uvažovati jen jediný směr, třeba M, ježto výsledek pro druhý směr N je symetrický dle osy X.

Zvolme si osu jedné z těch parabol $O \parallel M$ a určeme její vrchol v. Na ose té získáme pár konjugovaných bodů p a ${}^1p$, kde p je průsečík osy O se spojnicí $\overline{ab}$ a ${}^1p$ je průsečík této osy se spojnicí bodu a s bodem b' symetrickým s b dle osy O. Týž bod ${}^1p$ je též průsečík osy O se spojnicí $\overline{ba'}$, kde a' je symetrický bod s a dle O. Dle známé vlastnosti paraboly vrchol v je pak půlícím bodem úsečky $\overline{p\,{}^1p}$. Určeme geometrické místo bodu ${}^1p$, bude-li osa O měniti svoji polohu zůstávajíc rovnoběžna s M. Toto obdržíme co výtvar osnovy rovnoběžných paprsků O se svazkem paprskovým o středu a a jdoucím body $b', \ldots$ na přímce $T^b \perp M$, neb se svazkem o středu b a jdoucím body $a', \ldots$ na přímce $T^a \perp M$. Avšak osnova os O je perspektivná s řadou prusečíků $\pi', \ldots$ na T^b, a řada bodová $b', \ldots$ je promětna s touto, takže geometrickým místem bodů ${}^1p$ je hyperbola Π vytvořená osnovou paprsků O a promětným s ní svazkem paprskovým o středu a, neb s promětným svazkem paprskovým o středu b. Hyperbola ta obsahuje středy a, b svazků těch, tečnu v bodě a dostaneme co přiřazený paprsek $T'' \equiv \overline{ab''}$ k paprsku $\overline{a\pi''}$ osnovy ($\overline{b''\pi''} = \overline{\pi''b}$), obdobně tečna $T''' \equiv \overline{ba'''}$ v bodě b je odpovídající paprsek svazku o středu b k paprsku $\overline{\mu b'''}$ osnovy os ($\overline{\mu'''a'''} = \overline{\mu'''a}$). Avšak patrno, že $T'' \parallel T'''$, takže $\overline{ab}$ je průměrem hyperboly Π, s tudíž jejím středem, M pak jednou asymptotou, druhá pak asymptota Q je kolma k této, což vyplývá, uvážíme-li O v nekonečnu. Geometrickým místem bodu ${}^1p$ je tedy rovnoosá hyperbola Π, jež tímto je zcela určena. Avšak nám jde o geometrické místo vrcholu paraboly v.

Tento dostaneme rozpůlením úsečky $\overline{p^1p}$, takže geom. místem vrcholů parabol jdoucích body a, b a jichž osy jsou rovnoběžny s M, je hyperbola H affinní s hyperbolou Π, osou affinity je $\overline{ab}$, směr je rovnoběžný s asymptotou M hyperboly Π a charakteristika $= \frac{1}{2}$. Hyperbola H má s Π společnou asymptotu M a průměr $\overline{ab}$. Tečna v bodě a je T^a affinní k T'', z obrazce snadno ukážeme, že je kolma k asymptotě M, jelikož charakteristika affinity $= \frac{1}{2}$. Z dat těchto snadno určíme druhou asymptotu a hyperbolu H samu. Avšak též pro druhý směr N dostáváme druhou hyperbolu H_1 symetrickou s H dle osy $\overline{ab}$. Takže máme věty, a to pro rovinu:

„Geometrickým místem vrcholů parabol jdoucích body a, b a jichž osa má směr M, je hyperbola, jež má v $\overline{ab}$ jeden průměr, jedna asymptota je rovnoběžna s M a tečny v bodech a, b jsou kolmy k této asymptotě.“

Pro prostor pak:

„Geometrickým místem vrcholů všech rotačních paraboloidů jdoucích danou ellipsou E jsou dvě hyperboly symetrické dle hlavní osy $\overline{ab}$ ellipsy v rovině jdoucí touto kolmo k rovině ellipsy, jež mají osu $\overline{ab}$ za společný průměr, a každá z nich má za jednu asymptotu osu rotačního válce, jejž lze ellipsou proložiti a tečny v koncových bodech průměru $\overline{ab}$ jsou kolmy k příslušné asymptotě.“

Ovšem ony dva rotační válce, jež lze ellipsou E proložiti, jsou zvláštní paraboloidy rotační, jichž vrchol je v nekonečnu.

Abychom určili geometrické místo ohnisek paraboloidů obsahujících ellipsu E, vzpomeneme na větu týkající se ohniskových ploch rotačních 2°[1]. Libovolná kuželosečka této promítá se z ohniska plochy rotační plochou kuželovou. Takže dle věty na začátku uvedené je:

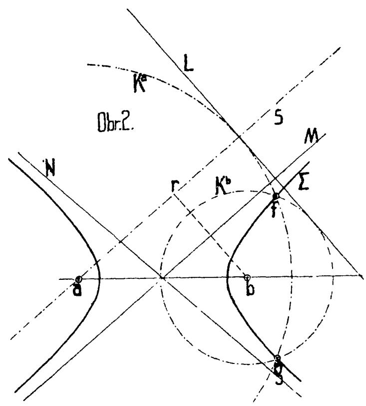
„Geometrickým místem ohnisek všech ohniskových rotačních ploch 2°, tudíž i všech rotačních paraboloidů, jež lze danou ellipsou E proložiti, je hyperbola Σ fokální ku dané ellipse E. Tato leží v rovině kolmé k rovině ellipse jdoucí

[1]) Ku př.: »Řezy rotačních ploch ohniskových 2°« od prof. Havlíčka v tomto časopise roč. 1908 str. 325.

hlavní osou $\overline{ab}$ a má ohniska ve vrcholech a vrcholy v ohniskách ellipsy E."

Z této věty prostorové máme pro rovinu:

„*Geometrickým místem ohnisek všech parabol jdoucích body a, b a majících daný směr osy, je hyperbola, jež má v daných bodech ohniska a jedna asymptota je rovnoběžna s daným směrem.*"



K výsledku tomuto dospějeme též přímo. Paraboly jdoucí body a, b (obr. 2.) a mající daný směr osy S tvoří svazek. Vytkněme řídící přímku $L \perp S$ jedné z nich. Ohnisko této je v průsečíku kružnice K^a o středu a a dotýkající se L s kružnicí K^b o středu b a rovněž dotýkající se L. Patrně k řídící určité přímce L dostáváme dvě ohniska f a g. Z obrazce vidíme, že rozdíl

$$\overline{af} - \overline{bf} = \overline{ag} - \overline{bg} = \overline{ar} = konst \; (\overline{ar} \perp S),$$

čímž též věta předchozí dokázána.

Jak těchto výsledků dalo by se použíti k řešení úloh, danou ellipsou proložiti rotační paraboloid o daném parametru, neb danými dvěma body proložiti parabolu o daném parametru a směru osy, je na snadě.