Václav Jeřábek

# Geometrické důkazy parametrické vlastnosti kuželoseček

*Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*, Vol. 42 (1913), No. 2, 217--225

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121571`

kol bodu $C$, čímž obdržíme

$$\frac{da}{db} \doteq -\frac{AA'}{BB'}$$

a podobně pro stálé $a$

$$\frac{df}{db} \doteq +\frac{CC'}{BB''}.$$

To jest věc pro mathematickou applikaci nadmíru důležitá, o čemž snad jednou na tomto místě promluvíme.

---

# Geometrické důkazy parametrické vlastnosti kuželoseček.

Sděluje *V. Jeřábek.*

V článku jednajícím o parametrické vlastnosti kuželoseček*) byla analyticky dokázána vlastnost tato: *V kuželosečce* $(M)$, *jejíž hlavní osou je* $AB = 2a$ *a vedlejší* $CD = 2b$, *postavené kolmice* $MN$, $MP$ *na tětivy* $AM$, $BM$ *vytínají na* $AB$ *úsek* $PN = 2p = 2\frac{a^2}{b}$.

V následujících řádcích dovolím si ještě podati geometrické důkazy této vlastnosti.

1. Přetvořme orth. affinitou ellipsu $(M)$ v kruh $(M_1) \equiv (AB)$**) dle osy $AB$ a poměru $\frac{b}{a}$***). Buď $RM$ pořadnicí bodu $M$ ellipsy $(M)$ a $RM_1$ pořadnicí bodu $M_1$ kruhu $(M_1)$. Je tedy

$$\frac{RM}{RM_1} = \frac{b}{a} \quad \ldots \tag{1}$$

---

*) Viz 41. ročník Časopisu str. 229., Příloha str. 69.

**) $(AB)$ značí kruh o průměru $AB$.

***) Sestrojení ponechává se čtenáři.

V trojúhelnících pravoúhlých $AMN$, $BMP$

$$AR \,.\, RN = \overline{RM}^2,\ RN = \frac{\overline{RM}^2}{AR},$$

$$PR \,.\, RB = \overline{RM}^2,\ PR = \frac{\overline{RM}^2}{RB}.$$

Sečtěme $PR + RN = \overline{RM}^2 \dfrac{AR + RB}{AR \,.\, RB}$.

V trojúhelníku pravoúhlém $AM_1B$

$$AR \,.\, RB = \overline{RM}_1^2,$$

a že $PR + RN = PN$ a $AR + RB = 2a$,

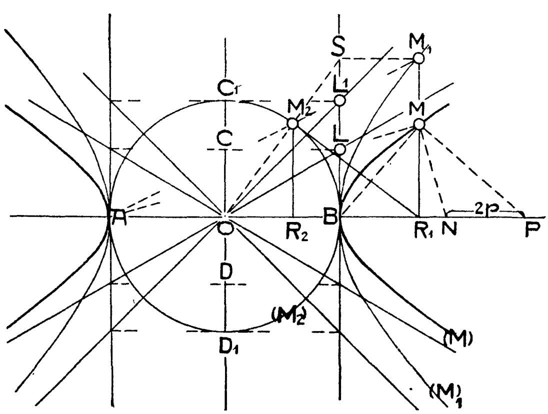
$$PN = 2a \frac{\overline{RM}^2}{\overline{RM}_1^2},$$

pročež se zřetelem k rovnici (1)

$$PN = 2\frac{b^2}{a} = 2p,$$

čímž hořejší vlastnost dokázána.

2. Buď dána hyperbola $(M)$ (obr. 1.) a na ní kdekoliv bod $M$, jehož pořadnice je $R_1M \perp AB$. Přetvořme opět orth. affi-




Obr. 1.

nitou hyperbolu $(M)$ v hyperbolu $(M_1)$ dle osy $AB$ a poměru $\dfrac{b}{a}$. Tím přidružíme bodu $M$ bod $M_1$ na $(M_1)$, takže $\dfrac{R_1M}{R_1M_1} =$

$\frac{b}{a}$. Asymptoty $OL$, $OL_1$ jsou homologickými přímkami soustav affinních $\Sigma$, $\Sigma_1$, v nichž $(M)$ a $(M_1)$ jsou si přidruženy. Zmíněné asymptoty protínají tudíž vrcholovou tečnu $BL$ v homologických bodech $L$, $L_1$ soustav $\Sigma$, $\Sigma_1$; pročež $\frac{BL}{BL_1} = \frac{b}{a}$, a že $BL = b$, jest $BL_1 = a = OA$. Z toho jde, že $(M_1)$ je rovnostranná hyperbola.

Hyperbola $(M_1)$ a kruh $(M_2) \equiv (AB)$ jsou v perspektivné kollineaci involuční; osa kollineační je jedna společná tečna hyperboly $(M_1)$ a kruhu $(M_2)$, na př. $BL$, pak je střed kollineační v dotyčném bodě druhém $A$ těchto křivek. Společná úběžnice kollineárných soustav $\Sigma_1$, $\Sigma_2$ je vedlejší osa $C_1D_1$ hyperboly $(M_1)$. Buďtež $M_1$, $M_2$ na paprsku jdoucím středem kollineačním $B$ homologickými body hyperboly $(M_1)$ a kruhu $(M_2)$.

Přímka $OM_2$ soustavy $\Sigma_2$ je homologická s přímkou jdoucí bodem $M_1$ v soustavě $\Sigma_1$ rovnoběžně s $AB$; samodružný bod $S$ těchto přímek čili jejich průsečík leží na ose kollineační $BL$. Trojúhelníky $M_1M_2S$, $AM_2O$ jsou homothetické dle jejich společného vrcholu $M_2$ jakožto středu, a poněvadž strany $OA$, $OB$ v trojúhelníku $AM_2O$ jsou stejny, mají i jejich příslušné strany $M_1S$, $M_2S$ v trojúhelníku $M_1M_2S$ délku stejnou. Vyznačme na $AB$ patu $R_2$ pořadnice $R_2M_2 \perp AB$ kruhu $(M_2)$. Body $R_1$, $R_2$ jsou homologické v soustavách $\Sigma_1$, $\Sigma_2$, pročež oddělují $R_1$, $R_2$ body $A$, $B$ harmonicky, tak že prochází tečna kruhu $(M_2)$ v bodě $M_2$ bodem $R_1$ a tečna v bodě $M_1$ hyperboly $(M_1)$ bodem $R_2$. Ježto ve čtyřúhelníku $M_1R_1M_2S$, který má při vrcholech $M_1$, $M_2$ pravé úhly, $M_1S = M_2S$, je též $R_1M_1 = R_1M_2$. V trojúhelnících pravoúhlých $AMN$, $BMP$

$$AR_1 \,.\, R_1N = \overline{R_1M^2},\ R_1N = \frac{\overline{R_1M^2}}{AR_1},$$

$$BR_1 \,.\, R_1P = \overline{R_1M^2},\ R_1P = \frac{\overline{R_1M^2}}{BR_1},$$

pročež $NP = R_1P - R_1N = \overline{R_1M^2}\,\frac{AR_1 - BR_1}{AR_1 \,.\, BR_1}$, a že

$$AR_1 - BR_1 = 2a,\ AR_1 \,.\, BR_1 = \overline{R_1M_2^2} = \overline{R_1M_1^2},\ \frac{R_1M}{R_1M_1} = \frac{b}{a},$$

bude konečně

$$NP = 2\frac{b^2}{a} = 2p,$$

jako při ellipse.

. 3. Vlastnost uvedená při parabole, jejíž vrchol je $A$, ohnisko $F$, pořadnice $PM \perp AF$ a $MN \perp AM$, plyne z rovnice

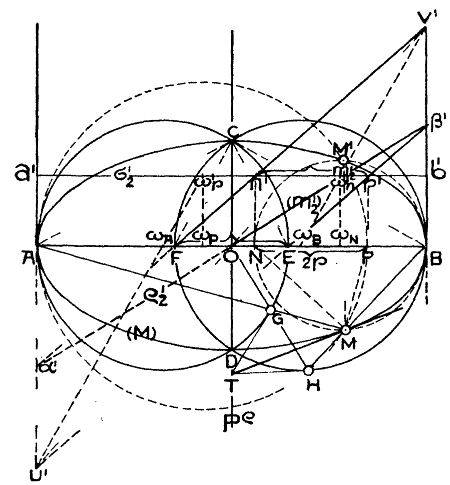
$$\overline{MP}^2 = 2p \,.\, AP,$$

která se odvozuje z trojúhelníka pravoúhlého $FMP$, v němž

$$FM = AP + \frac{p}{2} \text{ a } FP = AP - \frac{p}{2},$$

a která platí též o trojúhelníku pravoúhlém $AMN$, jen tehdy, když $PN = 2$p. Máme tedy jako v případech předešlých

$$PN = 2p.$$




Obr. 2.

4. Uvedenou vlastnost lze též odvoditi methodou deskript. geometrie.

1°. Buď opět dána ellipsa (obr. 2.) nebo hyperbola (obr. 3.) hlavní osou $AB = 2a$ a vedlejší $CD = 2b$. Danou kuželosečku znamenejme $(M)$ a její rovinu $\pi$. Kolmice postavené v bodě $C$ na $AC$, $BC$ protínají $AB$ resp. v bodech $E$, $F$ (obr. 2.) nebo $F$, $E$ (obr. 3.), tak že $OE = FO$ je parametrem $p = \frac{b^2}{a}$ kužělosečky $(M)$.

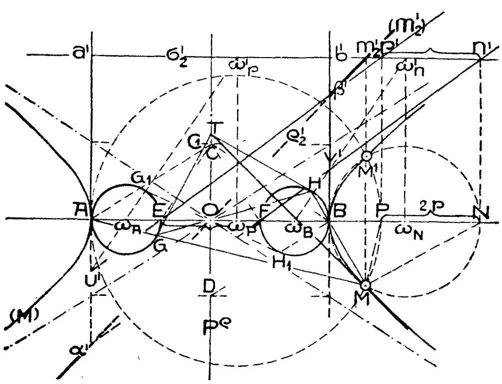
Kruh $(BF)$ mějme za podstavu orth. kužele $v(BF)$, jehož vrchol $v$ zvolme v dané výšce $Bv \perp \pi$, a zobrazme ve sklopené poloze obrysové přímky $vB$, $vF$ kužele kolmicí $v'B$ ku $AB$ a spojnicí $v'F$. Vyznačme bodem $\alpha'$, v němž $v'F$ seče $Au' \parallel Bv'$, sklopenou polohu průsečíku $\alpha$ přímky $vF$ s kolmicí postavenou ve vrcholu $A$ na $\pi$. Rovina $\varrho$ přímkou $CD$ kolmo na rovinu $(ABv) \equiv \nu$ proložená a bod $\alpha$ obsahující promítá se na $\nu$ do $\varrho_2$ a protíná přímku $Bv$ v bodě $\beta$, jenž je s bodem $\alpha$ souměrně položen dle středu $O$. Zobrazíme-li též $\varrho'_2$ a sklopenou polohu $\beta'$ bodu $\beta$, budou body $\alpha'$, $O$, $\beta'$ ležeti v téže přímce $\varrho'_2$ a $O\beta' = O\alpha'$. Body $\alpha$, $\beta$ jsou vrcholy a $\alpha\beta$ osou hlavní kuželosečky $(m)$, ve které $\varrho$ kužel $v(BF)$ seče, a jejíž druhé dva vrcholy jsou průsečíky $C$, $D$ stopy $P\varrho \equiv CD$ roviny $\varrho$ s kružnicí $(BF)$. Rovina $\varrho \perp \nu$ je tak položena, že kuželosečka $(m)$ v obr. 2. má $CD$ za osu vedlejší a je ellipsa, kdežto v obr. 3. jsou její vrcholy na $CD$ imaginárné a kuželosečka tedy hyperbola. Průmět $(m_2)$ kuželosečky $(m)$ na rovině $\nu \equiv (ABv)$ ve sklopené poloze je zobrazen úsečkou $\alpha'\beta' \equiv (m'_2)$, která je v obr. 2. délky konečné a v obr. 3. nekonečné, avšak jen z části vyznačené. Promítneme-li kuželosečku $(m)$ na $\pi$, dostaneme danou kuželosečku $(M)$, neboť vzniklý průmět má s $(M)$ společné osy $AB$, $CD$, z nichž $CD$ v obr. 3. ideálně zobrazuje imaginárnou délku osy hyperboly. Že je tomu při hyperbole skutečně tak, ještě později objasníme.

Proložme nyní kuželosečkou $(m)$ plochu kuželovou druhou $u(m)$, jejíž vrchol $u$ je souměrně položen s vrcholem $v$ kužele prvního dle středu $O$ a jehož sklopená poloha na $A\alpha'$ je $u'$ $(u'O = Ov')$. Ježto kuželosečka $(m)$ je dle středu $O$ souměrna, přísluší každé povrchové přímce kužele jednoho určitá dle středu $O$ souměrná přímka druhého; zvláště pak obrysovým přímkám $Bv$, $Fv$ prvního kužele náležejí obrysové přímky na kuželi druhém $Au \parallel Bv$, $Eu \parallel Fv$, jejichž sklopené polohy jsou $Au' \parallel Bv'$, $Eu' \parallel Fv'$. Ze souměrnosti kuželů dle $O$ vysvítá, že jejich stopy $(BF)$, $(AE)$ na rovině $\pi$ jsou též dle $O$ souměrny.

Protněme plochy $u$ $(AE)$, $v$ $(BF)$ rovinou $\sigma \parallel \pi$, jejíž průmět $\sigma_2 \parallel AB$ na $v$ je ve sklopené poloze $\sigma'_2 \parallel AB$, v kružnicích $(ap)$, $(bn)$ o průměrech $ap$, $bn$ zobrazených úsečkami $a'p' = ap$, $b'n' = bn$, které sklopené obrysové přímky kuželů vytínají na $\sigma'_2 \parallel AB$. Spusťme s bodů $p'$, $n'$ kolmice $p'P$, $n'N$ na $AB$, pak jsou na $\pi$ kruhy $(AP)$, $(BN)$ průměty kruhův $(ap)$, $(bn)$, které se na rovině $\sigma$ protínají v bodech $m$, $m^1$ náležející kuželosečce $(m)$. Z toho soudíme, že průsečíky $M$, $M^1$ kruhův $(AP)$, $(BN)$ jsou na průmětu $(M)$ kuželosečky $(m)$.

Je zřejmo, že $MP \perp AM$, $MN \perp BM$ a že $NP = n'p' = FE = 2OE$.

V trojúhelníku pravoúhlém $AEC$ (obr. 2.) úsek $OE = \frac{\overline{OC}^2}{\overline{AO}} = \frac{b^2}{a} = p$, kdežto v trojúhelníku $BEC$ (obr. 3.) $OE = \frac{\overline{OC}^2}{\overline{BO}} = \frac{b^2}{a} = p$; tedy v obou případech $NP = 2p$, čímž opět parametrická vlastnost ellipsy a hyperboly na jevo vychází.




Obr. 3.

Površky $um$, $vm$ kuželů mají své průměty v $AM$, $BM$ a své stopy v bodech $G$, $H$, v nichž $AM$, $BM$ protínají kruhové stopy $(AE)$, $(BF)$; rovina $(uvm)$ obsahuje však přímku $uv$ mající na $\pi$ svou stopu v bodě $O$, prochází tudíž stopa $GH$ roviny $(uvm)$ bodem $O$. Z toho plyne jednoduché strojení bodů $M$ kuželosečky $(M)$ trojúhelníkem $GHM$, jehož strany $GM$, $MH$ a

$HG$ otáčejí se resp. kolem pevných bodů $A$, $B$, $O$ a jehož dva vrcholy $G$, $H$ pohybují se resp. po kružnicích $(AE)$, $(BF)$; třetí pak vrchol popisuje kuželosečku $(M)$.

Tečna kuželosečky $(m)$ v bodě $m$ má svou stopu $T$ na stopě $CD$ roviny $\varrho$, v níž $(m)$ leží, a je určena průsečnicí tečných rovin kuželů $u$ $(AE)$, $v$ $(BF)$ v jejich společném bodě $m$, tak že stopy těchto rovin tečných procházejí stopou $T$; jedna z nich dotýká se kruhu $(AE)$ v bodě $G$ a druhá kruhu $(BF)$ v bodě $H$. Vyznačíme-li tedy jednou nebo druhou z těchto tečen na $CD$ bod $T$, dá nám spojnice $TM$ tečnu koželosečky $(M)$ jakožto průmět tečny $Tm$.

Stane-li se (obr. 3.) $GOH$ společnou tečnou $G_1OH_1$ kruhův $(AE)$, $(BF)$, budou promítati se do rovnoběžek $AG_1$, $BH_1$ rovnoběžné površky $uG_1$, $vH_1$ kuželův $u$ $(AE)$, $v$ $(BF)$, pak ale vzdálí se bod $m$ po kuželosečce $(m)$ a $M$ po jejím průmětu $(M)$ do nekonečna. Zcela tak vede nás druhá společná tečna kruhových stop kuželů k druhému úběžnému bodu křivky $(M)$, která je tedy hyperbola. Její jedna asymptota je stanovena středem $O$ a směrem $AG_1 \parallel BH_1$, a druhá je s ní dle $AB$ souměrně položena.

Nyní ještě blíže objasníme, že hyperbola námi uvažovaná a kterou zatím $(M_1)$ znamenati budeme, je s hyperbolou danou $(M)$ totožna. Že obě mají společnou osu hlavní $AB$, je patrno, zbývá nám tudíž ještě ukázati, že mají též vedlejší osu $CD$ společnou.

Přímka $AG_1$ nechť $OC$ protne v bodě $C_1$, bude tedy $OC_1$ vedlejší poloosou hyperboly $(M_1)$. Při hyperbole dané v trojúhelníku $BCE$

$$\overline{OC}^2 = BO \,.\, OE = a \,.\, OE,$$

potence bodu $O$ vzhledem ke kruhu $(AE)$ je

$$\overline{OG_1}^2 = OA \,.\, OE = a \,.\, OE,$$

z rovnice této a předešlé vychází, že

$$OC = OG_1 \,\ldots \tag{2}$$

Úhel $OC_1G_1 = AEG_1 = OG_1C_1$, neboť první dva jsou doplňky úhlu $OAC_1$ a druhý v kruhu $(AE)$ je úhlem obvodovým nad tětivou $AG_1$, s níž tečna $OG_1$ svírá třetí úhel. V rovnoramenném trojúhelníku $OC_1G_1$ je tedy

$$OC_1 = OG_1,$$

z rovnice této a (2) jde, že

$$OC_1 = OC,$$

a poněvadž $OC_1$ a $OC$ jsou téhož směru, je $C_1 \equiv C$.

Mají tedy $(M_1)$ a $(M)$ společné osy $AB$, $CD$, pročež jsou totožny.

Buďtež $\omega_A$, $\omega_B$ (obr. 2. a obr. 3.) středy kruhův $(AE)$, $(BF)$; středy $\omega_p$, $\omega_n$ kruhův $(ap)$, $(bn)$ leží na rovnoběžných přímkách středových $u\omega_A$, $v\omega_B$ kuželův a mají na $\pi$ své průměty ve středech $\omega_P$, $\omega_N$ kruhův $(AP)$, $(BN)$. Rovnoběžné středové přímky vytínají ve sklopené poloze na $AB$ a $\sigma'_2$ stejné délky $\omega_A\,\omega_B = \omega'_p\,\omega'_n$, a že $\omega_P\,\omega_N = \omega'_p\,\omega'_n$, je též $\omega_P\,\omega_N = \omega_A\,\omega_B = AF$. Při ellipse absolutní délka $AF = a - p$ a při hyperbole $AF = a + p$, kdež $AO = a$ a $FO = p$. Tedy:

*Pošine-li se úsečka $\omega_A\,\omega_B$ do $\omega_P\,\omega_N = \omega_A\,\omega_B$ a sestrojíme-li ze středů $\omega_P$, $\omega_N$ kružnice $(AP)$, $(BN)$, protnou se tyto v bodech $M$, $M^1$ kuželosečky $(M)$, mající $AB$ za osu hlavní a $CD$ za osu vedlejší.*

Roviny $\sigma_\alpha$, $\sigma_\beta$ proložené vrcholy $\alpha$, $\beta$ kuželosečky $(m)$ rovnoběžně s $\pi$ protínají plochy kuželův $u\,(AE)$, $v\,(BF)$ v kruzích*), jejichž průměty na $\pi$ mají s $(M)$ styk čtyřbodový a jejichž poloměry rovnají se parametru $p$. Jsou tudíž průměty dotčené kruhy křivosti kuželosečky ve vrcholech $A$, $B$ a do jejich středů promítají se body, ve kterých středové přímky $u\omega_A$, $v\omega_B$ protínají roviny $\sigma_\alpha$, $\sigma_\beta$.

2⁰. Protněme kužel $v\,(BF)$ (obr. 4.) rovinou $\varrho$ proloženou průměrem $CD \perp BF$ kruhové podstavy $(BF)$ rovnoběžné s obrysovou přímkou $vF\,(\varrho'_2 \,||\, Fv')$ v parabole $(m)$, jejíž průmět na $\pi$ je zobrazen parabolou $M$, mající svůj vrchol v $B$ a procházející body $C$, $D$. Vyznačíme-li na $(M)$ jako obr. 2. a 3. bod $M$ kruhem $(BN)$, který je průmětem kruhu $(bn)$, v němž rovina $\sigma \,||\, \pi\; (\sigma'_2 \,||\, AB)$ kužel seče, bude spojnice průsečíku $m'_2 \equiv (\varrho'_2 . \sigma'_2)$ s bodem $M$ státi v bodě $P$ kolmo na $BF$. I v tomto případě $n'N$ stojí kolmo na $BF$. Znamenejme stálou délku stejných

---

*) V obrazcích 2. a 3. nejsou zobrazeny.

úseků $F\omega_B = n'm'_2 = NP = 2p$, učiňme na $\omega_N B$ délku $F_1 B = BR = \frac{1}{2}p$ a označme $PF_1 = x$ a $PM = y$. V trojúhelníku pravoúhlém $MPF$

$$\overline{MF_1}^2 = x^2 + y^2,$$

kdež

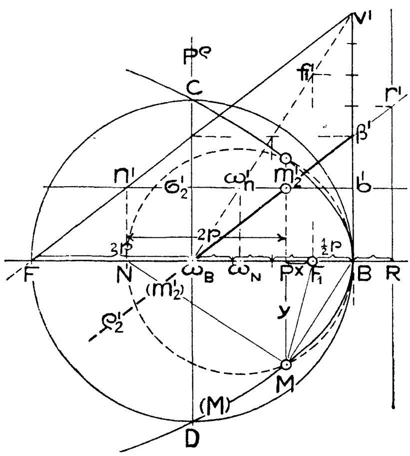
$$y^2 = NP \,.\, PB = 2p\,(x + \tfrac{1}{2}p)$$

v trojúhelníku pravoúhlém $BMN$; pročež

$$\overline{MF_1}^2 = x^2 + 2px + p^2 = (x + p)^2$$

a

$$MF_1 = x + p = PR.$$




Obr. 4.

Je tedy vzdálenost bodu $M$ od bodu $F_1$ rovna vzdálenosti téhož bodu od přímky $Rr' \parallel Bv'$, z čehož jde, že $F_1$ je ohniskem a $Rr'$ přímkou řídicí paraboly $(M)$, tak že $NP = F\omega_B = 4F_1 B = 2p$, kdež $p$ značí parametr paraboly $(M)$.

Též je zřejmo, že rovnoběžná rovina s průmětnou $\pi$ půlící úsek $\beta v$ na obrysové přímce $Bv$ protíná přímku středovou $v\omega_B$ v bodě $f_1$, který na $\pi$ promítá se do ohniska $F_1$ paraboly $(M)$.