Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Josef Kounovský

Základové projektivní geometrie. [I.]

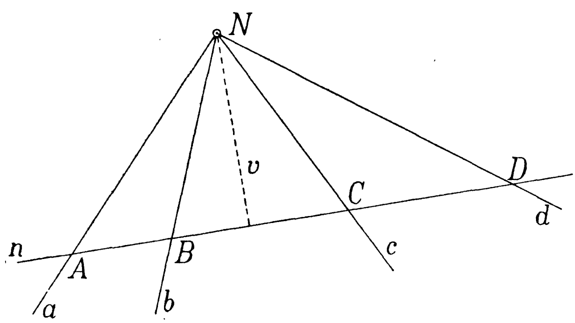
Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 42 (1913), No. 2, 230--236

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121568

Základové projektivní geometrie.

Studujícím středních škol podává dr. Jos. Kounovský.

1. Stať tato sloužiž studujícím našich středních škol jako malý doplněk jich geometrických učebnic, v nichž z geometrie projektivní není mnoho obsaženo. Seznají z ní projektivní vytvořování kuželoseček z bodů a tečen. Realistům často vyskytnou se podobné úlohy v deskriptivní geometrii, i budou moci kuželosečky, jichž osy neb sdružené průměry nejsou známy, přesněji



Obr. 1.

rýsovati sestrojením dalších prvků bodových a tečnových. Všeobecně pak mohou tyto řádky seznámiti čtenáře stručně s nejzákladnějšími vztahy bohaté větve geometrické; na studium podrobnější z našich českých učebnic Ed. Weyra „Projektivná geometrie“ a Vinc. Jarolímka „Základové geometrie polohy“ nezbývá jim jistě času v době, kdy „Přílohu“ odebírají.

2. Souhrn všech bodů dané přímky zove se *řada bodová*. Daná přímka jest *osou* řady.

Souhrn všech přímek procházejících v rovině daným bodem zove se *svazek paprskový*. Daný bod jest *střed* či *vrchol* svazku.

Jednotlivé body řady nebo paprsky svazku slují *prvky* nebo *elementy*. Přímka nazývá se též *nositelkou* bodové řady, bod *nositelem* paprskového svazku.

Spojíme-li body A, B, C, D, . . . na přímce n s bodem N, který leží mimo n (obr. 1.), vytvoří se paprskový svazek a, b,

c, d, . . . Každému bodu řady přísluší určitý paprsek svazku. Svazek ten sluje *zor* dané řady.

Protneme-li obráceně paprskový svazek a, b, c, d, . . . přímkou n, která neprochází jeho středem N, vytvoří se bodová řada A, B, C, D, . . . Každému paprsku svazku přísluší určitý bod řady. Řada ta sluje *řez* daného svazku.

3. Zvolíme-li v bodové řadě dva *základní body* A, B, sluje podíl vzdáleností $\frac{AC}{BC}$ *dělicí poměr* bodu C vzhledem k bodům základním. Utvoříme-li ještě dělicí poměr bodu D vzhledem k týmž bodům základním, zove se podíl

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$$

dvojpoměrem čtyř bodů A, B, C, D vzhledem k základním bodům A, B a značí se symbolicky $(ABCD)$.

Pro čtyři paprsky a, b, c, d téhož svazku zove se podíl

$$\frac{\sin ac}{\sin bc} : \frac{\sin ad}{\sin bd}$$

jich *dvojpoměr* vzhledem k základním paprskům a, b a značí se symbolicky $(abcd)$. Dělicí poměr na př. paprsku c lze nahraditi poměrem kolmic sestrojených kterýmkoli jeho bodem na paprsky základní.

Dvojpoměr čtyř paprsků svazku rovná se příslušnému dvojpoměru v kterémkoli jich řezu.

Budiž v v obr. 1. kolmice sestrojená bodem N na přímku n. Pak

$$2 . \triangle NAC = AC . v = NA . NC . \sin ac$$
$$2 . \triangle NBC = BC . v = NB . NC . \sin bc$$

a dělením

$$\frac{AC}{BC} = \frac{NA}{NB} \cdot \frac{\sin ac}{\sin bc} .$$

Obdobně pro prvky D a d platí

$$\frac{AD}{BD} = \frac{NA}{NB} \cdot \frac{\sin ad}{\sin bd}$$

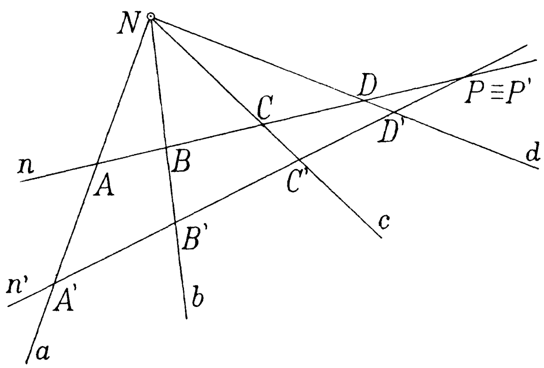
a dělením obou rovnic

$$\frac{AC}{BC}:\frac{AD}{BD}=\frac{\sin ac}{\sin bc}:\frac{\sin ad}{\sin bd}$$

t. j. vskutku $(ABCD) = (abcd)$.

Patrně i obrácené platí:

Dvojpoměr čtyř bodů řady rovná se příslušnému dvojpoměru v kterémkoli jich zoru.



Obr. 2.

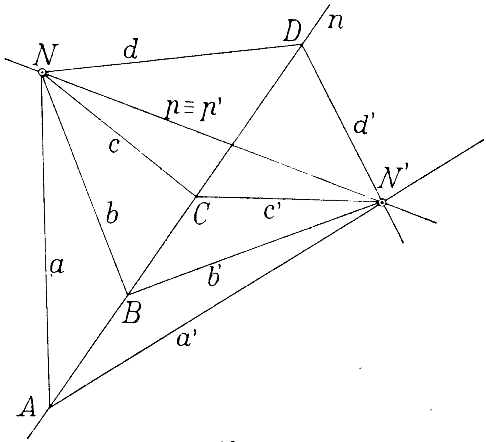
4. Jsou-li dvě bodové řady $A, B, C, D, \ldots$ a $A', B', C', D', \ldots$ na n resp. n' řezy téhož paprskového svazku $a, b, c, d, \ldots$ o vrcholu N (obr. 2.), nazývají se *perspektivní řady bodové.* Každému bodu jedné řady jest *přiřazen* či *sdružen* jediný určitý bod řady druhé. Průsečík řad $P \equiv P'$ jest bodem *samodružným.* Ježto

$$(ABCD) = (abcd) \text{ a } (A'B'C'D') = (abcd).$$

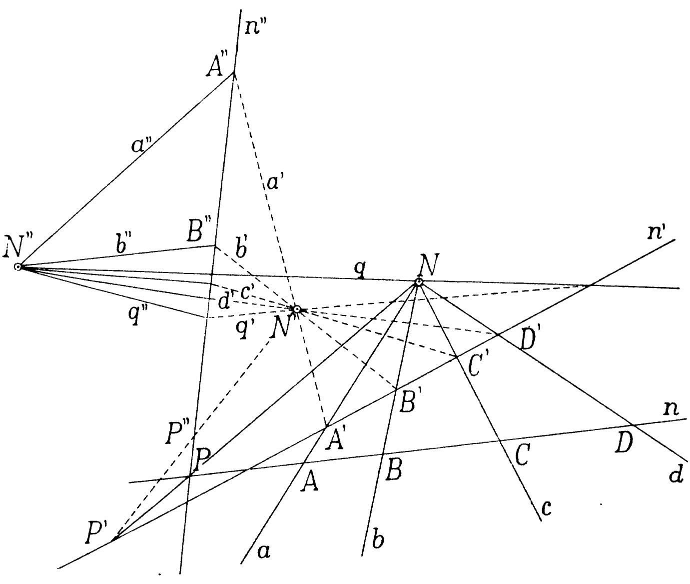
jest i $$(ABCD) = (A'B'C'D'), \text{ t. j.}$$

v perspektivních řadách rovná se dvojpoměr kterýchkoli čtyř bodů jedné řady dvojpoměru sdružených bodů řady druhé.

Jsou-li dva paprskové svazky $a, b, c, d, \ldots$ a $a', b', c', d', \ldots$ o vrcholech N resp. N' zory téže bodové řady $A, B, C, D, \ldots$ na n (obr. 3.), zovou se *perspektivní svazky paprskové.* Každému paprsku jednoho svazku jest *přiřazen* či *sdružen* je-



Obr. 3.



Obr. 4.

diný určitý paprsek svazku druhého. Spojnice obou vrcholů NN' jest paprskem *samodružným* $p \equiv p'$. Ježto

$$(abcd) = (ABCD) \text{ a } (a'b'c'd') = (ABCD),$$

jest i $$(abcd) = (a'b'c'd'), \text{ t. j.}$$

v perspektivních svazcích rovná se dvojpoměr kterýchkoli čtyř paprsků jednoho svazku dvojpoměru sdružených paprsků svazku druhého.

5. Budiž v obr. 4. dána řada $A, B, C, D, \ldots$ na n; utvořme její zor paprskovým svazkem $a, b, c, d, \ldots$ ze středu N; svazek N protněme řadou n', tu promítněme ze středu N' svazkem $a', b', c', d', \ldots$, svazek ten protněme řadou n'', utvořme dále zor této ze středu N'' atd.

Řada n jest perspektivní s n', n' s n'' atd., svazek N jest perspektivní s N', N' s N'' atd. I jest

$$(ABCD) = (abcd) = (A'B'C'D') = (a'b'c'd') =$$
$$(A''B''C''D'') = (a''b''c''d'') = \text{atd.}$$

Všimneme-li si blíže řady n a n'' (nebo n''' atd.), seznáváme, že každému bodu řady n přísluší jediný určitý bod řady n'' a že dvojpoměr kterýchkoli čtyř bodů řady jedné rovná se dvojpoměru sdružených bodů řady druhé. Řady ty nejsou perspektivní, nejsouce řezy téhož svazku. Zovou se *projektivní řady bodové.*

Obdobně ve svazcích N a N'' (nebo N''' atd.) přísluší každému paprsku jednoho jediný určitý paprsek druhého svazku, dvojpoměr pak kterýchkoli čtyř paprsků jednoho svazku rovná se dvojpoměru sdružených paprsků svazku druhého. Svazky ty nejsou perspektivní, nejsouce zory téže řady. Zovou se *projektivní svazky paprskové.*

Při tomto přiřazování prvků jednotlivých útvarů jest též zřejmo, že průsečíky řad n a n'' a spojnice vrcholů svazků N a N'' nejsou prvky samodružnými. K průsečíku P řad n a n'' sestrojen P' a z toho odvozen $P'' \gtrless P$. Obdobně k paprsku $q \equiv NN''$ sestrojen q' a z toho odvozen $q'' \gtrless q$.

Dvě řady bodové
Dva svazky paprskové *zovou se projektivní, jsou-li ze sebe vytvořeny postupným sestrojováním řezů a zorů (řetězem*

perspektivních řad a svazků). Každému $\begin{array}{l}\textit{bodu jedné řady}\\ \textit{paprsku jednoho svazku}\end{array}$ *přísluší jediný určitý* $\begin{array}{l}\textit{bod řady druhé.}\\ \textit{paprsek svazku druhého.}\end{array}$ *Sdružené čtveřinové skupiny prvků mají týž dvojpoměr.*

6. *Projektivní vztah dvou bodových řad jest určen známostí tří dvojin sdružených bodů obou řad.*

Přiřaďme bodům A, B, C řady n body A', B', C' řady n'. Pak možno ku každému bodu D řady n určiti jednoznačně sdružený bod D' řady n'. Neboť v rovnici $(A'B'C'D') = (ABCD)$ známe pravou stranu a dělicí poměr $\frac{A'C'}{B'C'}$; i možno vypočísti dělicí poměr $\frac{A'D'}{B'D'}$ a bod D' pak sestrojiti. Že jediná tato projektivita skutečně existuje, ukážeme dále.

Jestliže na řadách n a n' zvolíme sdružené body AA', BB' a třetí dvojinu $C \equiv C'$ označíme specielně v průsečíku obou, pak jsou zvoleny řady perspektivní; AA' a BB' protínají se ve vrcholu svazku, jehož řezy jsou obě dané řady.

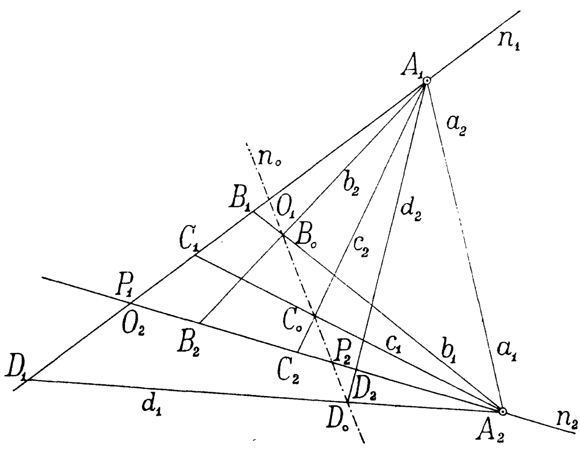
Projektivní vztah dvou paprskových svazků jest určen známostí tří dvojin sdružených paprsků obou svazků.

Buďtež N a N' vrcholy svazků, v nichž libovolně zvoleny dvojiny sdružených paprsků aa', bb', cc'. Pak možno ku každému paprsku d svazku N určiti jednoznačně sdružený paprsek d' svazku N'. Výpočet dělicího poměru děje se jako u řad, pro sestrojení použijeme řezu A', B', C', D' svazku N' pomocnou přímkou a sestrojí se D' z rovnice $(A'B'C'D') = (abcd)$; $d' \equiv D'N'$. Že jediná tato projektivita skutečně existuje, ukážeme dále.

Jestliže ve svazcích N a N' zvolíme sdružené paprsky aa', bb' a třetí dvojinu $c \equiv c'$ označíme specielně v spojnici NN', pak jsou zvoleny svazky perspektivní; spojnice průsečíků a s a' a b s b' určuje řadu, jejímiž zory jsou oba dané svazky.

7. V obr. 5. jsou dány na přímkách n_1 a n_2 dvě projektivní řady třemi dvojinami sdružených bodů A_1A_2, B_1B_2 a C_1C_2. Sestrojiti D_2, dáno-li libovolně D_1.

Spojme bod A_1 s body A_2, B_2, C_2, ... paprsky a_2, b_2, c_2, ... a bod A_2 s body A_1, B_1, C_1, ... paprsky a_1, b_1, c_1, ... Svazky a_2, b_2, c_2, ... a a_1, b_1, c_1, ... jsou projektivní, ježto však spojnice vrcholů A_1, A_2 jest paprskem samodružným, jsou svazky ty perspektivní a jsou zory téže řady $n_0 \equiv B_0, C_0, \ldots$, stanovené body $B_0 \equiv b_1 . b_2$ a $C_0 \equiv c_1 . c_2$. Přímka n_0 zove se *perspektivní osa* řad n_1 a n_2. Spojnice A_2D_1 protíná ji v D_0, spojnice A_1D_0 určuje na n_2 žádaný bod D_2.



Obr. 5.

Řetěz perspektivních útvarů o nositelích n_1, A_2, n_0, A_1, n_2 odůvodňuje rovnost dvojpoměrů $(A_1B_1C_1D_1) = (A_2B_2C_2D_2)$, čímž konstrukce ozřejměna a ukázáno, že projektivita dvou bodových řad, určená třemi dvojinami sdružených prvků, skutečně existuje.

Snadná úvaha vysvětlí, že perspektivní osa protíná obě řady v bodech sdružených s průsečíkem obou řad ($O_2 \equiv P_1$).

(Dokončení.)