Karel Zahradník

Geometrie kruhu. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 5 (1876), No. 1, 10--23

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121564

Geometrie kruhu.

Pro žáky středních škol sestavil

Dr. Karel Zahradník.

I. Rovnice kruhu.

1. *Bodové dané roviny, kteří od pevného bodu téže roviny stejně vzdáleni jsou, tvoří kruh, an jest místem takých bodů.* Onen bod pevný nazýváme *středem* a vzdálenost jeho od libovolného bodu kruhu *poloměrem.*

Značí-li x, y souřadnice libovolného bodu M na kruhu, a, b souřadnice středu C, r poloměr, ω úhel os souřadnic, tu máme podlé známé poučky

$$\overline{CM}^2 = \overline{CN}^2 + \overline{MN}^2 - 2 \,.\, \overline{CN} \,.\, \overline{MN} \cos (MCN)$$

aneb

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 - 2(x-a)(y-b) \cos \omega \,.$$

Obdrželi jsme takto vztah mezi souřadnicemi libovolného bodu na kruhu a stálými a, b, r, ω, t. j. *rovnici kruhu.*

Při souřadnicích pravoúhlých [1]) jest $\omega = 90^0$, tudíž rovnice kruhu v tomto případě

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \,, \tag{1}$$

aneb ve tvaru rozvinutém, položíme-li

$$a^2 + b^2 - r^2 = c^2$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c^2 = 0 \tag{2}$$

Rovnici (2) nazýváme rovnicí kruhu tvaru *normálního* rozeznávajíce jej od tvaru *obecného,* jejž obdržíme, násobíme-li rovnici (2) libovolným koëfficientem. Shledáváme tedy co znak tvaru normálního, že koëfficienty při x^2 a y^2 rovnají se jedničce, kdežto při obecném tvaru prostě se rovnají.

Volíme-li střed kruhu za počátek souřadnic, bude $a = 0$, $b = 0$ a rovnice (1) přejde ve

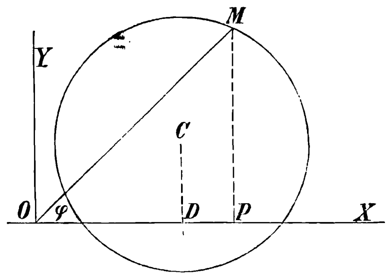
$$x^2 + y^2 = r^2 \,, \tag{3}$$

již rovnicí *středovou* kruhu nazýváme.

[1]) V průběhu pojednání tohoto upotřebuji souřadnic pravoúhelných, není-li opak hned s počátku článku výslovně podotknut.

2. Spojme libovolný bod kruhu M s počátkem souřadnic O a položme $OM = \varrho$ a úhel $(\varrho X) = \varphi$ (obr. 1), tu můžeme

Obr. 1.



souřadnice bodu M pomocí ϱ a φ vyjádřiti následovně:

$$x = \varrho \cos \varphi$$
$$y = \varrho \sin \varphi .$$

Zavedeme-li hodnoty tyto za x a y do rovnice (2), obdržíme

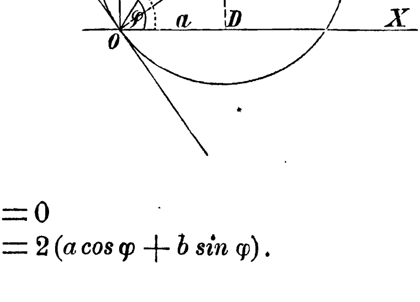
$$\varrho^2 - 2(a \cos \varphi + b \sin \varphi)\, \varrho + c^2 = 0 . \qquad (4)$$

Jelikož koëfficient při ϱ^2 nikdy nemůže se u rovnice kruhu rovnati nulle, nemůže se ϱ státi nekonečně velikým, t. j. kruh je křivkou úplně uzavřenou, jak již z výměru na počátku podaného vysvítá.

Rovná-li se $c^2 = 0$ (obr. 2.), tu bude

$$\varrho\, [\varrho - 2(a \cos \varphi + b \sin \varphi)] = 0 ,$$

Obr. 2.



tedy

$$\varrho = 0$$
$$\varrho = 2(a \cos \varphi + b \sin \varphi) . \qquad (5)$$

Prvá z rovnic (5) nám praví, že počátek souřadnic leží na kruhu, což i z rovnice (2) vysvítá, neb je-li $c^2 = 0$, vyhovují rovnici (2) souřadnice bodu $x = 0$, $y = 0$, t. j. souřadnice počátku. Rovná-li se též

$$a \cos \varphi + b \sin \varphi = 0, \tag{6}$$

tu i druhý kořen ϱ rovná se nulle, t. j. přímka procházející počátkem protíná v tomto případě kruh ve dvou splývajících bodech.

Násobíme-li rovnici (6) hodnotou ϱ, obdržíme

$$a \varrho \cos \varphi + b \varrho \sin \varphi = 0$$

aneb vrátíme-li se k původním veličinám,

$$ax + by = 0. \tag{7}$$

Rovnice (7) značí rovnici přímky T_0 procházející počátkem souřadnic směrem, jenž, jak z odvození vysvítá, rovnici (6) vyhovuje. Přímka rovnicí (7) vyjádřená protíná tudíž kruh ve dvou splývajících bodech, jest tečnou kruhu. Rovnice přímky spojující střed kruhu s bodem styku tečny (7), jenž patrně jest počátkem souřadnic, zní

$$y = \frac{b}{a} x$$

aneb

$$bx - ay = 0. \tag{8}$$

Porovnáme-li rovnici (7) a (8), shledáváme známou vlastnost kruhu, že *tečna kolmo stojí na poloměru.*

3. Podlé předcházejícího můžeme vysvětliti snadně následující rovnici kruhu

$$x^2 + y^2 - 2ax = 0. \tag{9}$$

Počátek souřadnic leží patrně na kruhu a tečna v tomto bodě jest

$$x = 0,$$

totiž osa y. Jest tedy rovnicí (9) vyjádřen kruh, jenž se dotýká osy y v počátku souřadnic. Rovnici (9) nazýváme *vrcholovou* rovnici kruhu a píšeme ji obyčejně ve tvaru

$$y^2 = (2a - x)\, x,$$

kdež nám podává následující vlastnost kruhu: Spustíme-li z libovolného bodu kruhu na průměr kolmici, tvoří tato na průměru dva úseky, a součin těchto úseků rovná se čtverci kolmice.

II. Podmínky, za kterými rovnice stupně druhého značí kruh.

4. Obecná rovnice stupně druhého zní

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \qquad (1)$$

a normální rovnice kruhu rozvedena jest

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c^2 = 0. \qquad (2)$$

Mají-li obě tyto rovnice vyjadřovati jeden a týž kruh, musí se rovnice druhá úplně rovnati rovnici prvé až na jistého faktora, kterým všechny členy mohly býti zkráceny. Násobíme-li tudíž rovnici (2) takým faktorem λ, budou tu rovnice (1) a (2) identické, t. j.

$$\lambda = A, \quad 0 = B, \quad \lambda = C \qquad (3, a)$$

$$-a\lambda = D, \quad -b\lambda = E, \quad \lambda c^2 = F \qquad (3, b)$$

Rovnice (3 a) nezávisí na a, b, c^2 a podávají nám tím hledané podmínky, jimž koëfficienty rovnice (1) vyhověti musí, má-li tato býti rovnicí kruhu. Podmínečné rovnice (3 a) můžeme též psáti ve tvaru

$$\begin{aligned} A &= C \\ B &= 0, \end{aligned} \qquad (4)$$

to jest *koëfficienty při čtvercích neznámých musí se rovnati a býti téhož znaménka a mimo to koëfficient členu xy musí se rovnati nulle.*[2])

Tyto podmínky jsou nutné a také úplně dostačí neb vyhoví-li se jim, zůstanou nám ještě tři rovnice, (3 b), z nichž a, b, r určiti můžeme a sice

$$\begin{aligned} a &= -\frac{D}{A}, \\ b &= -\frac{E}{A}, \\ r^2 &= \frac{D^2 + E^2 - AF}{A^2}. \end{aligned} \qquad (5)$$

Z rovnic (5) vysvítá, že souřadnice středu vždy jsou reálné a co se tkne poloměru, je buď reálný, rovná se nulle aneb je imaginárný, dle toho, je-li

---

[2]) Platí při pravoúhlých souřadnicích, při kosoúhlých jest

$$A = C, \quad \frac{B}{A} = \cos\omega.$$

$$D^2 + E^2 \gtreqless AF.$$

Rovná-li se poloměr kruhu nulle, pravíme, že kruh přešel na svůj střed, neb že je nekonečně malý. Kruh s pomyslným poloměrem nedá se geometricky znázorniti, jest to pouhý analytický pojem, k němuž jsme vedeni poznámkou, že rovnice stupně druhého (1) všem nutným podmínkám vyhovuje, za kterými značí kruh.

Jak z rovnic (5) vysvítá, nezávisí souřadnice středu kruhu a, b na stálém členu, z čehož soudíme, že dva kruhy, jejichž rovnice pouze ve stálém členu se liší, jsou soustředné. Píšeme-li rovnici (2) zkrátka

$$K = 0,$$

bude rovnice kruhu soustředného

$$K + d = 0,$$

a jeho poloměr

$$r_1 = \sqrt{r^2 - d}.$$

III. Průseky přímky s kruhem.

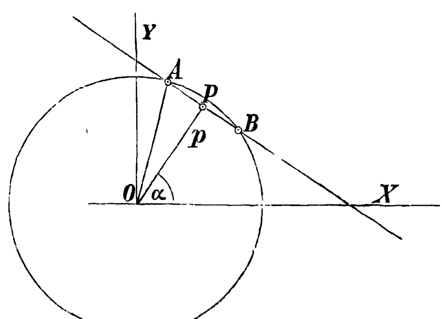
5. Budiž

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad (1)$$

rovnice kruhu a rovnice přímky

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p. \qquad (2)$$

Obr. 3.



Body průsečné (obr. 3.) leží jak na přímce, tak na kruhu, musí tudíž souřadnice jejich rovnicím (1) a (2) vyhověti. Porovnáme-li hodnoty pro y plynoucí z obou rovnic, obdržíme rovnici

$$\frac{p - x \cos\alpha}{\sin\alpha} = \sqrt{r^2 - x^2},$$

aneb po krátké přeměně

$$x^2 - 2p \cos\alpha \,.\, x + p^2 - r^2 \sin^2\alpha = 0\,, \tag{3}$$

kteráž nám podává úsečky průseků, totiž

$$x = p \cos\alpha \pm \sin\alpha \sqrt{r^2 - p^2}.$$

Zavedeme-li tuto hodnotu za x do rovnice (2), obdržíme hodnotu za příslušnou pořadnici

$$y = p \sin\alpha \mp \cos\alpha \sqrt{r^2 - p^2}.$$

Odpovídá tudíž znaménko — v hodnotě za y znaménku $+$ v hodnotě za x a naopak.

Obdrželi jsme dva páry sdružených hodnot x a y, to jest přímka protíná kruh ve dvou bodech a tyto jsou reálné, pokud $r > p$, splývají v jeden za $r = p$, a daná přímka prochází tu dvěma splývajícími body kruhu, jest *tečnou* kruhu. Konečně může též $r < p$ býti. Tu leží přímka mimo kruh, neprotíná jej aneb, jak se obyčejně vyjadřujeme, protíná kruh ve dvou bodech pomyslných.

6. Délku tětivy obdržíme přímo z obrazce 3. aneb analyticky dle známého vzorce pro vzdálenost dvou bodů:

$$\overline{AB}^2 = 4\,[\sin^2\alpha\,(r^2 - p^2) + \cos^2\alpha\,(r^2 - p^2)] = 4\,(r^2 - p^2)$$

tedy

$$\overline{AB} = 2\sqrt{r^2 - p^2}.$$

K znaménku odmocniny zde přihlížeti nemusíme, neb se nám jedná o absolutní délku tětivy (znaménku — odpovídala by totiž tětiva $\overline{BA}$ t. j. tatáž tětiva v opačném smyslu vzata).

IV. Body kruhové v nekonečnu.

7. Rovnici kruhu

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c^2 = 0$$

můžeme učiniti stejnoměrnou (homogen), položíme-li $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ za x, y. Bude tu

$$x^2 + y^2 - 2axz - 2byz + c^2 z^2 = 0.$$

Rovnice přímky úběžné [3]) (nekonečně vzdálené) jest
$$z=0,$$
tudíž jsou body kruhové, které leží na přímce úběžné, dané rovnicemi
$$\begin{aligned} x^2+y^2&=0, \\ z&=0. \end{aligned} \qquad (1)$$

Prvá z těchto rovnic značí nám kruh o nekonečně malém poloměru, aneb dvě přímky imaginárné, jejichž rovnice obdržíme, rozložíme-li rovnici toho kruhu na dva činitele, sice
$$(y-x\sqrt{-1})\,(y+x\sqrt{-1})=0. \qquad (2)$$

I shledáváme, že rovnice, které nám určují body kruhu ležící na přímce úběžné nezávislé jsou na veličinách a, b, c^2 z čehož plyne:

„*Všechny kruhy v jedné rovině procházejí dvěma pevnými imaginárnými body v nekonečnu. Body tyto všem kruhům společné nazývají se body kruhové v nekonečnu.*[4])

V. Sečna kruhu.

8. Budiž
$$x^2+y^2=r^2$$
rovnice kruhu daného, a $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ dva body ležící na kruhu. Rovnice přímky procházející dvěma body jest obecně
$$y-y_1=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_1). \qquad (1)$$

Podíl $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$ značí směrnici přímky. Aby rovnice (1) značila sečnu kruhu, třeba v ní zavésti podmínku, že body A, B leží na kruhu. Souřadnice jejich musí totiž vyhověti rovnici kruhu a tudíž současně býti
$$\begin{aligned} x_1^2+y_1^2&=r^2 \\ x_2^2+y_2^2&=r^2, \end{aligned} \qquad (2)$$

---

[3]) Viz Weyr: „Určování nekonečně vzdálených prvků útvarů geometrických“. Časopis I. pag. 163.

[4]) Tutéž větu odvozenou cestou synthetickou viz v pojednání dr. Em. Weyra „O promítavých vlastnostech kruhu,“ Zpráva III. jednoty česk. mathemetiků, pag. 14.

aneb odčítáme-li tyto rovnice,

$$(x_1{}^2 - x_2{}^2) + (y_1{}^2 - y_2{}^2) = 0 .$$

Rozložíme-li rozdíly čtverců v součiny, obdržíme

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + (y_1 - y_2)(y_1 + y_2) = 0,$$

z kteréžto rovnice plyne hodnota pro směrnici sečny

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} . \qquad (3)$$

Zavedeme-li hodnotu tuto za směrnici do rovnice (1), obdržíme hledanou rovnici sečny

$$(y - y_1)(y_1 + y_2) + (x - x_1)(x_1 + x_2) = 0; \qquad (4)$$

neb dle odvození značí rovnice (4) přímku, procházející dvěma body A, B a dle rovnice (3) leží tyto body na kruhu. Rovnici této můžeme též dáti tvar

$$y(y_1 + y_2) + x(x_1 + x_2) = y_1 y_2 + x_1 x_2 + r^2, \qquad (5)$$

z něhož vhodný vzorec pro vzdálenost (obr. 3.) tětivy $\overline{AB}$ od středu odvoditi lze a sice

$$OP = \sqrt{\frac{y_1 y_2 + x_1 x_2 + r^2}{2}} \qquad (6)$$

VI. Tečna a normála bodu na kruhu.

9. Z rovnice sečny snadně odvoditi můžeme rovnici tečny, předpokládáme-li, že body A a B splynou.

Zavedeme-li tuto podmínku, totiž že $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$ do rovnice sečny (5), obdržíme rovnici tečny po malé redukci

$$yy_1 + xx_1 = r^2. \qquad (1)$$

Rovnice tato platí, když počátek souřadnic jest středem kruhu. Volíme-li nový počátek, pro nějž by souřadnice středu byly a, b, bude rovnice kruhu

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

a rovnice tečny patrně

$$(x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = r^2. \qquad (2)$$

10. Rovnici normály, jakožto přímky procházející bodem kruhu x_1, y_1 a kolmé k tečně v tomto bodu obdržíme snadno z rovnice (1); zníť

$$y - y_1 = + \frac{y_1}{x_1}(x - x_1),$$

aneb

$$yx_1 - xy_1 = 0. \qquad (3)$$

Jelikož v rovnici (3) stálý člen se nevyskytuje, shledáváme, že normála každého bodu kruhu jeho středem prochází, což již z čl. 2. jsme dovodili, ukázavše, že tečna na svém poloměru kolmo stojí.

VII. Tečna bodu mimo kruh.

11. Dán budiž bod $B(x_1, y_1)$, z něhož máme vésti tečny ku kruhu. A budiž hledaný bod styku. Souřadnice tohoto bodu (xy), jelikož kruhu přísluší, vyhověti musí rovnici kruhu, tudíž máme

$$x^2 + y^2 = r^2. \qquad (1)$$

Rovnice tečny v bodě (x, y) (čl. 9.) jest

$$x\xi + y\eta = r^2, \qquad (2)$$

kdež $(\xi\,\eta)$ značí souřadnice proměnného bodu na tečně, a jelikož tečna tato bodem $B(x_1, y_1)$ probíhati má, musí souřadnice tohoto bodu též rovnici (2) vyhověti, z čehož plyne:

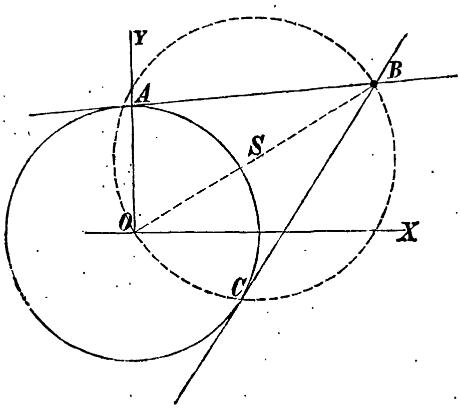
$$xx_1 + yy_1 = r^2. \qquad (3)$$

Obdrželi jsme takto dvě rovnice (1) a (3) mezi souřadnicemi bodu styku, a souřadnice samy plynou řešením zmíněných rovnic dle x a y.

Vyloučíme-li y, obdržíme rovnici

$$(x_1^2 + y_1^2)x^2 - 2r^2x_1x + r^2(r^2 - y_1^2) = 0, \qquad (4)$$

Obr. 4.



kteráž nám podává úsečky bodu styku (obr. 4.). Rovnice (4) jest podlé x stupně druhého, z čehož plyne, že z libovolného bodu roviny kruhu dvě tečny ku kruhu vésti můžeme, tyto jsou obě buď reálné, pomyslné aneb splývají v jednu, je-li

$$r^4 x_1^2 - r^2 (r^2 - y_1^2)(x_1^2 + y_1^2) \gtreqless 0,$$

aneb

$$r^2 y_1^2 (x_1^2 + y_1^2 - r^2) \gtreqless 0. \qquad (5)$$

Činitel $r^2 y_1^2$ jest stále kladný, tedy závisí znaménko výrazu (5) na činiteli druhém, totiž $x_1^2 + y_1^2 - r^2$; je-li tedy (obr. 3.)

1) $x_1^2 + y_1^2 - r^2 > 0$, tu jest $OB > r$, t. j. bod B leží mimo kruh a obě tečny jsou reálné;

2) $x_1^2 + y_1^2 - r^2 < 0$, tu jest $OB < r$, tedy bod B leží uvnitř kruhu a tečny z tohoto bodu jsou pomyslné;

3) $x_1^2 + y_1^2 - r^2 = 0$, tu $OB = r$, t. j. bod B leží na kruhu a obě tečny splývají v jednu tečnu, a tu máme případ článku 9.

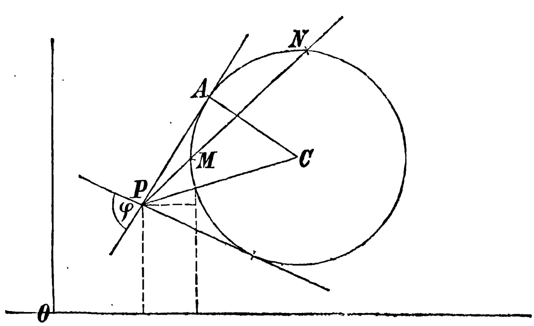
VIII. Jiný způsob stanovení tečen.

12. V předcházejícím článku zvolili jsme střed kruhu za počátek souřadnic, neb obecnou rovnici kruhu vždy ihned možná na středovou zaměniti; nyní volme opět rovnici kruhu ve tvaru normálném. Budiž tedy

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c^2 = 0 \qquad (1)$$

rovnice daného kruhu, a $P(x_1 y_1)$ bod, z něhož máme tečny vésti

Obr. 5.



ku kruhu. Veďme zprvu libovolnou přímku (obr. 5.). Průseky této přímky s kruhem buďtež M a N. Souřadnice bodu P buďtež x_1, y_1 a x, y souřadnice bodu M. Vzdálenost PM budiž

s a sklon té přímky k ose x nechť je α. Tu máme:

$$\begin{aligned} x - x_1 &= s \cos \alpha \\ y - y_1 &= s \sin \alpha. \end{aligned} \qquad (2)$$

Z rovnic těchto plyne

$$\begin{aligned} x &= x_1 + s \cos \alpha \\ y &= y_1 + s \sin \alpha. \end{aligned} \qquad (3)$$

Rovnice (2) podávají nám dohromady rovnici přímky, již ve tvaru obyčejném bychom obdrželi, kdybychom druhou rovnici soustavy (2) prvou dělili. Rovnice (3) značí souřadnice libovolného bodu této přímky. Geometricky mohli bychom rovnice (3) následovně vyjádřiti: „Mění-li libovolný bod (x, y) svou vzdálenost s od daného bodu $(x_1 y_1)$ stálým směrem α, popisuje přímku, jejíž rovnici obdržíme, vyloučíme-li z rovnic (3) proměnnou vzdálenost s."

Zavedeme-li souřadnice bodu (xy) z rovnic (3) do rovnice (1), tu předpokládáme, že (xy) ve (3) a (1) se rovnají, že značí souřadnice průseků přímky (3) s kruhem (1), načež výsledná rovnice obsahovati bude pouze s a α, t. j. udávati nám bude vzdálenosti průseků M a N od bodu P na přímce vedené tímto bodem směrem α. I obdržíme takto, spořádavše výsledek dle mocností s,

$$\begin{aligned} s^2 &+ 2s\,[(x_1 - a) \cos \alpha + (y_1 - b) \sin \alpha] \\ &+ [x_1^2 + y_1^2 - 2a_1 x_1 - 2by_1 + c^2] = 0. \end{aligned} \qquad (4)$$

V případě tečny bude $PM = PN = PA$, t. j. rovnice (4) musí míti dva stejné kořeny; tedy musí býti

$$[x_1^2 + y_1^2 - 2ax_1 - 2by_1 + c^2] = [(x_1 - a) \cos \alpha + (y_1 - b) \sin \alpha]^2. \qquad (5)$$

Rovnice tato podává nám směr tečen vedených z bodu P ku kruhu. Položme do rovnice (5) k vůli stručnosti místo

$$\begin{gathered} x_1^2 + y_1^2 - 2ax_1 - 2by_1 + c^2 = t^2 \\ tg\, \alpha = \lambda, \end{gathered}$$

načež obdržíme

$$(1 + \lambda^2)\, t^2 = [(x_1 - a) + (y_1 - b)\, \lambda]^2; \qquad (6)$$

aneb spořádáme-li rovnici tuto dle mocností λ,

$$\lambda^2\, [t^2 - (y_1 - b)^2] - 2\lambda\, (x_1 - a)\, (y_1 - b) + (t^2 - (x_1 - a)^2) = 0,$$

aneb zavedeme-li za t opět hodnotu příslušnou:

$$\lambda^2\, [x_1 - a)^2 - r^2] - 2\lambda\, (x_1 - a)\, (y_1 - b) + [(y_1 - b)^2 - r^2] = 0,$$

z čehož

$$\lambda = \frac{(x_1-a)(y_1-b) \pm rt}{(x_1-a)^2-r^2}, \tag{7}$$

a úhel obou tečen φ bude dle vzorce

$$tg\,\varphi = \frac{tg\,\alpha - tg\,\alpha_1}{1 + tg\,\alpha\, tg\,\alpha_1}$$

po krátké redukci:

$$tg\,\varphi = \frac{2rt}{t^2-r^2}. \tag{8}$$

Známe-li směrnici tečny ku kruhu pomocí vzorce (7), procházející daným bodem $(x_1 y_1)$, můžeme rovnici této tečny ihned napsati, neb dělením rovnic (2) se obdrží

$$y-y_1 = tg\,\alpha\,(x-x_1),$$

a tudíž jest

$$y-y_1 = \frac{(x_1-a)(y_1-b) \pm rt}{(x_1-a)^2 - r^2}(x-x_1),$$

hledaná to rovnice tečen. [5])

Kdyby bod, z něhož tečny ku kruhu vésti chceme, byl středem kruhu, t. j. kdyby $x_1 = a$, $x_2 = b$, tu by směrnice tečen dle (7) byly

$$\lambda = \mp \sqrt{-1},$$

tedy rovnice tečen

$$y - b = \mp \sqrt{-1}\,(x-a). \tag{9}$$

I shledáváme, že střed jest průsek tečen, jejichž směrnice rovnají se $\pm \sqrt{-1}$, body styku těchto tečen jsou body kruhové. Později shledáme, že tyto přímky asymptotami kruhu jsou.

IX. Mocnost bodu vzhledem ku kruhu.

13. Spojíme-li bod P se středem kruhu C (obr. 5.) a vedeme-li tečnu PA a poloměr její AC, budo PAC pravoúhelný

---

[5]) Provedení toto bylo by mnohem kratší, kdybychom bod $(x_1\, y_1)$ zvolili za počátek souřadnic. Rovnice tečny byla by tu tvaru $y = \lambda x$. Třeba tuto hodnotu za y do rovnice kruhu zavésti, načež bychom obdrželi vzhledem k x rovnici stupně druhého. Určili bychom podmínku, aby tato rovnice měla vzhledem k x oba kořeny stejné. Tato podmínečná rovnice bude vzhledem k λ stupně druhého a kořeny její λ_1, λ_2 byly by směrnice tečen. Rovnice obou tečen byly by pak $y = \lambda_1 x$, $y = \lambda_2 x$. Výhoda spůsobu, jejž jsem svrchu podal, objeví se ihned.

trojúhelník a tudíž

$$\overline{PC}^2 - \overline{AC}^2 = \overline{PA}^2;$$

položíme-li délku tečny $\overline{PA} = t$, bude tedy

$$(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 - r^2 = t^2, \qquad (1)$$

aneb

$$x_1{}^2 + y_1{}^2 - 2ax_1 - 2by_1 + c^2 = t^2; \qquad (2)$$

což nám podává větu:

Výsledek substituce souřadnic libovolného bodu P mimo kruh v stejné rovině ležícího do levé strany rovnice kruhu značí čtverec tečny z bodu P ku kruhu vedené.

Označíme-li zkrátka rovnici kruhu $K = 0$, a výsledek substituce souřadnic bodu (x_1, y_1) do K zkrátka K^1, bude

$$K^1 = t^2. \qquad (3)$$

14. Vraťme se nyní k rovnici (4) čl. 12. Zmíněná rovnice zní vzhledem k rovnici (3)

$$s^2 + 2s\,[(x_1 - a)\cos\alpha + (y_1 - b)\sin\alpha] + t^2 = 0. \qquad (4)$$

Z rovnice této vysvítá relace mezi kořeny jejími:

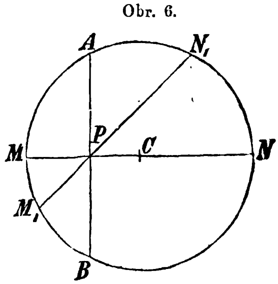
$$s_1\, s_2 = t^2,$$

aneb dle obr. 5.

$$PM\,.\,PN = \overline{PA}^2,$$

t. j. vedeme-li pevným bodem P přímku směrem libovolným, protíná tato kruh ve dvou bodech M a N a součin vzdáleností bodů průsečných od bodu pevného jest veličina stálá.

Obr. 6.



Kdyby bod $(x_1\, y_1)$ ležel uvnitř kruhu (obr. 6.), bylo by

$$(x - a)^2 + (y_1 - b)^2 < r^2$$

tedy t^2 negativné, což nám značí, že úseky PM a PN jsou směru protivného. V případě tomto obdržíme význam veličiny t^2, když proložíme bodem P průměr MN a k průměru v bodě P kolmici sestrojíme. Je tu patrně

$$PM\,.\,PN = PA\,.\,PB = -\,\overline{PA}^2$$

neb jest

$$PA = -\,PB.$$

Čtverec t^2 nazývá se v obou případech dle Steinera mocnost bodu $(x_1\, y_1)$ vzhledem ku kruhu.

Nyní můžeme snadno určiti délku tečny daného bodu ku kruhu.

Délka tečny z daného bodu ku kruhu vedené rovná se druhé odmocnině z mocnosti tohoto bodu. Tečny jsou reálné, je-li bod mimo kruh, neb tu je mocnost bodu kladná; jsou imaginárné, je-li bod uvnitř kruhu, neb jeho mocnost je tu záporná.

15. Nyní též vyložiti můžeme blíže význam vzorce 7. čl. 12. totiž

$$tg\,\varphi = \frac{2rt}{t^2 - r^2}. \qquad (5)$$

1) Je-li $t = r$, tu $\varphi = \infty$, tedy $\varphi = 90^0$. Uzavírají-li tečny úhel pravý, rovnají se co do délky poloměru.

2) Je-li $t = \infty$, tu $tg\,\varphi = 0$, tečny bodu uběžného jsou rovnoběžné.

Naopak můžeme z rovnice (4) určiti délku tečen jistého bodu, dán-li úhel, jejž mají uzavírati; neb řešením dle t plyne

$$t = \frac{r}{sin\,\varphi}\,[cos\,\varphi \pm 1].$$

Dolejšímu znaménku nepřisluší žádný určitý geometrický význam; zbývá pouze znaménko hořejší, tedy vzorec

$$t = r\,cosec\,\varphi\,(cos\,\varphi + 1). \qquad (6)$$

(Pokračování.)

O vědeckých základech umění kreslitelského
od jeho počátku až do poloviny 15. století.

Podává

M. Kuchynka.

Umění výtvarné, jak známo, dělí se na tři odvětví: *architekturu, sochařství a malířství,* kterážto umění od sebe i co do *předmětů,* i co do *prostředků* a *pomůcek* podstatně se liší.