

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Bohumil Bečka

Určení hodnoty pomyslného součinu $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)+(1+i)}{n(n+1)+(1-i)}$

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 5 (1876), No. 1, 37--38

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/121559>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1876

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Určení hodnoty pomyslného součinu:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1) + (1+i)}{n(n+1) + (1-i)}.$$

Podává

B. Bečka.

V následujících řádcích chci dokázat, že součin dotčený, jenž tu naznačen jest symbolem Π , blíží se při vzrůstajícím n mezi $\sqrt{-1} = i$. K tomu cíli učinmež následující úvahu:

Rozdělíme-li jedno z ramen pravého úhlu \overline{XAY} na nekonečné množství dílů délky a a zvolíme-li na rameni druhém bod v tak, že vzdálenost jeho od vrcholu A jest b , obdržíme, spojíce v s body délky a oddělujícími, úhly při v , jež označme od ramena \overline{Av} počínajíce postupně $\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$.

I platí o úhlech těchto vztah

$$\frac{(n+1)a}{b} = tg \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k + \alpha_n \right\} = \frac{tg \sum \alpha_k + tg \alpha_n}{1 - tg \sum \alpha_k tg \alpha_n};$$

avšak zároveň jest

$$tg \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k = \frac{na}{b},$$

pročež bude

$$\frac{(n+1)a}{b} = \frac{\frac{na}{b} + tg \alpha_n}{1 - \frac{na}{b} tg \alpha_n};$$

řešíme-li tu dle $tg \alpha_n$, obdržíme

$$tg \alpha_n = \frac{ab}{n(n+1)a^2 + b^2},$$

a tudíž naopak

$$\alpha_n = \arctg \frac{ab}{n(n+1)a^2 + b^2};$$

kladouce nyní v poslední stejninu po sobě $n = 0, 1, 2, 3 \dots \infty$, obdržíme sečtením všech takto nabytých rovnic, ježto dle sestrojení jest

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \frac{\pi}{2},$$

rovnici

$$\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{ab}{n(n+1)a^2 + b^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Získavše tuto relaci, můžeme přikročiti k důkazu poučky svrchu vyslovené.

Tu dostačí, abychom se upamatovali, že jest, nehledíme-li k imaginární periodě,

$$l(x + iy) = l\sqrt{x^2 + y^2} + i \operatorname{arctg} \frac{y}{x};$$

ze vzorce toho jde pak snadnou záměnou

$$\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{1}{2i} l \frac{x + iy}{x - iy};$$

je-li tedy

$$x = n(n+1)a^2 + b^2, \quad y = ab,$$

jest též

$$\operatorname{arctg} \frac{ab}{n(n+1)a^2 + b^2} = \frac{1}{2i} l \frac{n(n+1)a^2 + b^2 + iab}{n(n+1)a^2 + b^2 - iab},$$

a tudíž i

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{ab}{n(n+1)a^2 + b^2} = \frac{1}{2i} l \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)a^2 + b^2 + iab}{n(n+1)a^2 + b^2 - iab},$$

aneb dle svrchu dokázaného vzorce

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{a}{b} = \frac{1}{2i} l \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)a^2 + b^2 + iab}{n(n+1)a^2 + b^2 - iab},$$

takže pro $b = a$ se obdrží

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2i} l \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1) + (1+i)}{n(n+1) + (1-i)};$$

ježto však jest, jak známo,

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2i} li,$$

jest patrně

$$li = l \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1) + (1+i)}{n(n+1) + (1-i)},$$

aneb odvrátíme-li se od logaritmů,

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1) + (1+i)}{n(n+1) + (1-i)} = i, \quad \text{c. b. d.}$$