

Eugen Bunickij

Sur une formule du calcul intégral

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 72 (1947), No. 3, 129--130

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/121553>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1947

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Sur une formule du calcul intégral.

Eugen Bunickij, Praha.

(Reçu le 25. septembre 1946.)

1. Soit $\varphi(x)$ une fonction continue dans un intervalle ouvert (a, b) et soit α un nombre quelconque de cet intervalle. Alors la formule bien connue

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{\alpha}^x (x-t)^{n-1} \varphi(t) dt \quad (1)$$

(où $n > 0$ et où l'on pose, comme d'ordinaire, $0! = 1$) représente l'intégrale de l'équation différentielle

$$f^{(n)}(x) = \varphi(x) \quad (\text{pour } a < x < b) \quad (2)$$

satisfaisant aux conditions initiales $f(\alpha) = f'(\alpha) = \dots = f^{(n-1)}(\alpha) = 0$.

2. En modifiant un peu la formule (1), nous allons représenter l'intégrale de (2) comme une somme de produits de n intégrales simples indéfinies par certaines puissances de x . Pour ce but, développons $(x-t)^{n-1}$ suivant la formule du binôme; nous obtenons une série de termes contenant les produits

$$x^{n-1-\nu} \int_{\alpha}^x t^{\nu} \varphi(t) dt;$$

en remplaçant ici l'intégrale définie par l'intégrale indéfinie $\int x^{\nu} \varphi(x) dx$, on est conduit à considérer la fonction

$$F_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^{\nu} \binom{n-1}{\nu} x^{n-1-\nu} \int x^{\nu} \varphi(x) dx. \quad (3)$$

P. ex. $F_1(x) = \int \varphi(x) dx$, donc $F'_1(x) = \varphi(x)$. En général, on a pour $n > 1$

$$F'_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{\nu=0}^{n-2} (-1)^{\nu} \binom{n-1}{\nu} (n-1-\nu) x^{n-2-\nu} \int x^{\nu} \varphi(x) dx + \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} \varphi(x) \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^{\nu} \binom{n-1}{\nu}. \quad (4)$$

Mais la dernière somme est évidemment égale à $(1 - 1)^{n-1}$, c'est-à-dire à zéro; d'autre part, on a

$$\frac{1}{(n-1)!} \binom{n-1}{\nu} (n-1-\nu) = \frac{1}{(n-2)!} \binom{n-2}{\nu}.$$

La formule (4) donne donc

$$F'_n(x) = F_{n-1}(x) \quad (5)$$

pour $n > 1$. En utilisant l'équation $F'_1(x) = \varphi(x)$, on voit que $F_n^{(n)}(x) = \varphi(x)$, c'est-à-dire que $F_n(x)$ est une intégrale de l'équation (2). L'intégrale générale de cette équation est donc donnée par la fonction

$$F_n(x) + p_{n-1}(x),$$

où $p_{n-1}(x)$ est un polynome du degré $n - 1$ au plus.

*

O jednom vzorci integrálního počtu.

(Obsah předešlého článku.)

Funkce F_n ze vzorce (3) vyhovuje pro $n = 1$ rovnici $F'_1(x) = \varphi(x)$ a pro $n > 1$ rovnici (5). Tedy je $F_n(x)$ integrálem diferenciální rovnice (2). (Předpokládá se spojitost funkce φ v intervalu (a, b) .)