Karel Havlíček

Contact des courbes et des hypersphéres dans un espace euclidien a n dimensions

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 72 (1947), No. 3, 137--146

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121547

Contact des courbes et des hypersphères dans un espace euclidien à n dimensions. — Courbes sphériques.

Karel Havlíček, Praha.

L'Université Charles, séminaire de géometrie.

(Reçu le 15 mars 1947.)

1. Soit R_n un espace euclidien à n dimensions ($n \geqq 2$) aux coordonnées cartésiennes rectangulaires. En outre choisissons la notation et la terminologie de M. V. Hlavatý[4]). Alors un vecteur $\mathbf{v}$ aura n composantes $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Désignons par $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n$ le produit scalaire de deux vecteurs $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, et convenons d'appeler par *radius vecteur* $\mathbf{x}$ le vecteur aux extrémités $(0,0, \ldots, 0)$ et $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Soit $\mathbf{r}$ le radius vecteur d'une courbe réelle non isotrope de R_n, de sorte que d$s \neq 0$. On a donc

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s). \tag{1}$$

Nous supposons que $\mathbf{r}$ soit de classe $n + 1$ au moins. Nous considérerons seulement un tel intervalle de paramètre s, dans lequel il n'y a que des points généraux de notre courbe, c'est-à-dire, nous supposerons, que la matrice

$$\| r'_1, r'_2, \ldots, r'_n \|$$

soit du rang 1 pour toutes les valeurs de s (les accents désignent les dérivées par rapport à s).

Désignons par $\mathbf{t}$, ${}^1\mathbf{n}$, ${}^2\mathbf{n}$, $\ldots$, ${}^{n-1}\mathbf{n}$ les vecteurs unitaires dans les directions de la tangente, de la $1^{\text{ère}}$, $2^{\text{ième}}$, $\ldots$, $(n - 1)^{\text{ième}}$ normale de la courbe. Alors, le déterminant

$$\begin{vmatrix} t_1, & t_2, & \ldots, & t_n \\ {}^1n_1, & {}^1n_2, & \ldots, & {}^1n_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ {}^{n-1}n_1, & {}^{n-1}n_2, & \ldots, & {}^{n-1}n_n \end{vmatrix} \tag{2}$$

est orthogonal, c'est-à-dire

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = 1, \; {}^{\lambda}\mathbf{n} \cdot {}^{\lambda}\mathbf{n} = 1, \; \mathbf{t} \cdot {}^{\lambda}\mathbf{n} = 0, \; {}^{\lambda}\mathbf{n} \cdot {}^{\mu}\mathbf{n} = 0, \tag{3}$$
$$(\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, n - 1; \; \lambda \neq \mu).$$

Convenons d'appeler *hyperplan normal* au point de la courbe l'hyperplan des vecteurs ${}^{\lambda}\mathbf{n}$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, n - 1)$.

Soient $k_\lambda \neq 0$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, n - 1)$ les courbures scalaires de la courbe. On a donc les formules de Frenet bien connues

$$\begin{array}{rcrcl}
\mathbf{t}' & = & & & k_1\,{}^{1}\mathbf{n} \\
{}^{1}\mathbf{n}' & = & -k_1\ \mathbf{t} & + & k_2\,{}^{2}\mathbf{n} \\
{}^{2}\mathbf{n}' & = & -k_2\,{}^{1}\mathbf{n} & + & k_3\,{}^{3}\mathbf{n} \\
\multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\
{}^{n-2}\mathbf{n}' & = & -k_{n-2}\,{}^{n-3}\mathbf{n} & + & k_{n-1}\,{}^{n-1}\mathbf{n} \\
{}^{n-1}\mathbf{n}' & = & -k_{n-1}\,{}^{n-2}\mathbf{n} & &
\end{array} \tag{4}$$

Désignons par ϱ_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots, n - 1)$ les rayons des courbures, alors

$$\varrho_\lambda = \frac{1}{k_\lambda} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n - 1) \tag{5}$$

Une hypersphère plongée dans R_n est donnée par l'équation

$$(\mathbf{x} - \mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = r^2 \tag{6}$$

Dans cet article, nous allons considérer le contact de la courbe (1) avec l'hypersphère (6) et la condition nécessaire et suffisante pour que la courbe (1) soit située sur l'hypersphère (6), mais nous n'allons pas étudier le problème du contact de la courbe (1) avec les sphères à k dimensions $(k < n - 1)$. Les sphères osculatrices à k dimensions ont été étudiées par M. E. Egerváry[2]).

2. La puissance du point $\mathbf{r}$ par rapport à l'hypersphère (6) étant désignée par P, on a

$$P = (\mathbf{r} - \mathbf{p}) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{p}) - r^2. \tag{7}$$

Si $\mathbf{r}$ représente le point quelconque de la courbe (1), la puissance $P = P(s)$ est une fonction réelle du paramètre s.

Définition 1. *Quand les équations*

$$\lim_{s \to s_0} \frac{P(s)}{(s - s_0)^\alpha} = 0, \quad \alpha = 0, 1, 2, \ldots, q$$

sont satisfaites pour $\alpha = 0, 1, 2, \ldots, q$, nous disons que l'hypersphère (6) a le contact d'ordre q au moins avec la courbe (1) au point $s = s_0$. De plus nous disons que ce contact est précisément d'ordre q quand en même temps l'inégalité

$$\lim_{s \to s_0} \frac{P(s)}{(s - s_0)^{q+1}} \neq 0$$

est aussi satisfaite.

Théorème 1. *Pour que l'hypersphère* (6) *ait le contact d'ordre q au moins avec la courbe* (1) *au point* $s = s_0$, *il faut et il suffit que les équations*

$$P(s_0) = P'(s_0) = P''(s_0) = \ldots = P^{(q)}(s_0) = 0 \tag{8}$$

soient satisfaites; pour que ce contact soit précisément d'ordre q, il faut et il suffit qu'à côté des équations (8) *l'inégalité* $P^{(q+1)}(s_0) \neq 0$ *soit satisfaite.*

Nous pouvons démontrer facilement ce théorème en appliquant la formule de Taylor

$$P(s) = P(s_0) + \frac{s - s_0}{1!} P'(s_0) + \ldots + \frac{(s - s_0)^{q+1}}{(q + 1)!} P^{(q+1)}(s_0) + Z,$$

où Z désigne le reste.

Théorème 2. *La condition nécessaire et suffisante pour que l'hypersphère* (6) *ait le contact d'ordre* $q = 0$ *au moins avec la courbe* (1) *au point* $s = s_0$, *est: ce point est situé sur l'hypersphère* (6). *De plus, la condition nécessaire et suffisante pour que ce contact soit d'ordre* $q = 1$ *au moins, est: le centre de l'hypersphère* (6) *est situé dans l'hyperplan normal de la courbe au point* $s = s_0$. *Dans ce cas l'hypersphère* (6) *touche la courbe* (1) *au point donné.*

Démonstration. Le cas du contact d'ordre $q = 0$ est déjà compris dans le théorème 1. Étudions le cas $q = 1$. La dérivée de la fonction $P(s)$ est donnée par la formule

$$P'(s) = 2\mathfrak{r}'(s) \,.\, [\mathfrak{r}(s) - \mathfrak{p}]. \tag{9}$$

Si l'on pose $\mathfrak{r}_0 = \mathfrak{r}(s_0)$, $\mathfrak{t}_0 = \mathfrak{t}(s_0) = \mathfrak{r}'(s_0)$, la condition nécessaire et suffisante pour le contact d'ordre $q = 1$ est (voir (8) et (9)):

$$\mathfrak{t}_0 \,.\, (\mathfrak{r}_0 - \mathfrak{p}) = 0, \tag{9'}$$

c'est-à-dire: les vecteurs $\mathfrak{t}_0$ et $\mathfrak{r}_0 - \mathfrak{p}$ sont perpendiculaires entre eux. Cela étant, nous pouvons écrire

$$\mathfrak{r}_0 - \mathfrak{p} = \sum_{\lambda=1}^{n-1} c_\lambda \, {}^\lambda\mathfrak{n}_0, \quad ({}^\lambda\mathfrak{n}_0 = {}^\lambda\mathfrak{n}(s_0)) \tag{10}$$

où c_λ ($\lambda = 1, 2, \ldots, n - 1$) sont les paramètres arbitraires et indépendants entre eux. Le radius vecteur $\mathfrak{p}$ du centre de l' hypersphère est donné par la formule (10), alors

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{r}_0 - \sum_{\lambda=1}^{n-1} c_\lambda \, {}^\lambda\mathfrak{n}_0. \tag{10'}$$

Les équations (10), resp. (10') sont déjà les équations paramètriques de l'hyperplan normal de la courbe (1) au point $s = s_0$ avec les paramètres variables c_λ.

Considérons maintenant le contact d'ordre $q > 1$. Dans ces cas nous ne pouvons pas choisir le centre de l'hypersphère tout à fait arbitrairement dans l'hyperplan (10'), parce que les paramètres c_λ ne sont plus indépendants entre eux. — Le théorème suivant n' est qu'un théorème auxiliaire.

Théorème 3. *Les dérivées du vecteur unitaire* $\mathfrak{t}$ *de la courbe* (1) *par rapport à* s *sont déterminées par les formules*

$$\begin{aligned} \mathfrak{t}^{(q)} &= A_{q,0}\,\mathfrak{t} + \sum_{\lambda=1}^{q} A_{q,\lambda}\,{}^{\lambda}\mathfrak{n} \quad (q = 1, 2, \ldots, n-1) \\ \mathfrak{t}^{(n)} &= A_{n,0}\,\mathfrak{t} + \sum_{\lambda=1}^{n-1} A_{n,\lambda}\,{}^{\lambda}\mathfrak{n} \end{aligned} \tag{11}$$

où les expressions $A_{i,k}$ *sont données par les relations de récurrence au moyen des termes précédents*:

$$\begin{aligned} A_{1,0} &= 0, \qquad\qquad A_{1,1} = k_1 \\ A_{q,0} &= A'_{q-1,0} - k_1 A_{q-1,1} \\ A_{q,i} &= A'_{q-1,i} + k_i A_{q-1,i-1} - k_{i+1} A_{q-1,i+1} \\ A_{q,q-1} &= A'_{q-1,q-1} + k_{q-1} A_{q-1,q-2} \\ A_{q,q} &= k_q A_{q-1,q-1} = k_1 k_2 \ldots k_q \neq 0 \\ A_{n,0} &= A'_{n-1,0} - k_1 A_{n-1,1} \\ A_{n,j} &= A'_{n-1,j} + k_j A_{n-1,j-1} - k_{j+1} A_{n-1,j+1} \\ A_{n,n-1} &= A'_{n-1,n-1} + k_{n-1} A_{n-1,n-2} \\ &(i = 1, 2, \ldots, q-2) \quad (q = 2, 3, \ldots, n-1) \\ &(j = 1, 2, \ldots, n-2) \end{aligned} \tag{12}$$

La démonstration se fait par un calcul mécanique à l'aide des formules de Frenet. La première relation (11) pour $q = 1$ est la première formule (4) de Frenet. En dérivant l'équation

$$\mathfrak{t}^{(q-1)} = A_{q-1,0}\,\mathfrak{t} + A_{q-1,1}\,{}^{1}\mathfrak{n} + \ldots + A_{q-1,q-1}\,{}^{q-1}\mathfrak{n},$$

nous avons

$$\begin{aligned} \mathfrak{t}^{(q)} = {} & A'_{q-1,0}\,\mathfrak{t} + A'_{q-1,1}\,{}^{1}\mathfrak{n} + \ldots + A'_{q-1,q-1}\,{}^{q-1}\mathfrak{n} + \\ & + A_{q-1,0}\,\mathfrak{t}' + A_{q-1,1}\,{}^{1}\mathfrak{n}' + \ldots + A_{q-1,q-1}\,{}^{q-1}\mathfrak{n}'. \end{aligned}$$

En employant les formules (4) de Frenet, nous obtenons les équations (11) et (12). Parce que nous supposons $k_q \neq 0$, nous avons l'inégalité importante $A_{q,q} \neq 0$.

Dans les théorèmes suivants, nous considérons le contact d'ordre $q \geqq 2$.

Théorème 4. *Le contact de l'hypersphère* (6) *avec la courbe* (1) *au point* $s = s_0$ *soit d'ordre* q *au moins*, $2 \leqq q \leqq n$; *dans ce cas les paramètres* $c_1, c_2, \ldots, c_{q-1}$ (voir les formules (10), resp. (10')) *sont déterminés d'une manière univoque, tandis que les paramètres* c_q, $c_{q+1}, \ldots, c_{n-1}$ *sont arbitraires.*

Démonstration. Supposons tout d'abord $q = 2$. Nous avons

$$P''(s) = 2\,[\mathbf{r}'' \,.\, (\mathbf{r} - \mathbf{p}) + 1]$$

En écrivant $\mathbf{r}'' = \mathbf{t}'$, nous obtenons à l'aide des équations (8), (10), (11) et (12) la condition suivante pour le contact d'ordre $q = 2$:

$$1 + (k_1)_0\, {}^1\mathbf{n}_0 \,.\, \sum_{\lambda=1}^{n-1} c_\lambda\, {}^\lambda\mathbf{n}_0 = 0.$$

(Le symbole $(\ldots)_0$ désigne la valeur de la fonction considérée au point $s = s_0$.) — Au moyen des formules (3) nous pouvons tirer de cette équation la relation pour le paramètre c_1:

$$c_1 = -(\varrho_1)_0 = -\left(\frac{1}{k_1}\right)_0.$$

Alors, c'est le cas $q = 2$. — Supposons maintenant, que notre théorème soit vrai pour le contact d'ordre $q - 1$, c'est-à-dire que les paramètres $c_1, c_2, \ldots, c_{q-2}$ soient déjà fixés. Pour obtenir le paramètre c_{q-1}, il est utile de calculer la dérivée $P^{(q)}(s)$ au moyen de la formule (9):

$$P^{(q)}(s) = 2\,[\mathbf{r}^{(q)} \,.\, (\mathbf{r} - \mathbf{p}) + S],$$

où l'expression S est donnée par la formule

$$S = \binom{q-1}{1} \mathbf{r}^{(q-1)} \,.\, \mathbf{r}' + \binom{q-1}{2} \mathbf{r}^{(q-2)} \,.\, \mathbf{r}'' + \ldots +$$
$$+ \binom{q-1}{k} \mathbf{r}^{(q-k)} \,.\, \mathbf{r}^{(k)} + \ldots + \mathbf{r}' \,.\, \mathbf{r}^{(q-1)}.$$

En écrivant $\mathbf{r}^{(q)} = \mathbf{t}^{(q-1)}$, nous obtenons à l'aide des équations (3), (8), (10), (11), (12) la condition

$$(A_{q-1,1})_0 c_1 + \ldots + (A_{q-1,q-2})_0 c_{q-2} + (A_{q-1,q-1})_0 c_{q-1} + (S)_0 = 0. \quad (13)$$

Cette équation définit le paramètre c_{q-1}, parce que les expressions $(A_{i,k})_0$ et $(S)_0$ ne sont pas des fonctions des c_λ, et parce qu'il y a $A_{q-1,q-1} \neq 0$ (voir le théorème 3.). Enfin, pour les paramètres $c_q, c_{q+1}, \ldots, c_{n-1}$, l'équation (13) ne présente aucune condition nouvelle. Le théorème 4. est ainsi démontré.

On peut formuler le théorème que nous venons de démontrer d'une autre manière.

Corollaire. *Le lieu des centres de toutes les hypersphères, qui ont le contact d'ordre q au moins ($1 \leq q \leq n$) avec une courbe au point $s = s_0$, est un espace euclidien R_{n-q} à $n - q$ dimensions, dit l'espace polaire d'ordre q du point $s = s_0$ de la courbe. Dans le cas $n \neq q$, cet espace R_{n-q} est parallèle aux normales ${}^\lambda\mathbf{n}_0$ ($\lambda = q, q + 1, \ldots, n - 1$).*

En effet, le centre de l'hypersphère qui a le contact d'ordre q au moins avec la courbe, est donné par les équations (10), resp. (10'). Le théorème 4. nous dit que dans ces équations il n'y a que les paramètres $c_q, c_{q+1}, \ldots, c_{n-1}$, qui sont arbitraires; alors, ces équations définissent un espace euclidien à $n - q$ dimensions. Le cas $q = 1$ était déjà considéré dans le théorème 2., parce que le premier espace polaire (c'est-à-dire l'espace polaire d'ordre $q = 1$) n' est que l'hyperplan normal de notre courbe. L'espace polaire d'ordre $q = n$ est seulement un point, c'est-à-dire le centre de l'hypersphère qui a le contact d'ordre $q = n$ au moins avec notre courbe.

Définition 2. *Nous disons qu'une hypersphère est osculatrice au point de la courbe, si elle a le contact d'ordre $q = n$ au moins avec la courbe au point considéré.*

Théorème 5. *Désignons par R la longuer du rayon de l'hypersphère osculatrice au point $s = s_0$ de la courbe* (1); *cette longueur est donnée par la relation*

$$R^2 = \sum_{\lambda=1}^{n-1} c_\lambda^2, \tag{14}$$

les coefficients c_λ étant donnés par le théorème 4.

Ce résultat est une conséquence des équations (3) et (10), parce que

$$R^2 = (\mathfrak{r}_0 - \mathfrak{p}) \cdot (\mathfrak{r}_0 - \mathfrak{p}) = \left(\sum_{\lambda=1}^{n-1} c_\lambda \, {}^\lambda\mathfrak{n}_0\right) \cdot \left(\sum_{\mu=1}^{n-1} c_\mu \, {}^\mu\mathfrak{n}_0\right).$$

Si l'on calcule les coefficients c_λ dans les cas $n = 2, 3, 4, 5$, on a:

$$\begin{array}{lll}
n \geqq 2, & q = 2, & c_1 = - \varrho_1 \\
n \geqq 3, & q = 3, & c_2 = - \varrho'_1 \varrho_2 \\
n \geqq 4, & q = 4, & c_3 = - [(\varrho'_1 \varrho_2)' + \varrho_1 k_2] \, \varrho_3 \\
n \geqq 5, & q = 5, & c_4 = - \{([(\varrho'_1 \varrho_2)' + \varrho_1 k_2] \, \varrho_3)' + \varrho'_1 \varrho_2 k_3\} \, \varrho_4
\end{array}$$

(bien entendu, les valeurs des fonctions $k_\lambda = \dfrac{1}{\varrho_\lambda}$ sont prises au point $s = s_0$).

Les longueurs des rayons des hypersphères osculatrices sont données par les relations qui sont d'accord avec les résultats de M. E. Egerváry[2]):

$$\begin{array}{ll}
n = 2, & R^2 = \varrho_1^2 \\
n = 3, & R^2 = \varrho_1^2 + (\varrho'_1 \varrho_2)^2 \\
n = 4, & R^2 = \varrho_1^2 + (\varrho'_1 \varrho_2)^2 + [(\varrho'_1 \varrho_2)' + \varrho_1 k_2]^2 \, \varrho_3^2 \\
n = 5, & R^2 = \varrho_1^2 + (\varrho'_1 \varrho_2)^2 + [(\varrho'_1 \varrho_2)' + \varrho_1 k_2]^2 \, \varrho_3^2 + \\
 & \qquad + \{([(\varrho'_1 \varrho_2)' + \varrho_1 k_2] \, \varrho_3)' + \varrho'_1 \varrho_2 k_3\}^2 \, \varrho_4^2.
\end{array}$$

Les cas $n \leqq 3$ se trouvent presque dans tous les cours de la géometrie différentielle. Le cas $n = 4$ est considéré plus profondément par

M. O. Borůvka[1]), qui étudie la courbe spécialle avec les courbures scalaires constantes, alors $k_\lambda = \text{const} \neq 0$.

3. Considérons encore les courbes *sphériques* qui sont déterminées par la définition suivante:

Définition 3. *Une courbe sur une hypersphère s'appele courbe sphérique.*

Théorème 6. *Une courbe sphérique et l'hypersphère, où cette courbe est située, ont le contact d'ordre infini en tous les points de la courbe.*

La démonstration est évidente, car l'équation $P(s) = 0$ est satisfaite pour toutes les valeurs du paramètre s (voir la définition 1).

Cherchons les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une courbe soit sphérique.

Théorème 7. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une courbe soit sphérique, est: tous les hyperplans normaux de cette courbe ont un point fixe en commun au moins; ce point est le centre de l'hypersphère, sur laquelle notre courbe est située.*

Supposons d'abord que notre courbe C soit sphérique; cette courbe est donc située sur une hypersphère qui a le contact d'ordre $q = 1$ au moins le long de C (voir théorème 6.). Il en résulte que le centre de cette hypersphère est situé dans tous les hyperplans normaux de notre courbe C (voir le théorème 2.). Alors, la condition du théorème 7. est nécessaire.

Supposons au contraire que cette condition est satisfaite:

Il existe un point fixe $\mathbf{p}$ qui satisfait à l'équation

$$[\mathbf{p} - \mathbf{r}(s)] \, . \, \mathbf{t}(s) = 0. \tag{15}$$

Soit $K(s) = [\mathbf{r}(s) - \mathbf{p}] \, . \, [\mathbf{r}(s) - \mathbf{p}]$ la fonction du paramètre s dont la dérivée est donnée par la formule

$$K'(s) = 2 \, [\mathbf{r}(s) - \mathbf{p}] \, . \, \mathbf{r}'(s).$$

Si l'on écrit $\mathbf{r}' = \mathbf{t}$, on a à l'aide de la formule (15) $K'(s) = 0$, d'où $K(s) = \text{const}$. C'est déjà l'équation de l'hypersphère cherchée.

Théorème 8. *Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n$ les fonctions du paramètre s, qui sont données par les relations de récurrence:*

$$\begin{aligned}
&a_0 = 0, \\
&a_1 = \varrho_1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_i = a'_{i-1} \, \varrho_i + a_{i-2} \, k_{i-1} \, \varrho_i \quad (i = 2, 3, \ldots, n - 1) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_n = - a'_{n-1} \, \varrho_{n-1}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Pour qu'une courbe soit sphérique, il faut et il suffit que l'équation différentielle

$$a_n - a_{n-2} = 0 \tag{17}$$

soit satisfaite pour tous les points de la courbe.

Nous pouvons démontrer ce théorème à l'aide des équations linéaires suivantes:

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{t} &= 0 \\ (\mathbf{x} - \mathbf{r}) \cdot {}^{\lambda}\mathbf{n} &= a_\lambda \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, n-1) \end{aligned} \tag{18}$$

où $\mathbf{x}$ est le radius vecteur du point quelconque de l'hyperplan considéré et $\mathbf{r}$, $\mathbf{t}$, ${}^{\lambda}\mathbf{n}$ sont les vecteurs dépendants de s.

Supposons d'abord que notre courbe soit sphérique. Alors, il existe un point fixe $\mathbf{p}$ (voir le théorème 7.) qui satisfait à la condition (15), c'est-à-dire à la première équation du systéme (18). Si l'on calcule la dérivée de (15), on a (à l'aide de formules de Frenet)

$$(\mathbf{p} - \mathbf{r}) \cdot {}^{1}\mathbf{n} = a_1;$$

le point $\mathbf{p}$ satisfait aussi à la deuxième équation du système (18). Nous pouvons ainsi déduire que ce point $\mathbf{p}$ satisfait à toutes les équations du système (18). La dernière de ces équations est

$$(\mathbf{p} - \mathbf{r}) \cdot {}^{n-1}\mathbf{n} = a_{n-1}.$$

En prenant la dérivée de cette équation, il viendra (à l'aide des formules de Frenet)

$$(\mathbf{p} - \mathbf{r}) \cdot {}^{n-2}\mathbf{n} = a_n.$$

Alors, le point $\mathbf{p}$ vérifie la relation

$$(\mathbf{x} - \mathbf{r}) \cdot {}^{n-2}\mathbf{n} = a_n. \tag{19}$$

Il en résulte que la solution du système (18) satisfait aussi à l'équation (19), d'où $a_n = a_{n-2}$. Donc, la condition (17) est nécessaire.

Supposons au contraire que cette condition (17) est satisfaite. Il en résulte que la solution du systéme (18) satisfait aussi à l'équation (19): en effet, le déterminant du systéme (18), c'est-à-dire le déterminant (2), est différent de zéro, alors les équations (18) admettent une solution $\mathbf{x} = \mathbf{p}(s)$, et parce que la condition (17) est satisfaite, cette solution vérifie aussi l'équation (19). Alors, nous pouvons écrire $\mathbf{x} = \mathbf{p}(s)$. Si l'on calcule la dérivée de la prémière équation (18), on a

$$\mathbf{p}' \cdot \mathbf{t} + (\mathbf{p} - \mathbf{r}) \cdot (k_1 \, {}^{1}\mathbf{n}) = 1.$$

Il en résulte (à l'aide de la deuxième des équations (18) et de $k_\lambda \neq 0$) qu'il y a

$$\mathbf{p}' \cdot \mathbf{t} = 0. \tag{20}$$

Si l'on applique cette méthode à toutes les équations (18), on a à l'aide de l'équation (19) les conditions suivantes:

$$\mathbf{p}' \cdot {}^{\lambda}\mathbf{n} = 0, \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{21}$$

Les conditions (20) et (21) ne sont que le système des équations linéaires et homogènes pour les composantes inconnues du vecteur

$\mathfrak{p}'$. Mais le déterminant (2) de ce système est différent de zéro; il en résulte qu'il y a

$$p'_1 = p'_2 = \ldots = p'_n = 0,$$

d'où $\mathfrak{p}(s) =$ const. Ce point fixe $\mathfrak{p}$ est indépendant du paramètre s et il satisfait à la condition (15) pour toutes les valeurs du paramètre s. Il en résulte que la condition du théorème 7 est satisfaite; notre courbe est sphérique.

Si l'on calcule la condition (17) dans les cas $n = 2, 3, 4, 5$, on a:

$$\begin{aligned}
n &= 2, \quad \varrho'_1 = 0,\\
n &= 3, \quad (\varrho'_1\varrho_2)'\varrho_2 + \varrho_1 = 0,\\
n &= 4, \quad [(\varrho'_1\varrho_2)'\varrho_3]'\varrho_3 + (\varrho_1k_2\varrho_3)'\varrho_3 + \varrho'_1\varrho_2 = 0,\\
n &= 5, \quad \{[(\varrho'_1\varrho_2)'\varrho_3]'\varrho_4\}'\varrho_4 + [(\varrho_1k_2\varrho_3)'\varrho_4 + \varrho'_1\varrho_2k_3\varrho_4]'\varrho_4 +\\
&\qquad + [(\varrho'_1\varrho_2)' + \varrho_1k_2]\,\varrho_3 = 0.
\end{aligned}$$

Les cas $n \leqq 3$ sont bien connus. J'ai déduit le cas spécial $n = 5$ dans un autre travail,[3]) mais par une autre méthode.

Nous avons une application facile du théorème 8., dans le cas où les courbures scalaires sont constantes non nulles ($k_\lambda =$ const $\neq 0$, $\lambda = 1, 2, \ldots, n - 1$). Celles parmi ces courbes qui sont plongées dans un espace à un nombre pair de dimensions, s'appellent *hypercirconférences* (resp. *circonférences* pour $n = 2$); et, au contraire, celles qui sont plongées dans un espace à un nombre impair de dimensions, s'appelent *hyperhélices* (resp. *hélices* pour $n = 3$). Dans ces cas, il y a toujours $a_n = 0$ et de plus: si q est un nombre pair, il y a aussi $a_q = 0$; si q est un nombre impair, il y a $a_q \neq 0$ $(0 < q < n)$. À l'aide du théorème 8., nous pouvons dire:

Les hypercirconférences sont des courbes sphériques, et au contraire les hyperhélices ne sont pas des courbes sphériques. (Voir les travaux de M. O. Borůvka[1]) et de M. M. Sypták.[5]))

*

Bibliographie.

1. Borůvka O.: Sur les hypercirconférences et certaines surfaces paraboliques dans l'espace euclidien à quatre dimensions. — (Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk, No. **146**, Brno 1931.)
2. Egerváry E.: Az n-méretü euklidesi tér görbéinek simulógömbjeiröl. (Matem. és termeszett. Értes., Tome **59**, p. 775-784, le résumé allemand Ibid., p. 785-786, Budapest, 1940).
3. Havlíček K.: Klein's representation of ruled surfaces. — (Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Charles, No. **172**, p. 17-20, Praha 1939-46).
4. Hlavatý V.: Differentialgeometrie der Kurven und Flächen un Tensorrechnung, (Groningen-Batavia, 1939).
5. Sypták M.: Sur les hypercirconférences et hyperhélices dans les espaces euclidiens à p dimensions.— (Comptes Rendus, Acad. Sci., Tome **195**, p. 298-299, Paris 1932).

Styk křivky a nadkoule v n-rozměrném prostoru euklidovském. Křivky sférické.

(Obsah předešlého článku).

V n-rozměrném prostoru euklidovském předpokládejme křivku, která má v uvažovaném prostoru nenulové křivosti $k_\lambda \neq 0$, ($\lambda = 1, 2, \ldots, n - 1$). Geometrické místo středů všech nadkoulí, které mají s takovou křivkou v určitém bodě styk nejméně řádu q ($1 \leqq q \leqq n$), je jistý ($n - q$) — rozměrný euklidovský prostor, t. zv. q-tý *polární* prostor uvažovaného bodu křivky; tento polární prostor je rovnoběžný s prostorem, určeným posledními $n - q$ normálami křivky v uvažovaném bodě. V případě $q = n$ redukuje se tento polární prostor na bod a příslušná nadkoule se nazývá oskulační.

Křivka, jejíž všechny body leží na nějaké nadkouli, se nazývá sférická. Nutná a dostačující podmínka pro to, aby křivka byla sférická, je splnění diferenciální rovnice $a_n - a_{n-2} = 0$ v každém jejím bodě; funkce a_i ($i = 0, 1, 2, \ldots, n$) jsou dány rekurentními vztahy (16) jako funkce oblouku dané křivky, $\varrho_\lambda = \frac{1}{k_\lambda}$ ($\lambda = 1, 2, \ldots, n - 1$) jsou poloměry křivostí. Snadnou aplikaci této věty dostáváme pro případ, že křivosti křivky jsou konstantní, $k_\lambda = \text{const} \neq 0$, ($\lambda = 1, 2, \ldots, n - 1$). Vychází známý výsledek: je-li n číslo sudé, pak tato křivka — t. zv. *nadkružnice* — je sférická, a naopak, je-li n číslo liché, pak tato křivka — t. zv. *nadšroubovice* — není sférická.