Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Augustin Vondráček

Poznámka k teorii logaritmické spirály

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 59 (1930), No. 4, 242--244

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121546

Poznámka k teorii logaritmické spirály.

Dr. *Aug. Vondráček.*

Rovnici logaritmické spirály

$$r = be^{\frac{\varphi}{a}}. \tag{1}$$

lze dáti vzhledem k výrazu pro délku oblouku s od počátku O po φ:

$$s = \int_{-\infty}^{\varphi} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi = b \,.\, \sqrt{1 + a^2} \,.\, e^{\frac{\varphi}{a}} = \sqrt{1 + a^2} \,.\, r$$ Descartesův tvar

$$s = kr, \ldots \tag{2}$$

kde $k = \sqrt{1 + a^2} = \sec \mu$, μ značí konstantní úhel průvodičů s tečnami křivky.

Konstrukci jistých bodů křivky lze provésti tak, že zvolíme $\varphi = 0, \mu, 2\mu, 3\mu, \ldots, -\mu, -2\mu, \ldots$, načež podle (1) budou příslušné průvodiče $r_0 = b$, $r_1 = b \,.\, e^{\frac{\mu}{a}} = r_0 \,.\, \lambda$ $(\lambda = e^{\frac{\mu}{a}})$, $r_2 = r_0 \,.\, \lambda^2, \ldots$, $r_n = r_0 \lambda^n$, $r_{-1} = r_0 \,.\, \lambda^{-1}, \ldots$

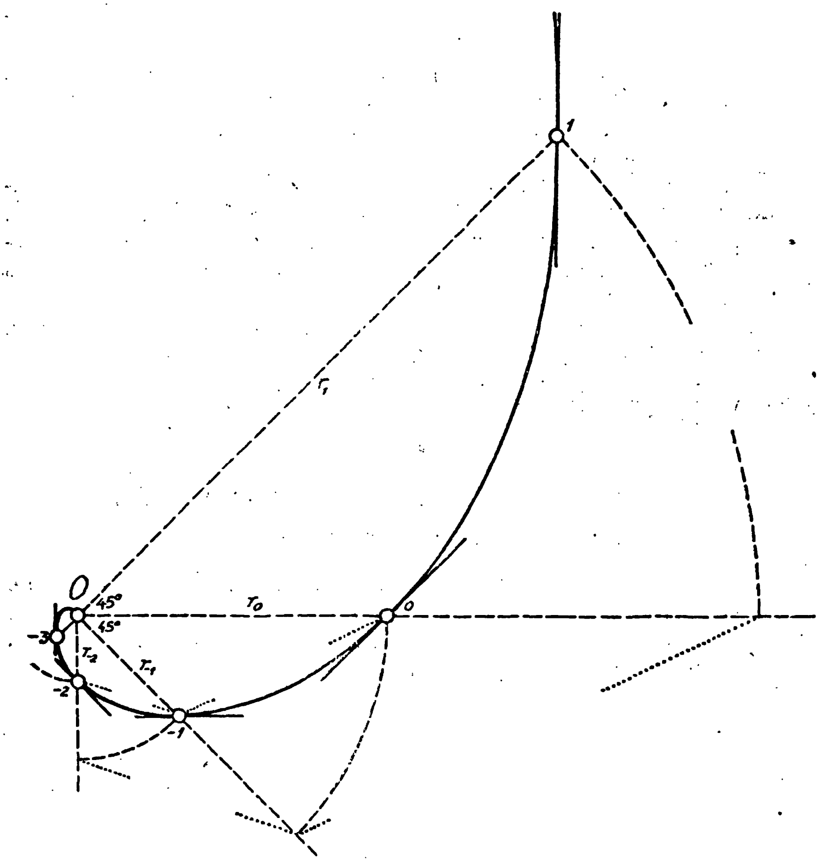
Je-li tedy $\overline{Oo} = r_0$ a dána (transcendentní) konstanta $\lambda = e^{\frac{\mu}{a}} > 1$, stačí přenést od $\overline{Oo}$ úhly μ v kladném i záporném smyslu (obr.),[1]) sestrojiti průvodič $r_1 = r_0 \lambda$, načež postupným sestrojováním trojúhelníků *O 1 2, O 2 3, . . . O — 1 0, O —2 —1*, . . ., podobných trojúhelníku *Oo1*, získáme body *0, 1, 2*, . . ., *— 1, — 2*, . . . křivky; tečny v těchto bodech svírají s průvodiči úhly μ, takže každá tečna je paralelní s průvodičem následujícím.

Je patrno, že uvedená konstrukce bodů *0, 1*, . . ., *— 1, — 1*, . . . je dosti přesnou, dány-li dva body spirály, jejichž úhel průvodičů je právě μ, a poměr přísl. λ, jinak má celá konstrukce ovšem povahu všech úloh s transcendentami.

---

[1]) Voleno $\mu = \frac{1}{4}\pi$, takže $\lambda = e^{\frac{1}{4}\pi} = 1 + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 \doteq \ldots + \doteq 2{\cdot}20.$

Příslušné délky oblouků od počátku O jsou podle (2): $s_0 = kr_0$, $s_1 = kr_1 = kr_0\lambda = s_0\lambda$, $s_2 = s_0\lambda^2$, ..., $s_{-1} = s_0\lambda^{-1}$, ..., takže $s_0/r_0 = s_1/r_1 = \ldots = k$; kdybychom tedy nanesli ony oblouky na příslušné průvodiče od O, dostali bychom novou log. spirálu homotetickou s původní pro střed podobnosti O, poměr $k = \sec \mu$.



Představme si nad logaritmickou spirálou válec s površkami k nákresně kolmými; površka asymptotická z (bodem O) buď osou rotační plochy, jejíž meridián (v rovině $\overline{Oo, z}$) má rovnici

$$r = f(z). \tag{3}$$

Obě plochy se protnou v jisté transcendentní prostorové křivce K. Rovina jdoucí bodem M (vzdáleným o r od z) kolmo k z protne válec v spirále se základní shodné, osu z v bodě Z, takže délka oblouku $ZM = s = kr$. Rozvineme-li spirálný válec do roviny, přejde proniková křivka K v křivku K', pro jejíž konstrukci patrně stačí vytknouti meridián (3) a sestrojiti K' jako křivku o rovnici

$$s = k \,.\, f(z), \tag{4}$$

t. j. křivku afinní s (3) podle osy z a poměru k.[2])

Je-li onen meridián přímkou $r = Az + B$, plocha tedy rotačním kuželem, dostaneme v komplanaci v soustavě (z, s) přímku $s = k\,(Az + B)$. Z toho vyplývá: Rotační kužel s osou v asymptotické površce logar. spirál. válce protne se s tímto válcem v šroubovici na válci, ježto površky válce a tečny svírají stále konst. úhel.

Pronikové křivce válce s koulí o meridiánu $r^2 + z^2 = R^2$ odpovídá v rozvinutí elipsa $s^2 + k^2z^2 = k^2R^2$ o poloosách kR, R. Na tomto případě ukazuje Krames na možnost mechanického vytvoření elipsy, při čemž by se vytvořila jen její polovice, ježto meridián je půlkružnicí.

Pro celou elipsu by bylo třeba užíti proniku válce s anuloidem o meridiánu $(r - m)^2 + z^2 = R^2$, jemuž po komplanaci přísluší elipsa $\dfrac{(s - mk)^2}{k^2R^2} + \dfrac{z^2}{R^2} = 1$ o poloosách kR, R.

*

Note sur la théorie de la spirale logarithmique.

(Extrait de l'article précédent.)

Construction des points de la courbe. Étude de la courbe d'intersection d'un cylindre droit ayant pour base une spirale logarithmique avec une surface de révolution ayant pour axe la droite asymptotique du cylindre.

---

[2]) Jos. L. Krames: „Ueber eine Vorrichtung zum Zeichnen von Ellipsen." Zeitschrift für angew. Mat. u. Mech. 1926.