Bohuslav Hostinský

O množství rovin, které protínají dvě nebo tři kulové plochy

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 55 (1926), No. 2, 153--159

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121526`

O množství rovin, které protínají dvě nebo tři kulové plochy.

Napsal *Bohuslav Hostinský*.

1. Budiž
$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - q = 0,$$
rovnice přímky v obyčejných pravoúhlých souřadnicích x, y. Přímka ta je jednoznačně určena veličinami q a φ. Integrál
$$\int\int dq\, d\varphi \tag{1}$$
vztažený k určitému množství ε přímek (q, φ) nazveme *měrou* tohoto množství. Je-li množství ε utvořeno všemi přímkami, které protínají[1]) danou uzavřenou konvexní křivku, rovná se jeho míra obvodu křivky (Cauchy).

Crofton a Czuber řešili zajímavé úlohy týkající se integrálů vztažených k přímkovým množstvím dvojrozměrným. Úvahy o množstvích rovin vedou k obdobným úlohám. Budiž
$$ux + vy + wz + 1 = 0,$$
rovnice roviny (u, v, w) v obyčejných pravoúhlých souřadnicích

Integrál
$$\int\int\int \frac{du\, dv\, dw}{(u^2 + v^2 + w^2)^2}, \tag{2}$$
vztažený k danému množství rovin (u, v, w) definuje jeho míru. Budeme jednati toliko o množstvích spojitých a trojrozměrných. Zaveďme na místo u, w, v nové souřadnice roviny ϑ, φ, p za předpokladu, že
$$0 \leqq \vartheta \leqq \pi,\ 0 \leqq \varphi < 2\pi,\ 0 \leqq p,$$
rovnicemi
$$-\frac{u}{p} = \sin\vartheta \cos\varphi,\ -\frac{v}{p} = \sin\vartheta \sin\varphi,\ -\frac{w}{p} = \cos\vartheta,$$
$$\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}} = p.$$

Integrál (2) přejde touto transformací ve tvar
$$\int\int\int \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, dp. \tag{2a}$$

---

[1]) Počítáme pouze s průseky reálními.

Minkowski ukázal, že integrál (2) nebo (2a) vztažený k množství všech rovin, které protínají danou uzavřenou konvexní plochu S, rovná se integrálu

$$\iint \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right) d\sigma, \tag{2b}$$

kde R a R' jsou hlavní poloměry křivosti plochy S a $d\sigma$ element jejího plošného obsahu; integrace vztahuje se k celé ploše S.

Jsou-li dány v rovině dvě uzavřené konvexní křivky vzájemně se vylučující, můžeme je obepnouti dvojím způsobem napiatou uzavřenou nití. V jednom případě je nit skřížena na způsob osmičky takže částečně probíhá podél křivých oblouků, částečně pak je tvořena úseky společných vnitřních tečen obou křivek; ve druhém případě je nit neskřížená, takže probíhá z části podél společných vnějších tečen. Budiž X délka prvé niti, Y pak délka druhé. Množství všech přímek (q, φ) protínajících obě dané křivky má míru (1) rovnou rozdílu $X-Y$ (Crofton).

Množství všech rovin protínajících dvě dané konvexní plochy, jež se vzájemně vylučují, má míru definovanou integrálem (2) nebo (2a); jeho hodnota bude bezpochyby v souvislosti s vlastnostmi rozvinutelné plochy, do které jsou obě plochy vepsány.

V této práci pojednáme o speciálních případech, ve kterých integrační obor integrálu (2) nebo (2a) jest utvořen rovinami protínajícími dvě nebo tři kulové plochy.

2. Budiž $M(S, S')$ hodnota integrálu (2), je-li integrační obor utvořen všemi rovinami (u, v, w), které protínají dvě vzájemně se vylučující kulové plochy S a S'. Ukažme nejprve, jak lze vypočísti $M(S, S')$ užitím Minkowského formule (2b).

Integrál (2b) vztažený k části kulového povrchu o poloměru r a plošném obsahu A rovná se výrazu

$$\iint \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r}\right) d\sigma = \frac{A}{r},$$

neboť $R = R' = r$ ve všech bodech kulové plochy.

Vypočtěme ještě hodnotu integrálu (2b) vztaženého k plášti rotačního kužele.[3]) Budiž 2φ úhel při vrcholu osového řezu, v

[2]) Různé úlohy o integrálech tvaru (1) a (2) jakož i citáty starších prací najde čtenář v mé práci *Sur les probabilités géométriques*. (Spisy vydávané přírodovědeckou fakultou Masarykovy university č. 50; Brno, 1925) a v knize *Geometrické pravděpodobnosti*, která je v tisku (vyjde nákladem Jednoty československých matematiků a fysiků).

[3]) Poněvadž poloha tečné roviny mění se nespojitě v okolí vrcholu kužele, a poněvadž funkce stojící za integračním znamením ve vzorci (2b) stává se ve vrcholu kužele nekonečně velikou, je nutno odděliti při integraci část kuželové plochy obsahující vrchol rovinou, kolmou k ose, od zbývajícího pláště. Konverguje-li vzdálenost roviny od vrcholu k nule, má integrál vzatý přes zbytek pláště určitou limitu; tu nazýváme „hodnotou integrálu vztaženou k plášti kužele“.

pak výška kužele. Dvě nekonečně blízké roviny vedené kolmo k ose kužele ve vzdálenostech x a $x+dx$ od vrcholu vytínají z pláště element o plošném obsahu

$$2\pi x \sin\varphi \, dx;$$

v každém bodě elementu jest

$$\frac{1}{R}=0, \quad R'=x\sin\varphi,$$

takže hledaný integrál jest

$$\int_0^v \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x\sin\varphi}\cdot 2\pi x\sin\varphi\, dx=\pi v.$$

Tato formule ukazuje, že hodnota integrálu (2b) vztaženého k plášti rotačního kužele nezávisí na úhlu φ. Jak snadno seznáme, platí formule pro každou část rotační kuželové plochy omezenou dvěma rovinami kolmými k rotační ose, je-li v jejich vzdálenost; můžeme ji aplikovati nejen na plášť kužele v užším slova smyslu, nýbrž i na plášť komolého kužele nebo dvojkužele.

Přistupme nyní k vlastní úloze. Budiž r poloměr koule S, r' poloměr koule S' a c středná. Předpokládáme, že

$$0<r'<r, \quad r+r'<c.$$

Veďme libovolnou rovinu obsahující středy obou koulí. Průsečné kružnice k a k' mají společnou vnitřní tečnu o délce t_i a vnější o délce t_e; tupý úhel sevřený oběma poloměry vedoucími k vnitřním (vnějším) bodům dotyku budiž $2\gamma_i$ $(2\gamma_e)$. Platí vztahy

$$t_i^2=c^2-(r+r')^2, \quad t_e^2=c^2-(r-r')^2$$
$$c\cos\gamma_i=r+r', \quad c\cos\gamma_e=r-r'.$$

Vnitřní tečny protínají se ve vnitřním středu podobnosti P; zde se kříží uzavřená napiatá nit položená kolem obou kružnic k a k'. Rotací této niti kolem středné vytvoří se dvě konvexní uzavřené plochy, jež nazveme K a K'. Plocha K sama skládá se ze dvou částí: z pláště rotačního kužele, který vznikne, když se otočí část vnitřní tečny omezená bodem P a bodem dotyku s kružnicí k, a z vrchlíku koule S o výšce $r(1+\cos\gamma_i)$. Plocha K' podobně skládá se z pláště rotačního kužele a z vrchlíku koule S' o výšce $r'(1+\cos\gamma_2)$.

Označme znaky $M(K)$ resp. $M(K')$ hodnoty integrálu (2b) pro plochu K resp. K'. Snadný výpočet vede k rovnici

$$M(K)+M(K')=\pi t_i\sin\gamma_i+2\pi(1+\cos\gamma_i)(r+r')=$$
$$=\pi\frac{(c+r+r')^2}{c}.$$

Neskřížená nit napiatá kolem kružnic k a k' vytvoří rotací kolem středné konvexní uzavřenou plochu L, která se skládá z pláště komolého kužele (vytvořeného vnější tečnou t_e) a ze dvou kulových vrchlíků o výškách $r\,(1+\cos\gamma_e)$ a $r'\,(1-\cos\gamma_e)$. Integrál (2b) utvořený pro plochu L má hodnotu

$$M(L) = \pi\, t_e \sin\gamma_e + 2\pi\,[r\,(1+\cos\gamma_e) + r'\,(1-\cos\gamma_e)]$$
$$= \pi \frac{(c+r+r')^2}{c} - 4\pi \frac{r\,r'}{c}.$$

Plochy K, K' a L jsou v takovém vztahu, že každá rovina jež protíná L, protíná aspoň jednu z ploch K a K'; protíná-li rovina K i K', protíná zároveň S i S'. Integrál M (L) vypočtěný podle vzorce (2) nebo (2a) obsahuje jednak elementy odpovídající rovinám, které protínají jen K nebo jen K', jednak elementy odpovídající rovinám, jež protínají S i S' zároveň. V součtu

$$M(K) + M(K'),$$

je každý element prvého druhu obsažen jen jednou, kdežto každý element druhého druhu dvakrát. Proto jest hodnota hledaného integrálu rovna

$$M(S, S') = M(K) + M(K') - M(L),$$

aneb, dosadíme-li na místo $M(K)$, $M(K')$ a M (L) výrazy shora odvozené,

$$M(S,S') = \frac{4\pi\, r\, r'}{c}. \tag{3}$$

3. Vzorec (3) dá se odvoditi též přímým výpočtem trojnásobného integrálu (2a), zavedeme-li na místo integrační proměnné ϑ vzdálenost p' roviny od středu druhé koule S'; předpokládáme, že koule S má střed v počátku souřadnic, takže pravoúhlé souřadnice středu koule S' jsou $(0, 0, c)$. Patrně jest

$$\cos\vartheta = \frac{p-p'}{c}, \quad \frac{D(p,\varphi,\vartheta)}{D(p,\varphi,p')} = \frac{d\vartheta}{dp'} = \frac{1}{c \cdot \sin\vartheta},$$

takže integrál (2a) transformuje se ve tvar[4])

$$\int\limits_{p'=-r'}^{r} \int\limits_{p=0}^{r} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1}{c}\, d\varphi\, dp\, dp' = 4\pi \frac{r\,r'}{c},$$

což souhlasí se vzorcem (3).

4. Množství rovin, jež protínají plochu L definovanou v odst. 2., lze rozděliti ve čtyři části. První obsahuje roviny, které protínají jen S, druhé roviny, které protínají jen S'; třetí roviny,

---

[4]) Vzdálenost p' čítáme kladně, jsou-li středy obou koulí po téže straně roviny (ϑ, φ, p), a záporně v případě opačném.

které protínají S i S' a čtvrté roviny, které neprotínají ani S ani S'. První, druhá a třetí část mají po řadě míry

$$4\pi r - \frac{4\pi r r'}{c}, \quad 4\pi r' - \frac{4\pi r r'}{c}, \quad \frac{4\pi r r'}{c};$$

značí-li N míru čtvrté části, dá součet všech čtyř

$$4\pi r + 4\pi r' - \frac{4\pi r r'}{c} + N = M(L).$$

Dosaďme za M (L) hodnotu vypočtěnou v odst. 2; po snadné úpravě vychází

$$N = \pi . \frac{(c - r - r')^2}{c} . \qquad (4)$$

Výsledky odvozené v odst. *2.* a *4.* shrneme větou: *Množství rovin, které protínají dvě koule o poloměrech r, r' o středné c, má míru vyjádřenou vzorcem (3); množství rovin, které oddělují jednu kouli od druhé, má míru vyjádřenou vzorcem (4).*

5. Položme si tuto úlohu: Jest ustanoviti hodnotu I integrálu (2) vztaženého k množství všech rovin, které protínají tři vzájemně se vylučující koule S, S' a S''.

Budeme předpokládati, že všechny společné tečné roviny těchto tří koulí jsou reální; celkem je takových rovin osm. Střed O koule S volme za počátek souřadnic, rovinu obsahující středy O, O', O'' koulí za rovinu Oxy, přímku OO' za osu Ox. Středy koulí budou tedy míti souřadnice

$$O(0, 0, 0) \quad O'(a, 0, 0) \quad O''(\alpha, \beta, 0); \quad a \gtreqless 0.$$

Zaveďme do počtu vzdálenosti ϱ, ϱ', ϱ'' roviny, která původně (viz odst. 1.) byla určena veličinami ϑ, φ a p, od bodů O, O', O''. Patrně jest

$$\begin{aligned} \varrho &= p \\ \varrho' &= p - a \sin\vartheta \cos\varphi \\ \varrho'' &= p - \alpha \sin\vartheta \cos\varphi - \beta \sin\vartheta \sin\varphi. \end{aligned}$$

Znaménko veličiny ϱ, určíme takto: Je-li souřadnice z-ová bodu, ve kterém se rovina dotýká koule opsané kolem O poloměrem ϱ, kladná, je ϱ kladné; je-li záporná, je záporné. Podobně se určí znaménka veličin ϱ' a ϱ'' užitím koulí opsaných kolem O' a O'' poloměry ϱ' resp. ϱ''. Tento předpoklad vede ovšem k důsledku, že p může nabýti hodnot kladných i záporných a že úhel ϑ není větší než úhel pravý; tím mění se poněkud obvyklá definice veličin p a ϑ, avšak obecný tvar integrálu (2a) zůstává beze změny.

Vztahy nahoře uvedené vedou ke vzorci

$$\frac{D(\varrho, \varrho', \varrho'')}{D(p, \vartheta, \varphi)} = \alpha\,|\beta|\sin\vartheta\cos\vartheta,$$

z něhož vyplývá, že

$$\sin\vartheta \, . \frac{D(p, \vartheta, \varphi)}{D(\varrho, \varrho', \varrho'')} = \frac{1}{\alpha\,|\beta|\cos\vartheta} \, .$$

Poněvadž pak

$$\cos^2\vartheta = 1 - \left(\frac{\varrho - \varrho'}{\alpha}\right)^2 - \frac{1}{\beta^2}\left[\varrho - \varrho'' - \frac{a}{\alpha}(\varrho - \varrho')\right]^2,$$

obdržíme zavedouce do integrálu (2a) nové integrační proměnné ϱ, ϱ', ϱ'':

$$I = \frac{1}{\alpha\,|\beta|}\int\limits_{-r''}^{r''}\int\limits_{-r'}^{r'}\int\limits_{-r}^{r} \frac{d\varrho\, d\varrho'\, d\varrho''}{\sqrt{1 - \left(\frac{\varrho - \varrho'}{\alpha}\right)^2 - \frac{1}{\beta^2}\left[\varrho - \varrho'' - \frac{a}{\alpha}(\varrho - \varrho')\right]^2}} \, . \tag{5}$$

Integrace dá se provésti elementárními funkcemi. Všimněme si blíže speciálního případu, kdy poloměry r, r' a r'' jsou nekonečně malé, kdežto strany trojúhelníka $O\,O'\,O''$ mají konečné délky. Součin $\alpha\,|\beta|$ rovná se pak dvojnásobné ploše P tohoto trojúhelníka. Pod odmocninou můžeme vynechati nekonečně malé členy obsahující ϱ, ϱ' a ϱ'' vedle jednotky, takže s vynecháním nekonečně malých veličin, které mají vzhledem k r, r' a r'' vyšší stupeň, obdržíme

$$I = \frac{4\, r\, r'\, r''}{P} \, .$$

Mají-li koule S, S' a S'' takovou vzájemnou polohu, že některé ze společných tečných rovin jsou imaginární, nelze vzorce (5) bezprostředně užíti k výpočtu hledaného integrálu. Tak na př. jsou-li všechny středy O, O' a O'' na téže přímce a je-li poloměr koule (na př. S''), která se nachází mezi oběma druhými, dosti veliký, jest množství všech rovin, které protínají tři koule, totožné s množstvím rovin, které protínají obě koule krajní S a S'. Míra tohoto množství je pak vyjádřena vzorcem (3) a nezávisí vůbec na poloměru r''.

6. Vzorce pro míry rovinových množství slouží k výpočtu různých geometrických pravděpodobností.

Budiž ε množství rovin vyhovujících určité podmínce, $M(\varepsilon)$ jeho míra definována integrálem (2) s integračním oborem ε, ε' pak část množství ε a $M(\varepsilon')$ její míra. Pravděpodobnost p, že rovina (u, v, w) náležející množství ε je zároveň obsažena v množství ε', definuje se vzorcem

$$p = \frac{M(\varepsilon')}{M(\varepsilon)} \, .$$

Budiž na př. ε' množství všech rovin, jež protínají dvě kulové plochy S a S' o poloměrech r, r' a o středné c) a ε množství všech rovin protínajících plochu S; míra $M(\varepsilon')$ jest dána vzorcem (3), a $M(\varepsilon) = 4\pi r$, takže

$$p = \frac{r'}{c}$$

je pravděpodobnost, že rovina, která protíná prvou kouli, protíná zároveň i druhou.

Jiný příklad: Jsou dány dvě kulové plochy S a S' (poloměry r, r', středná s), které se vzájemně vylučují a které obě jsou obsaženy uvnitř třetí koule Σ_0 poloměru R. Budiž ε množství všech rovin, které protínají kouli Σ, takže $M(\varepsilon) = 4\pi R$, a ε' množství všech rovin, které oddělují kouli S od S'; míra N množství ε je dána vzorcem (4). Pravděpodobnost p, že rovina, která protíná kouli Σ, odděluje zároveň kouli S od S', jest určena rovnicí

$$p = \frac{(c - r - r')^2}{4Rc}.$$

*

Sur les ensembles de plans qui coupent deux ou trois sphères.

(Extrait de l'article précédent.)

Un plan étant donné par l'équation

$$ux + vy + wz + 1 = 0$$

la valeur de l'intégrale (2) (voir le texte ci-dessus) relative à l'ensemble de plans qui coupent deux sphères données est égale à l'expression (3), où r et r' sont les rayons et c la distance des centres ($r + r' < c$).

Trois sphères étant données dont les centres sont O (0, 0, 0), O' (a, 0, 0), O'' (α, β, 0) et dont r, r' et r'' sont les rayons, la valeur de l'intégrale (2) étendue à l'ensemble de plans qui coupent les trois sphères est égale à l'expression (5); on suppose que $a > 0$ et que les huit plans tangents communs aux trois sphères sont réels.