Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Karel Dusl

O ortogonálních systémech rovnic v teorii funkcí theta

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 55 (1926), No. 2, 129--149

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121524

O ortogonálních systémech rovnic v teorii funkcí theta.

Napsal *Karel Dusl.*

1. Uvažujeme-li funkce theta polovičních charakteristik a p — proměnných, tu lze vždy nalézti $2p$ lineárně nezávislých čtverců těchto funkcí[1]) a každý další ($2p+1$ní) možno jimi lineárně vyjádřiti. Pro funkce theta při $p \gtreqless 2$, jichž charakteristiky náleží témuž základnímu, fundamentálnímu systému *(F. S.)* $2p+2$ charakteristik, lze již mezi méně nežli $2p+1$ čtverci psáti lineární homogenní relace.

Rovnice tyto lze pak pro $p=1$ a $p=2$ a jen pro tyto hodnoty p tak seskupiti, že tvoří systémy ortogonální a důsledek ortogonality těchto systémů jeví se pak v rovnici mezi čtyřmi ($p=1$) resp. šesti ($p=2$) čtvrtými mocnostmi funkcí theta, téhož *F. S.* s koeficienty ± 1.

O těchto ortogonálních systémech, resp. rovnicích mezi čtvrtými mocnostmi příslušných funkcí theta téhož *F. S.* míním pro případ $p=1$ a $p=2$ v tomto pojednání uvažovati.

2. Pro tři čtverce funkcí theta jedné proměnné zní zmíněné vztahy:[2])

$$\begin{aligned}
\vartheta_3^2\,\vartheta_0^2(x) &= \vartheta_2^2\,\vartheta_1^2(x) + \vartheta_0^2\,\vartheta_3^2(x)\\
\vartheta_3^2\,\vartheta_1^2(x) &= \vartheta_2^2\,\vartheta_0^2(x) - \vartheta_0^2\,\vartheta_2^2(x)\\
\vartheta_3^2\,\vartheta_2^2(x) &= \vartheta_2^2\,\vartheta_3^2(x) - \vartheta_0^2\,\vartheta_1^2(x)\\
\vartheta_3^2\,\vartheta_3^2(x) &= \vartheta_2^2\,\vartheta_2^2(x) + \vartheta_0^2\,\vartheta_0^2(x)
\end{aligned} \tag{I}$$

při čemž pro funkce theta nulových argumentů platí:

$$\vartheta_0^4 = \vartheta_3^4 - \vartheta_2^4. \tag{1}$$

Píšeme-li první dvě rovnice (I):

$$\begin{aligned}
\vartheta_0^2\,\vartheta_2^2(x) &= \vartheta_2^2\,\vartheta_0^2(x) - \vartheta_3^2\,\vartheta_1^2(x)\\
\vartheta_0^2\,\vartheta_3^2(x) &= \vartheta_3^2\,\vartheta_0^2(x) - \vartheta_2^2\,\vartheta_1^2(x)
\end{aligned} \tag{II}$$

[1]) Na př. takových, jichž charakteristiky tvoří Göpelův syzygetický nebo Rosenhaimův azygetický systém. Bakes: Abels Theorem 446/47. Krazer: Lehrbuch der Thetafunktionen 367. Viz odstavce 6, 13 a 20 tohoto pojednání.

[2]) Označení jako v mé knize „Základy nauky o thetafunkcích“ Praha 1919. Str. 304. — Rovnice hoření viz str. 256. — Jinak ve všech učebnicích elipt. funkcí. Srov. Whittaker-Watson. Modern Analysis 466.

tu na základě (1) a identity:

$$\vartheta_2^2\,\vartheta_3^2 - \vartheta_3^2\,\vartheta_2^2 = 0 \tag{2}$$

nahlédneme ihned, že rovnice (II) tvoří systém ortogonální v tom smyslu, že klademe-li:[3])

$$\begin{aligned} \vartheta_2^2(x) &= \mathfrak{C}\times\mathfrak{X}, & \vartheta_0^2(x) &= \mathfrak{A}\times\mathfrak{X}, \\ \vartheta_3^2(x) &= \mathfrak{D}\times\mathfrak{X}, & \vartheta_1^2(x) &= \mathfrak{B}\times\mathfrak{X}, \end{aligned} \tag{3}$$

kde na pravo jsou skalární součiny vektorů $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ a $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ s pomocným vektorem $\mathfrak{X}$, při čemž $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ a $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ možno voliti tak, že stojí k sobě kolmo. — Potom rovnice (II) znamenají stočení pravoúhlého systému $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ v systém $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, při čemž směrové kosiny jsou dány schematem:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{i\,\vartheta_2^2}{\vartheta_0^2}, & -\dfrac{\vartheta_3^2}{\vartheta_0^2} \\ \dfrac{\vartheta_3^2}{\vartheta_0^2}, & \dfrac{i\,\vartheta_2^2}{\vartheta_0^2} \end{vmatrix} \tag{4}$$

takže jest:

$$C^2 - D^2 = B^2 - A^2 \tag{5}$$

kde latinská písmena označují velikosti vektorů v (3). Vraťme-li se k funkcím theta zní tato rovnice (5):

$$\underline{\vartheta_2^4(x) - \vartheta_3^4(x) = \vartheta_1^4(x) - \vartheta_0^4(x).} \tag{III}$$

O správnosti se můžeme přesvědčiti direktně povýšíme-li obě rovnice (II) na druhou a odečteme majíce na zřeteli rovnici (1) a (2) mezi konstantami.

3. Odvodíme nejprve některé důsledky rovnice (III) v teorii funkcí eliptických. — Pišme tuto rovnici ve tvaru:

$$\vartheta_0^4(x) - \vartheta_1^4(x) + \vartheta_2^4(x) - \vartheta_3^4(x) = 0. \tag{III'}$$

Položíme-li sem $x = 0$ tu vychází nejprve opět rovnice (1) odst. 2. pro funkce theta nulových argumentů.

Souvislost této rovnice s eliptickými funkcemi Jacobiho obdržíme, píšeme-li rovnici (III) ve tvaru:

$$\left[\frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta_0(x)}\right]^4 - \left[\frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta_0(x)}\right]^4 = \left[\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta_0(x)}\right]^4 - 1. \tag{6}$$

Položíme-li sem místo podílů funkcí theta vyjádření funkcemi *snv*, *cnv* a *dnv*[4]) nalezneme po uspořádání:

---

[3]) Viz mou práci „O geometrickém významu některých lineárných relací v theorii funkcí theta" v Rozpravách 1925.

[4]) Dusl „Základy" 246.

$$dn^4 v + k'^2 k^2 sn^4 v - k^2 cn^4 v = k'^2 \tag{IV}$$

o jejíž správnosti se lze snadno přesvědčiti.

4. Souvislost s funkcemi Weierstrassovými. Použijme známých rovnic:[5])

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}}\, \sqrt[8]{\varDelta}\ \sigma(u) &= i e^{2\eta_1 \omega_1 v^2} \vartheta_1(v) \\
\sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}}\, \sqrt[4]{e_3 - e_2}\ \sigma_1(u) &= i e^{2\eta_1 \omega_1 v^2} \vartheta_2(v) \\
\sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}}\, \sqrt[4]{e_1 - e_3}\ \sigma_3(u) &= e^{2\eta_1 \omega_1 v^2} \vartheta_0(v) \\
\sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}}\, \sqrt[4]{e_1 - e_2}\ \sigma_3(u) &= e^{2\eta_1 \omega_1 v^2} \vartheta_3(v),
\end{aligned} \tag{7}$$

při čemž diskriminant:

$$\varDelta = (e_3 - e_2)^2 (e_1 - e_3)^2 (e_1 - e_2)^2. \tag{8}$$

Vložíme-li tyto hodnoty do rovnice (III) a zkrátíme, obdržíme souměrnou rovnici:

$$\underline{\sigma^4(u) \sqrt{\varDelta} = (e_3 - e_2)\ \sigma_1^4(u) + (e_1 - e_3)\ \sigma_2^4(u) + (e_2 - e_1)\ \sigma_3^4(u).} \tag{V}$$

Píšeme-li tuto rovnici (V)[6]) se zřetelem ku (8) ve tvaru

$$\begin{aligned}
1 = \frac{1}{(e_1 - e_3)(e_1 - e_2)} \frac{\sigma_1^4(u)}{\sigma^4(u)} + \frac{1}{(e_3 - e_2)(e_1 - e_2)} \frac{\sigma_2^4(u)}{\sigma^4(u)} + \\
+ \frac{1}{(e_2 - e_3)(e_1 - e_3)} \frac{\sigma_3^4(u)}{\sigma^4(u)}
\end{aligned} \tag{9}$$

a klademe-li sem:

$$p(u) - e_\alpha = \frac{\sigma_\alpha^2(u)}{\sigma^2(u)}\ ^{7)} \tag{10}$$

vychází identicky: $\alpha = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned}
&\underline{(p(u) - e_1)^2 (e_3 - e_2) + (p(u) - e_2)^2 (e_1 - e_3) +} \\
&\qquad \underline{+ (p(u) - e_3)^2 (e_2 - e_1) = \sqrt{\varDelta}}
\end{aligned} \tag{VI}$$

a derivováním této rovnice konečně opět identicky:

$$\begin{aligned}
&\underline{(p(u) - e_1)(e_3 - e_2) + (p(u) - e_2)(e_1 - e_3) +} \\
&\qquad \underline{+ (p(u) - e_3)(e_2 - e_1) = 0.}
\end{aligned} \tag{VII}$$

---

[5]) Na př. Tannery-Molk: „Éléments de la théorie des Fonctions elliptiques. T. II. 254.

[6]) Viz Encyklopedie der M. W. II. B. S. 282.

[7]) Tannery-Molk T. II. 237. Dusl Základy 278. a j.
„ „ T. III. 38. „ „ 280. a j.

5. Přibereme-li v úvahu diferenciální rovnici pro funkce p:

$$p'(u)^2 = 4\,(p(u) - e_1)\,(p(u) - e_2)\,(p(u) - e_3) \tag{11}$$

a poznamenáme rozdíly:

$$e_3 - e_2 = m, \qquad e_1 - e_3 = n, \qquad e_2 - e_1 = p \tag{12}$$

$$\begin{aligned} p(u) - e_1 &= \xi_1^2(u), & \xi_1^2(\omega_2) &= p \\ p(u) - e_2 &= \xi_2^2(u), & \xi_2^2(\omega_3) &= m \\ p(u) - e_3 &= \xi_3^2(u), & \xi_3^2(\omega_1) &= n \end{aligned} \tag{13}$$

budou u rovnice (VII) (VI) a (11) s tímto označením zníti:

$$\left.\begin{aligned} m\,\xi_1^2(u) + n\,\xi_2^2(u) + p\,\xi_3^2(u) &= 0 \\ m\,\xi_1^4(u) + n\,\xi_2^4(u) + p\,\xi_3^4(u) &= \sqrt{\Delta} \end{aligned}\right\} \tag{VIII}$$

$$p'(u)^2 = 4\,\xi_1^2(u)\,\xi_2^2(u)\,\xi_3^2(u).$$

Při tom, vzhledem k jednoznačnosti odmocnin $\sqrt{p(u) - e_\alpha}$ nejsou již první dvě rovnice (VIII) identitami.

Násobíme-li první z rovnic (VIII) pořadem funkcemi ξ_1, ξ_2, ξ_3 a sečteme se zřetelem ku rovnici druhé, tu obdržíme, jelikož dle (12)

$$m + n + p = 0 \tag{14}$$

rovnici:

$$p\,\xi_1^2(u)\,\xi_2^2(u) + n\,\xi_1^2(u)\xi_3^2(u) + m\,\xi_2^2(u)\,\xi_3^2(u) = \sqrt{\Delta}. \tag{IX}$$

Dělíme-li rovnici tuto poslední z rovnic (VIII), vychází:

$$\frac{p}{\xi_3^2(u)} + \frac{n}{\xi_2^2(u)} + \frac{m}{\xi_1^2(u)} = \frac{4\sqrt{\Delta}}{[p'(u)]^2} \tag{X}$$

Vzhledem ku (13) vychází integrováním této rovnice jednak:

$$4\sqrt{\Delta}\int\frac{du}{p'(u)} = m\,l\,\xi_1^2(u) + n\,l\,\xi_2^2(u) + p\,l\,\xi_3^2(u), \tag{15}$$

tedy

$$2\sqrt{\Delta}\int\frac{du}{p'(u)} = m\,l\,\xi_1(u) + n\,l\,\xi_2(u) + p\,l\,\xi_3(u), \tag{XI}$$

jednak

$$4\sqrt{\Delta}\int\frac{du}{[p'(u)]^2} = m\int\frac{du}{\xi_1^2(u)} + n\int\frac{du}{\xi_2^2(u)} + p\int\frac{du}{\xi_3^2(u)}, \tag{16}$$

protože však integrály na pravé straně rovnice (16) dávají:[8])

$$\int\frac{du}{\xi_\alpha^2(u)} = \int\frac{du}{p(u) - e_\alpha} = -\frac{\zeta(u - \omega_\alpha) + u e_\alpha}{(e_\alpha - e_\beta)\,(e_\alpha - e_\gamma)} \tag{17}$$

$$\alpha, (\beta, \gamma) = 1, 2, 3,$$

[8]) Tannery-Molk: Éléments. T. IV. 110. Form. LXII. $n = 1$.

bude rovnice (16) zníti:

$$4\sqrt{\Delta}\int\frac{du}{[p'(u)]^2}=\frac{m}{np}\Big[\zeta(u-\omega_1)+ue_1\Big]+ \\ +\frac{n}{mp}\Big[\zeta(u-\omega_2)+ue_2\Big]+\frac{p}{mn}\Big[\zeta(u-\omega_3)+ue_3\Big] \tag{18}$$

tedy vzhledem k (8) odst. 4.

$$4\Delta\int\frac{du}{[p'(u)]^2}=m^2\Big[\zeta(u-\omega_1)+ue_1\Big]+ \\ +n^2\Big[\zeta(u-\omega_2)+ue_2\Big]+p^2\Big[\zeta(u-\omega_3)+ue_3\Big]. \tag{XII}$$

Na základě integrálů (XI) a (XII) možno počítati integrály:

$$\int\frac{du}{[p'(u)]^n}$$

pro n celé a kladné.

Takto jsem ukázal jak pro funkce theta jedné proměnné lze rovnice (I) sestaviti v ortogonální systémy tvaru (II) a odvodil jsem tak rovnici (III) a poukázal k jejímu použití v nauce o funkcích eliptických. Analogické výsledky odvodíme pro funkce theta dvou proměnných.

6. Pro funkce theta dvou proměnných budu používati označení Forsythova[9]) t. j. deset sudých funkcí theta označím indexy:

$$\vartheta_0,\ \vartheta_1,\ \vartheta_2,\ \vartheta_3,\ \vartheta_4,\ \vartheta_6,\ \vartheta_8,\ \vartheta_9,\ \vartheta_{12},\ \vartheta_{15}$$

a šest lichých:

$$\vartheta_5,\ \vartheta_7,\ \vartheta_{10},\ \vartheta_{11},\ \vartheta_{13},\ \vartheta_{14};$$

označení proměnných: v_1 a v_2 vynechávám a sudé funkce theta nulových argumentů budu označovati písmeny c s týmiž indexy, tedy:

$$c_0,\ c_1\ c_2,\ c_3,\ c_4,\ c_6,\ c_8,\ c_9,\ c_{12},\ c_{15}.$$

Liché funkce theta vymizí ovšem pro nulové hodnoty proměnných.

V teorii funkcí theta dvou proměnných vysloviti se dá nejprve věta:

„Mezi čtverci *čtyř* funkcí theta, jichž charakteristiky náležejí některému *ze 16ti* „základních" systémů (t. j. po třech azygetických) charakteristik, po *šesti* vždy v každém systému[10]) existuje homogenní

---

[9]) Phil. Transactions 1832 p. 783—862: „Lectures to the theory of Functions of two complex variables". 1914, p. 247. — Srovnávací tabulka pro jiné označení. Baker: Abels Theorem 303. — Krazer: Lehrbuch der Thetafunktionen 343.

[10]) Krazer: Lehrbuch der Thetafunktionen 283. Encyklopädie der Mathem. Wissenschaften II. 746.

lineárná relace, jejíž koeficienty jsou čtverce dříve vytčených konstant t. j. sudých funkcí theta s nulovými argumenty.“ Takových relací bude tede celkem $\binom{6}{4} . 16 = 240$. Rovnice tyto uvádí Göpel, Rosenhain, Weber, Krazer, Krause, Forsyth a jiní.[11]) V knize M. Krauseho jest — vzhledem k tomu, že věta hoření pochází od Rosenhaina — oněch 16 systémů nazýváno systémy Rosenhainovými, což nesouhlasí s definicí azygetického systému Rosenhainova nyní užívanou.

7. Mezi každými čtyřmi čtvrtými mocnostmi a vždy mezi třemi součiny dvou čtverců sudých funkcí theta s nulovými argumenty (konstanty c) existují homogenní lineární relace, známé již Göpelovi a Rosenhainovi.[13]) Rovnice tyto, kterých v dalším upotřebím, znějí:

$$\left.\begin{aligned} c_0^4 - c_{12}^4 &= c_1^4 + c_6^4 = c_2^4 + c_9^4 \\ c_0^4 - c_3^4 &= c_6^4 + c_8^4 = c_4^4 + c_9^4 \\ c_0^4 - c_{15}^4 &= c_2^4 + c_8^4 = c_1^4 + c_4^4 \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

$$\left.\begin{aligned} c_0^2\, c_{12}^2 &= c_4^2\, c_8^2 + c_3^2\, c_{15}^2 \\ c_3^2\, c_{12}^2 &= c_6^2\, c_9^2 + c_0^2\, c_{15}^2 \\ c_0^2\, c_3^3 &= c_1^2\, c_2^2 + c_{12}^2\, c_{15}^2 \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

$$\left.\begin{aligned} c_0^2\, c_4^2 &= c_2^2\, c_6^2 + c_8^2\, c_{12}^2 \\ c_1^2\, c_4^2 &= c_3^2\, c_6^2 + c_9^2\, c_{12}^2 \\ c_0^2\, c_1^2 &= c_2^2\, c_3^2 + c_8^2\, c_9^2 \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

$$\left.\begin{aligned} c_0^2\, c_8^2 &= c_1^2\, c_9^2 + c_4^2\, c_{12}^2 \\ c_2^2\, c_8^2 &= c_3^2\, c_9^2 + c_6^2\, c_{12}^2 \\ c_0^2\, c_2^2 &= c_1^2\, c_3^2 + c_4^2\, c_6^2 \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

---

[11]) A. Göpel: „Entwurf einer Theorie der Abelschen Transcendenten erster Ordnung. Crellův journ. 30. 1847. Ostwald 67. — G. Rosenhein: „Abhandlung über die Funktionen zweier Variabler mit vier Perioden“. Mém. des savauts. Ostwald’s Klass. 65. 1851. — H. Weber: Math. ann. 14. 1879. Str. 173. — A. Krazer: Theorie der zweifach unendlichen Thetareihen. Lipsko r. 1882. — Forsyth: Philos. Transactions. 1882. — M. Krause: Die Transformation der hyperelliptischen Funktionen erster Ordnung. Lipsko 1886.

[12]) V pojednáních již vytčených. Jiná pojednání a díla vztahující se k témuž předmětu: A. Cayley: On the 16-nodal quartic surface. Crellův j. 84. 1878. Str. 238. — H. Weber: Über die Kummersche Fläche et. c. ibidem. 332. — F. Caspary: Zur Theorie der Thetafunktionen mit zwei Argumenten. Crellův journ. 94. 1883. 74. — F. Brioschi: Sulla teorica delle funzioni iperellittiche di primo ordine. Annali di matematica XIV. 1887. 241.

Další částečně použité spisy o funkcích theta dvou proměnných:

H. Baker: Abels Theorem. 1897. Str. 303, 524 a j. — H. Baker: Multiply Periodic Functions. 1907. 41.—54. 32'. — R. Hudson: Kummers Quartic Surface. 1905. 173. 180. — Krazer-Wirtinger: Abelsche Funktionen und allgemeine Thetafunktionen. Encyklopädie der math. Wissenschaft. II. B. 7. Str. 743. Tam uveden též přehled literatury.

$$\left.\begin{aligned} c_2^2\, c_4^2 &= c_0^2\, c_6^2 + c_9^2\, c_{15}^2 \\ c_2^2\, c_{12}^2 &= c_6^2\, c_8^2 + c_1^2\, c_{15}^2 \\ c_3^2\, c_4^2 &= c_1^2\, c_6^2 + c_8^2\, c_{15}^2 \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

$$\left.\begin{aligned} c_1^2\, c_8^2 &= c_0^2\, c_9^2 + c_6^2\, c_{15}^2 \\ c_3^2\, c_8^2 &= c_2^2\, c_9^2 + c_4^2\, c_{15}^2 \\ c_1^2\, c_{12}^2 &= c_4^2\, c_9^2 + c_2^2\, c_{15}^2 \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

8. Vezměme nyní v úvahu oněch 240 rovnic mezi čtverci čtyř funkcí theta, jichž charakteristiky náležejí některému základnímu (fundamentálnímu *F. S.* dle Krazera) systému, jak jsem se o nich zmínil v odst. 6. Rovnice tyto lze takto roztříditi:

Každý ze 16ti *F. S.* charakteristik skládá se ze šesti charakteristik, jeden systém ze šesti lichých (ozn. v odst. 6.) ostatních 15 systémů ze dvou lichých a čtyř sudých charakteristik (Krazer: Lehrb. der Thetafunktionen 337, Baker: Abels Theorem 500).

Budou se tedy vyskytovati rovnice těchto čtvera druhů:

1. Rovnice obsahující jen čtyři čtverce lichých funkcí. Bude jich $\binom{6}{4} = 15$.

2. Rovnice obsahující jednu lichou a tři sudé funkce, počtem $15 \,.\, 2 \,.\, \binom{4}{3} = 120$.

3. Rovnice obsahující dvě liché a dvě sudé funkce, jichž se vyskytne $15 \,.\, \binom{4}{2} = 90$.

4. Rovnice obsahující jen čtyři sudé funkce, těch bude 15 (jedna z každého systému). Celkem 240 rovnic.

Ke každé z těchto rovnic lze za pomoci rovnic mezi konstantami (19) — (24) před. odstavce připsati ještě dvě rovnice, náležející rovněž k oněm 240 tak, že tři rovnice mají na pravo tytéž čtverce funkcí theta a tvoří systém ortogonální, při čemž ovšem všechny tři rovnice nespadají obecně do téže kategorie 1.—4. nahoře uvedených. Z každé z 240 rovnic lze napsati $\binom{4}{3} = 4$ rovnice, z nichž každá může tvořiti základ k ortogonálnímu systému. Bude tedy 240×4 systémů po třech rovnicích, jelikož však kteroukoliv ze tří rovnic téhož systému lze bráti za první (základní) a tytéž dvě další z ní na základě (19) — (24) a zvětšení argumentů o polovici period odvoditi bude v celku $\frac{240 \times 4}{3} = 320$ o r t o g o n á l n í c h s y s t é m ů p o t ř e c h r o v n i c í c h.

Systémy tyto lze takto roztříditi:

1. Systémy, ve kterých budou všechny čtverce lichých funkcí theta, t. j. všech šest po obou stranách rovnic. Takových systémů bude:

$$\frac{15\,.\,4}{3}=20=\binom{6}{3}.$$

2. Není možný žádný ortogonální systém, aby se v něm současně vyskytly čtverce tří lichých funkcí, kromě oněch, které patří do třídy předešlé (vesměs liché čtverce). Kdyby takový systém existoval, bylo by možno z něho odvoditi lineárnou homogenní rovnici mezi čtverci čtyř funkcí theta, z nichž tři by byly liché a to odporuje složení *F. S.* charakteristik funkcí theta. Musí tudíž každý systém obsahovati alespoň čtyři sudé čtverce.

3. Protože však homogenní lineární relace mezi čtverci čtyř sudých funkcí theta (třída 4.) mají tvar:

$$c_\alpha^2\,\vartheta_\alpha^2=c_\beta^2\,\vartheta_\beta^2+c_\gamma^2\,\vartheta_\gamma^2+c_\delta^2\,\vartheta_\delta^2 \tag{25}$$

je patrno, že v žádném ortogonálném systému nemohou se vyskytnouti dva řádky složené z rovnic této kategorie a tedy žádný systém nebude míti více sudých čtverců, než-li čtyři, t. j. vzhledem ku předešlému bude každý systém takový, že buďto:

a) bude obsahovati samé liché čtverce, nebo

b) bude obsahovati čtyři různé sudé čtverce jakkoli položené.

Jsou tudíž možny čtyři typy těchto systémů a to symbolicky ($l=$ čtverce funkcí lichých, $s=$ čtverce sudé) naznačeno:

l_4	$l_1,\ l_2,\ l_3$	l_1	$s_1,\ s_2,\ s_3$	s_3	$l_1,\ s_1,\ s_2$	s_2	$s_1,\ l_1,\ l_2,$
l_5	$l_1,\ l_2,\ l_3$	l_2	$s_1,\ s_2,\ s_3$	s_4	$l_1,\ s_1,\ s_2$	s_3	$s_1,\ l_1,\ l_2,$
l_6	$l_1,\ l_2,\ l_3$	s_4	$s_1,\ s_2,\ s_3$	l_2	$l_1,\ s_1,\ s_2$	s_4	$s_1,\ l_1,\ l_2,$
I.		II.		III.		IV.	

Typ IV. vznikne řešením systému typu (II) podle $s_1,\ s_2,\ s_3$. Typy I. a III. poskytují transponováním rovnice týchž typů.

Co se týče počtu systémů, tu z každé rovnice třídy (1) odvodíme $\binom{4}{3}$ systémy, celkem 60 systémů, z nichž 20 různých.

Ze 120 rovnic třídy (2) odvodí se 160 různých systémů, z 90 rovnic třídy (3) obdržíme 120 systémů a z 15 rovnic třídy (4) konečně 20 systémů; celkem 320 systémů. Podle předešlých typů bude systémů různých:

I. typu 20

II. „ $15\times\binom{4}{3}$ 60

III. „ $15 \times \binom{4}{2} \times 2$ 180

IV. typu $\frac{15 \times 4 \times 3}{3}$ 60

tedy opět 320 různých systémů, čímž jest opět dokázáno, že jiných typů není.

9. Podám nyní příklady jednotlivých typů ortogonálních systémů a důsledky z nich plynoucí:

I. typ.

$$\begin{aligned} c_0^2\, \vartheta_7^2 &= -c_2^2\, \vartheta_5^2 + c_{12}^2\, \vartheta_{11}^2 - c_9^2\, \vartheta_{14}^2 \\ c_0^2\, \vartheta_{10}^2 &= c_8^2\, \vartheta_5^2 - c_6^2\, \vartheta_{11}^2 - c_3^2\, \vartheta_{14}^2 \\ c_0^2\, \vartheta_{13}^2 &= c_{15}^2\, \vartheta_5^2 - c_1^2\, \vartheta_{11}^2 - c_4^2\, \vartheta_{14}^2 \end{aligned} \tag{XIII}$$

Přihlédneme-li k rovnicím (19), $(21)_2$, $(23)_2$, $(24)_2$ odst. 7. shledáme ihned, že rovnice (XIII) tvoří systém ortogonální, který, zavedeme-li, jako v odst. 2. rovnice (3) vektorové označení funkcí theta, bude znamenati otočení pravoúhlého systému o úhly, jichž směrové kosiny jsou:

	ϑ_5^2:	ϑ_{11}^2:	ϑ_{14}^2:
ϑ_7^2	$\frac{c_2^2}{c_0^2}$,	$\frac{c_{12}^2}{c_0^2}$,	$-\frac{c_9^2}{c_0^2}$
ϑ_{10}^2	$\frac{c_8^2}{c_0^2}$,	$-\frac{c_6^2}{c_0^2}$,	$\frac{c_3^2}{c_0^2}$
ϑ_{13}^2	$-\frac{c_{15}^2}{c_0^2}$,	$\frac{c_1^2}{c_0^2}$,	$\frac{c_4^2}{c_0^2}$

takže z rovnic (XIII) obdržíme ihned:

$$\vartheta_7^4 + \vartheta_{10}^4 + \vartheta_{13}^4 = \vartheta_5^4 + \vartheta_{11}^4 + \vartheta_{14}^4 \tag{XIV}$$

ku kteréžto rovnici, obsahující všech šest lichých čtverců, povede také všech ostatních 19 systémů tohoto typu.

10. *II. typ.*

$$\begin{aligned} c_{15}^2\, \vartheta_5^2 &= -c_2^2\, \vartheta_8^2 + c_3^2\, \vartheta_9^2 + c_6^2\, \vartheta_{12}^2 \\ c_{15}^2\, \vartheta_7^2 &= -c_0^2\, \vartheta_8^2 + c_1^2\, \vartheta_9^2 + c_4^2\, \vartheta_{12}^2 \\ c_{15}^2\, \vartheta_{15}^2 &= -c_8^2\, \vartheta_8^2 + c_9^2\, \vartheta_9^2 + {}_{12}^2\, c\vartheta_{12}^2 \end{aligned} \tag{XV}$$

Vezměme zřetel ku (19) a $(21)_{1-3}$ odstavce 7.

Příslušné směrové kosiny jsou dány schematem:

	ϑ_8^2	ϑ_9^2	ϑ_{12}^2
ϑ_5^2	$i\dfrac{c_2^2}{c_{15}^2}$,	$\dfrac{c_3^2}{c_{15}^2}$,	$\dfrac{c_6^2}{c_{15}^2}$,
ϑ_7^2	$-\dfrac{c_0^2}{c_{15}^2}$,	$i\dfrac{c_1^2}{c_{15}^2}$,	$i\dfrac{c_4^2}{c_{15}^2}$,
ϑ_{15}^2	$i\dfrac{c_8^2}{c_{15}^2}$,	$\dfrac{c_9^2}{c_{15}^2}$,	$\dfrac{c_{12}^2}{c_{15}^2}$,

takže lze z (XV) vypočísti:

$$-\vartheta_5^4+\vartheta_7^4-\vartheta_{15}^4=\vartheta_8^4-\vartheta_9^4-\vartheta_{12}^4 \tag{XVI}$$

Obrácením systému (XV) plyne:

$$\begin{aligned} c_{15}^2\,\vartheta_8^2 &= c_2^2\,\vartheta_5^2-c_0^2\,\vartheta_7^2+c_8^2\,\vartheta_{15}^2\\ c_{15}^2\,\vartheta_9^2 &= c_3^2\,\vartheta_5^2-c_1^2\,\vartheta_7^2-c_9^2\,\vartheta_{15}^2\\ c_{15}^2\,\vartheta_{12}^2 &= c_6^2\,\vartheta_5^2-c_4^2\,\vartheta_7^2+c_{12}^2\,\vartheta_{15}^2. \end{aligned} \tag{XVII}$$

Charakteristiky 8, 9, 12, 15 jsou sudé a systém (XVII) *jest typu (IV)* a vede k témuž schematu směrových kosinů a téže rovnici stupně čtvrtého (XVI) jako systém předešlý.

11. Systémy:

$$\left.\begin{aligned} c_0^2\,\vartheta_{10}^2 &= c_8^2\,\vartheta_2^2-c_3^2\,\vartheta_9^2-c_6^2\,\vartheta_{12}^2\\ c_0^2\,\vartheta_{13}^2 &= c_{15}^2\,\vartheta_2^2+c_4^2\,\vartheta_9^2-c_1^2\,\vartheta_{12}^2\\ c_0^2\,\vartheta_0^2 &= c_2^2\,\vartheta_2^2+c_9^2\,\vartheta_9^2+c_{12}^2\,\vartheta_{12}^2 \end{aligned}\right\} \tag{XVIII}$$

$$\left.\begin{aligned} c_6^2\,\vartheta_{11}^2 &= c_{12}^2\,\vartheta_1^2-c_{15}^2\,\vartheta_2^2-c_4^2\,\vartheta_9^2\\ c_6^2\,\vartheta_7^2 &= c_0^2\,\vartheta_1^2-c_3^2\,\vartheta_2^2-c_8^2\,\vartheta_9^2\\ c_6^2\,\vartheta_6^2 &= -c_1^2\,\vartheta_1^2+c_2^2\,\vartheta_2^2+c_9^2\,\vartheta_9^2 \end{aligned}\right\} \tag{XIX}$$

$$\left.\begin{aligned} c_3^2\,\vartheta_{14}^2 &= c_{12}^2\,\vartheta_1^2-c_4^2\,\vartheta_9^2-c_2^2\,\vartheta_{15}^2\\ c_3^2\,\vartheta_{10}^2 &= c_8^2\,\vartheta_1^2-c_0^2\,\vartheta_9^2-c_6^2\,\vartheta_{15}^2\\ c_3^2\,\vartheta_3^2 &= -c_1^2\,\vartheta_1^2+c_9^2\,\vartheta_9^2-c_{15}^2\,\vartheta_{15}^2 \end{aligned}\right\} \tag{XX}$$

jsou vesměs typu II. Resultují z nich rovnice stupně čtvrtého:

$$\begin{aligned} \vartheta_{10}^4+\vartheta_{13}^4+\vartheta_0^4 &= \vartheta_2^4+\vartheta_9^4+\vartheta_{12}^4\\ -\vartheta_{11}^4+\vartheta_7^4-\vartheta_6^4 &= \vartheta_1^4-\vartheta_2^4-\vartheta_9^4\\ \vartheta_{14}^4-\vartheta_{10}^4+\vartheta_3^4 &= \vartheta_1^4-\vartheta_9^4+\vartheta_{15}^4 \end{aligned} \tag{XXI}$$

12. Míním dále ukázati, jak obdržíme systém *ortogonální typu III.* Současně jest tento příklad návodem, jak obdržíme kterýkoli z typů systému homog. lin. rovnic mezi čtverci čtyř funkcí theta.

Vyjdeme na př. od rovnic spojujících čtverce sudých funkcí. Napíšeme rovnici:

$$c_{15}^2\ \vartheta_{15}^2 = -\ c_8^2\ \vartheta_8^2 + c_9^2\ \vartheta_9^2 + c_{12}^2\ \vartheta_{12}^2. \tag{26}$$

Upotřebíme tabulky[13]) platné pro substituci poloperiod a vyhledáme onen sloupec, v němž *sudým* charakteristikám: 15, 8, 9, 12 odpovídají dvě liché, dvě sudé: 11, 12, 13, 8. Nabudeme tak relace:

$$c_{15}^2\ \vartheta_{11}^2 = c_9^2\ \vartheta_{13}^2 + c_8^2\ \vartheta_{12}^2 - c_{12}^2\ \vartheta_8^2, \tag{XXII$_1$}$$

která jest základní (první) rovnicí typu (III). Obrátíme se dále k rovnicím (19)—(24) mezi konstantami odst. 7. — Z rovnice (22$_1$) vyčteme, že bude existovati rovnice tvaru:

$$\pm\ c_{15}^2 * = \pm\ c_1^2\ \vartheta_{13}^2 \pm c_0^2\ \vartheta_{12}^2 \pm c_4^2\ \vartheta_8^2 \tag{27}$$

kde znaménka, ani funkci theta na levo dosud neznáme. Protože však jest v platnosti rovnice:

$$c_{15}^2\ \vartheta_{15}^2 = -\ c_1^2\ \vartheta_1^2 + c_0^2\ \vartheta_0^2 -\ c_4^2\ \vartheta_4^2 \tag{28}$$

pro čtyři čtverce sudých funkcí, vyčteme snadno z téže substituční tabulky druhou rovnici našeho systému v definitivním tvaru:

$$\underline{c_{15}^2\ \vartheta_3^2 = c_1^2\ \vartheta_{13}^2 + c_0^2\ \vartheta_{12}^2 - c_4^2\ \vartheta_8^2} \tag{XXII$_2$}$$

Podobně nalezneme třetí rovnici:

$$c_{15}^2\ \vartheta_1^2 = c_3^2\ \vartheta_{13}^2 + c_2^2\ \vartheta_{12}^2 - c_6^2\ \vartheta_8^2, \tag{XXII$_3$}$$

takže celý systém typu III. zní pak:

$$\left.\begin{aligned} c_{15}^2\ \vartheta_{11}^2 &= c_9^2\ \vartheta_{13}^2 + c_8^2\ \vartheta_{12}^2 - c_{12}^2\ \vartheta_8^2 \\ c_{15}^2\ \vartheta_3^2 &= c_1^2\ \vartheta_{13}^2 + c_0^2\ \vartheta_{12}^2 - c_4^2\ \vartheta_8^2 \\ c_{15}^2\ \vartheta_1^2 &= c_3^2\ \vartheta_{13}^2 + c_2^2\ \vartheta_{12}^2 - c_6^2\ \vartheta_8^2 \end{aligned}\right\} \tag{XXII}$$

při čemž na základě rovnic (19) vychází pro čtvrté mocnosti funkcí theta vztah:

$$\vartheta_{11}^4 - \vartheta_3^4 + \vartheta_1^4 = \vartheta_{13}^4 - \vartheta_{12}^4 + \vartheta_8^4. \tag{XXIII}$$

13. Pokud se počtu těchto bikvadratických rovnic týče, tu, jelikož dva *F. S.* mají vždy dvě a jen dvě charakteristiky společné,[14]) musíme předpokládati, že charakteristiky každého ortogonálního systému náležejí jednomu a témuž *F. S.* charakteristik. Pro každý typ III.—IV. lze tedy nalézti 15 rovnic typu (XXIII), neboť každý ortogonální systém II.—IV. obsahuje všecky čtyři sudé charakteristiky (a obě liché) každého *F. S.*

O znaménkách čtvrtých mocností bude pojednáno v odst. 18. Pokud se týče ortogonálních systémů typu I, ty vedou všechny

[13]) Na př. v již vytčeném Forsyth: Lectures etc. str. 254.
[14]) Krazer. Lehrbuch der Thetafunktionen 337.

k téže bikvadratické relaci (XIV) odst. 9. *Jest tudíž 16 bikvadratických rovnic.*

14. Ve světle *obecné teorie charakteristik* jeví se předešlé výsledky takto:

Liché charakteristiky funkcí theta dvou proměnných budu — v jakémkoli pořádku psané — znamenati:[15])

$$[\omega_1],\quad [\omega_2],\quad [\omega_3],\quad [\omega_4],\quad [\omega_5],\quad [\omega_6],$$

nevlastní charakteristiku nulovou symbolem [0].

Kombinace po dvou charakteristikách budu znamenati:

$$[\omega_i,\ \omega_k]$$

po třech: $[\omega_i,\ \omega_k,\ \omega_l]$ atd.

Z teorie charakteristik vytýkám zde především, že

$$[\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \omega_4,\ \omega_5,\ \omega_6] \equiv [0], \tag{29}$$

takže jest na př.:

$$[\varkappa] = [\omega_5\ \omega_6] = [\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \omega_4]. \tag{30}$$

Pro dvě charakteristiky:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_1, & \varepsilon_2 \\ \varepsilon'_1, & \varepsilon'_2 \end{bmatrix}, \qquad [\eta] = \begin{bmatrix} \eta_1, & \eta_2 \\ \eta'_1, & \eta'_2 \end{bmatrix} \tag{31}$$

bude symbol:

$$|\ \varepsilon,\ \eta\ | = (-1)^{\sum\limits_1^2 (\varepsilon_\mu\, \eta'_\mu - \varepsilon'_\mu\, \eta_\mu)} \tag{32}$$

znamenati hodnotu + 1 pro charakteristiky syzygetické a — 1 pro azygetické — kdežto označení:

$$(-1)^{(\varepsilon)\,(\eta')} = (-1)^{\sum\limits_1^2 \varepsilon_\mu\, \eta'_\mu}. \tag{33}$$

Dále jest třeba ještě podotknouti, že šest charakteristik tvaru

$$[\varkappa,\ \omega_1],\quad [\varkappa,\ \omega_2],\quad [\varkappa,\ \omega_3],\quad [\varkappa,\ \omega_4),\quad [\varkappa,\ \omega_5],\quad [\varkappa,\ \omega_6],$$

kde $\varkappa$ jest libovolná charakteristika $[\varkappa]$, tvoří fundamentální (základní) systém (*F. S.* dle Krazera) charakteristik, o němž byla již řeč v odst. 8.

Pro $[\varkappa] = [0]$ podává hoření řada šest lichých charakteristik, položíme-li pak po řadě $[\varkappa]$ rovno všem ostatním 15ti vlastním charakteristikám, nalezneme všech ostatních 15 *F. S.* charakteristik, z nichž každý bude obsahovati dvě liché a čtyři sudé charakteristiky.

15. Z Riemannovy resp. Krazer-Prymovy[16]) obecné rovnice pro

---

[15]) Viz mé pojednání ve Věstníku Akademie 1925. O těchto pojmech Baker: Abels Theorem. — Krazer: Lehrbuch der Thetafunktionen 336 a j. Encyklopädie II. 7. a j.

[16]) Krazer-Prym: „Neue Grundlagen einer Theorie der allgemeinen Thetafunktionen". Lipsko 1892. Str. 20. — Krazer: „Theorie der zweifach unendlichen Thetareihen auf Grund der Riemannschen Thetaformel. Lipsko 1882. 53. 42.

funkce theta s racionálními charakteristikami lze nabýti obecné rovnice pro čtverce funkcí theta s poloviční charakteristikou a dvou proměnných ve tvaru:

$$2\,(-1)^{(\varrho)(\omega_\xi)'}\,\vartheta^2[\varkappa,\omega_\xi](0)\,\vartheta^2[\varkappa,\varrho,\omega_\xi](u) = \qquad \text{(XXIV)}$$
$$= \sum_{i=1}^{4} \mid \omega_i, \omega \mid (-1)^{(\varrho)(\omega_i)'}\,\vartheta^2[\varkappa,\omega_i](0)\,\vartheta^2[\varkappa,\varrho,\omega_i](u),$$

při čemž: $$[\varkappa] = [\omega_5, \omega_6] \qquad (34)$$

může znamenati libovolnou kombinaci po dvou z řady lichých charakteristik a tedy libovolnou z 15ti vlastních charakteristik funkce theta. $[\varrho]$ může znamenati kteroukoli z 16ti charakteristik vůbec a index ξ jest omezen na hodnoty 1, 2, 3, 4. — Rovnice (XXIV) representuje v celku $15 \times 16 = 240$ rovnic. Rovnici (XXIV) upravím dále:

Položíme: $$[\varkappa] = [\omega_5, \omega_6]$$
$$[\varrho] = [\omega_5, \omega_6, \varkappa],$$

kde $[\varkappa]$ budu rozuměti libovolnou ze 16ti charakteristik. Vedle toho jest:
$$[\omega_5, \omega_6;\ \omega_5, \omega_6, \varkappa;\ \omega_i] = [\varkappa, \omega_i] \qquad (35)$$
vzhledem k dělitelnosti číslem 2.

Na konec tedy obdržíme z rovnice (XXVI):

$$(-1)^{(\omega_5,\omega_6,\varkappa)(\omega_\xi)'}\,\vartheta^2[\omega_5,\omega_6,\omega_\xi](0)\,\vartheta^2[\varkappa,\omega_\xi](u) =$$
$$= \sum_{i=1}^{4}(\xi) \mid \omega_i, \omega_\xi \mid (-1)^{(\omega_5,\omega_6,\varkappa)(\omega\ ')} \times \qquad \text{(XXV)}$$
$$\times\,\vartheta^2[\omega_5,\omega_6,\omega_i](0)\,\vartheta^2[\varkappa,\omega_i](u),$$

při čemž na pravo jest při sečítání dle i vynechati onu hodnotu, která se rovná hodnotě ξ (1, 2, 3, 4) na levé straně (XXV), což naznačeno symbolem (ξ).

Vložíme-li do této rovnice:

$$[\varkappa] = [\omega_5, \omega_6],\quad u = 0$$

t. j. oba argumenty u_1, $u_2 = 0$, nalezneme pro funkce theta argumentů nulových:

$$\vartheta^4[\omega_5,\omega_6,\omega_\xi] = \sum_{i=1}^{4}(\xi)\,\vartheta^4[\omega_5,\omega_6,\omega_i] \mid \omega_i, \omega_\xi \mid \qquad \text{(XXVI)}$$

Vedle rovnice (XXV) lze ještě psáti obecnou rovnici mezi třemi součiny po dvou funkcí theta ve tvaru:[17])

[17]) Krazer: Lehrbuch der Thetafunktionen 340.

$$\sum_{i=1}^{3}(-1)^{(\mu,\,\omega_1,\,\omega_2,\,\omega_3)\,(\omega_i)'}=$$
$$=\vartheta\,[\omega_5,\,\omega_6,\,\omega_i]\,(0)\;\vartheta\,[\omega_4,\,\omega_6,\,\omega_i]\,(0)\times$$
$$\times\,\vartheta\,[\mu\,\omega_i]\,(u)\;\vartheta\,[\mu,\,\omega_4,\,\omega_5,\,\omega_i]\,(u)=0,$$

kde $[\mu]$ jest opět libovolná charakteristika. Položíme-li sem

$$\mu=[\omega_5,\,\omega_6] \qquad u\,(u_1,\,u_2)=0$$

a pamatujeme, že:

$$[\omega_5,\,\omega_6,\,\omega_1,\,\omega_2,\,\omega_3]=[\omega_4] \tag{36}$$

vzhledem ku (29) a z téhož důvodu:

$$[\omega_5,\,\omega_6,\,\omega_4,\,\omega_5,\,\omega_i]=[\omega_4,\,\omega_6,\,\omega_i], \tag{37}$$

obdržíme další rovnice mezi konstantami:

$$\sum_{i=1}^{3}(-1)^{(\omega_4)\,(\omega_i)'}\;\vartheta^2\,[\omega_5,\omega_6,\omega_i]\;\vartheta^2\,[\omega_6,\omega_4,\omega_i]=0. \tag{XXVII}$$

---

16. Rovnice (XXV) představuje oněch 240 specielních rovnic, o nichž jsem pojednal v odst. 8., rovnice (XXVI) a (XXVII) jsou tytéž jako (19) — (24) v odstavci (7). K ortogonálním systémům lze dospěti takto:

V rovnici (XXIV) jsme kladli:

$$[\varkappa]=[\omega_5,\,\omega_6] \quad : \quad \xi=1,\,2,\,3,\,4,$$

položíme-li tedy ve všech rovnicích (XXIV)—(XXVII) místo charakteristiky $[\omega_5,\,\omega_6]$ po řadě:

$$\begin{matrix}[\omega_6,\,\omega_4] \\ [\omega_4,\,\omega_5]\end{matrix}\quad \text{nutno klásti:}\quad \begin{matrix}\xi=1,\,2,\,3,\,5 \\ \xi=1,\,2,\,3,\,6\end{matrix}.$$

Sečítáme-li pak na pravých stranách řečených rovnic podle indexu $i=1,\,2,\,3$ vychází na levé straně pro index ξ pořadem hodnoty $\xi=4,\,5,\,6,$ Tu na levé straně v rovnicích (XXVI) takto psaných vždy tatáž hodnota $\vartheta^4\,[\omega_4,\,\omega_5,\,\omega_6]$. Přibéřeme-li v úvahu rovnici (XXVII) shledáme ihned větu:

„*Tři rovnice (XXV), v nichž pořadem píšeme:*

$$\begin{matrix}\omega_5,\,\omega_6\,; & \xi=4, & i=1,\,2,\,3 \\ \omega_6,\,\omega_4\,; & \xi=5, & i=1,\,2,\,3 \\ \omega_4,\,\omega_5\,; & \xi=6, & i=1,\,2,\,3\end{matrix}$$

tvoří systém tří rovnic ortogonálních“.

Ježto $[\varkappa]$ explicitně v rovnici (XXV) se vyskytující může nabývati 16 hodnot a charakteristiky: ω_4, ω_5, ω_6 možno voliti $\binom{6}{3} = 20$ti různými způsoby, jest patrno, že v hořejších třech rovnicích jest *obsaženo* $20 \times 16 = 320$ *speciálních systémů ortogonálních,* o nichž bylo v předešlých odstavcích promluveno.

Koeficienty tohoto systému jsou čtverce funkcí theta s proměnnými nulovými a s charakteristikami danými schematem:

$$\text{(XXVIII)}\qquad \begin{array}{c|ccc} [\omega_4, \omega_5, \omega_6] & [\omega_5, \omega_6, \omega_1], & [\omega_5, \omega_6, \omega_2], & [\omega_5, \omega_6, \omega_3] \\ [\omega_4, \omega_5, \omega_6] & [\omega_4, \omega_6, \omega_1], & [\omega_4, \omega_6, \omega_2], & [\omega_4, \omega_6, \omega_3] \\ [\omega_4, \omega_5, \omega_6] & [\omega_4, \omega_5, \omega_1], & [\omega_4, \omega_5, \omega_2], & [\omega_4, \omega_5, \omega_3]. \end{array}$$

Znaménko součinitelů určí se podle (XXV).

K tomu poznamenávám následující:

Rovnice (XXV), (XXVI) a (XXVII) uvedeny jsou až na znaménka v Encyklopädii der math. Wissenschaften II. 7. Str. 745 (436) a 753 (444), (445), doplnil jsem je znaménky[18]) a ukázal jejich souvislost s (XXIV). Rovnice (XXV) *lze seřaditi v ortogonální systémy* a lze na základě toho psáti obecné rovnice mezi šesti čtvrtými mocnostmi funkcí theta, jichž koeficienty jsou ± 1. K tomu se obrátím v odstavci následujícím.

17. Abychom mohli odvoditi rovnici mezi šesti čtvrtými mocnostmi funkcí theta v obecném tvaru, je nutno vedle (XXVI) a (XXVII) předešlého odstavce, znáti ještě relace spojující čtvrté mocnosti konstant v každém s l o u p c i schematu (XXVIII).

Jelikož jest na základě (29)

$$\begin{aligned} [\omega_5, \omega_6, \omega_1] &= [\omega_2, \omega_3, \omega_4] \\ [\omega_4, \omega_6, \omega_1] &= [\omega_2, \omega_3, \omega_5] \\ [\omega_4, \omega_5, \omega_1] &= [\omega_2, \omega_3, \omega_6] \end{aligned} \tag{38}$$

jest patrno, že pro každý sloupec schematu (XXVIII) lze upotřebiti rovnice (XXVI) platné pro první jeho řádek. Místo charakteristik ω_5, ω_6, píšeme charakteristiky ω_2, ω_3 dle indexu i sečítáme $i = 4, 5, 6$ a na levo vyjde pak index $\xi = 1$, takže jest pro první sloupec konstant (XXVIII)

$$\vartheta^4 [\omega_1, \omega_2, \omega_3] = \sum_{4,5,6} | \omega_i, \omega_1 | \, \vartheta^4 [\omega_2, \omega_3, \omega_i]. \tag{XXIX}$$

---

[18]) K r a z e r: Theorie der zweifach unendlichen Thetareihen 35.

Pro další dva sloupce píšeme pořadem:
místo:

$$\omega_2,\ \omega_3;\quad i=4.\ 5,\ 6;\quad \xi=1,$$
$$\omega_3,\ \omega_1;\quad i=4,\ 5,\ 6;\quad \xi=2,$$
$$\omega_1,\ \omega_2;\quad i=4,\ 5,\ 6;\quad \xi=3,$$

takže na levé straně vychází ve všech třech rovnicích tatáž čtvrtá mocnost funkce theta charakteristiky [1, 2, 3], při čemž ovšem:

$$\vartheta^4[\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3]=\vartheta^4[\omega_4,\ \omega_5,\ \omega_6]. \tag{39}$$

Obě relace pro druhý a třetí sloupec schematu (XXVIII) zní tedy:

$$\left.\begin{aligned}\vartheta^4[\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3]&=\sum_{4,5,6}|\ \omega_i,\ \omega_2\ |\ \vartheta^4[\omega_3,\ \omega_1,\ \omega_i]\\ \vartheta^4[\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3]&=\sum_{4,5,6}|\ \omega_i,\ \omega_3\ |\ \vartheta^4[\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_i]\end{aligned}\right\}\quad (\mathrm{XXIX})_{2,3}$$

Obdobně mezi třemi součiny čtverců funkcí theta ve dvou (na př. prvních dvou) sloupcích možno ihned psáti z rovnice (XXVII) předešlého odstavce:

$$\sum_{i=4,5,6}(-1)^{(\omega_i)\,\omega'_i}\,\vartheta^2[\omega_2,\ \omega_3,\ \omega_i]\ \vartheta^2[\omega_3,\ \omega_1,\ \omega_i]=0 \tag{XXX}$$

a obdobné dvě další pro ostatní sloupce.

18. Ve schematu znamének:

$$\begin{array}{lll}|\ \omega_4,\ \omega_1\ |, & |\ \omega_4,\ \omega_2\ |, & |\ \omega_4,\ \omega_3\ |\\ |\ \omega_5,\ \omega_1\ |, & |\ \omega_5,\ \omega_2\ |, & |\ \omega_5,\ \omega_3\ |\\ |\ \omega_6,\ \omega_1\ |, & |\ \omega_6,\ \omega_2\ |, & |\ \omega_6,\ \omega_3\ |\end{array} \tag{40}$$

které vyskytují se v rovnicích (XXVI) a (XXIX) lze obecně dokázati, že pro dva sloupce, na př. první dva platí:

$$|\omega_4,\ \omega_1|\times|\omega_4,\ \omega_2|=|\omega_5,\ \omega_1|\times|\omega_5,\ \omega_2|=|\omega_6,\ \omega_1|\times|\omega_6,\ \omega_2|. \tag{41}$$

Jest totiž podle významu syzygetického symbolu (32) odst. 14.:

$$\left.\begin{aligned}|\ \omega_4,\ \omega_1\ |\times|\ \omega_4,\ \omega_2\ |&=|\ \omega_4;\ [\omega_1,\ \omega_2]\ |\\ |\ \omega_5,\ \omega_1\ |\times|\ \omega_5,\ \omega_2\ |&=|\ \omega_5;\ [\omega_1,\ \omega_2]\ |\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

a součin těchto rovnic dává:

$$|\,[\omega_4,\ \omega_5],\ [\omega_1,\ \omega_2]\,|.$$

Avšak jest:

$$|\,[\omega_\varkappa,\ \omega_\lambda],\ [\omega_\mu,\ \omega_\nu]\,|=\pm 1, \tag{43}$$

dle toho jsou-li všechny indexy $\varkappa,\ \lambda,\ \mu,\ \nu$ čísla rozdílná, čili nic.[19])

[19]) Krazer: Lehrbuch der Thetafunktionen 337.

Tím jest rovnice (41) dokázána. Podobná shoda znamének platí v kterýchkoli dvou řádcích schematu (40). Na základě těchto úvah plyne ihned výsledná rovnice bikvadratická:

$$\begin{aligned}
&\underline{|\omega_4, \omega_1| \,\vartheta^4[\varkappa, \omega_4](u) + |\omega_5, \omega_1| \,\vartheta^4[\varkappa, \omega_5](u) +}\\
&\qquad\qquad \underline{+ |\omega_6, \omega_1| \,\vartheta^4[\varkappa, \omega_6](u) =}\\
&\underline{= \vartheta^4[\varkappa, \omega_1](u) + |\omega_4, \omega_1| \, |\omega_4, \omega_2| \,\vartheta^4[\varkappa; \omega_2](u) +}\\
&\qquad\qquad \underline{+ |\omega_4, \omega_1| \, |\omega_4, \omega_3| \,\vartheta^4[\varkappa, \omega_3](u)}
\end{aligned} \qquad \text{(XXXI)}$$

a to jest obecná rovnice mezi šesti čtvrtými mocnostmi funkcí theta náležejících jednomu a témuž fundamentálnímu (*F. S.*) systému charakteristik.

Rovnice (XXXI) obsahuje tedy 16 speciálních rovnic, jak o nich bylo v odst. 13. pojednáno. Pro $[\varkappa] = 0$ z ní plyne rovnice (XIV) odstavec 9.

19. V krátkosti se chci zmíniti, jak od rovnice (XXXI) lze přejíti k rovnicím mezi funkcemi hypereliptickými, obdobně, jako jsem to dovodil pro $p = 1$ v odst. 4. a násl.

Hodí se k tomu vzíti za základ hypereliptické funkce M. Krauseho:[20])

Krause definuje hypereliptické funkce σ (sigma) a sice

$$\left.\begin{aligned}
&\text{sudé:} \quad \sigma_\alpha(u_1, u_2) = \frac{\Theta_\alpha(u_1, u_2)}{\Theta_\alpha}\\
&\text{liché:} \quad \sigma_\beta(u_1, u_2) = \frac{\Theta_\beta(u_1, u_2)}{\Theta'_\beta{}^{(1)} + \Theta'_\beta{}^{(2)}}
\end{aligned}\right\} \qquad (44)$$

Při tom proměnné u_1, u_2 jsou lineárně závislé na původních proměnných funkcích theta[21]) v důsledku čehož místo označení ϑ_α užívá Krause označení Θ_α (resp. f_α). α jest sudá, β lichá charakteristika. Ve jmenovatelích jsou hodnoty funkcí pro nulové proměnné, při čemž $\Theta'_\beta{}^{(i)}$ znamená derivaci dle i-té proměnné. Koeficienty

$$\frac{\sigma_\alpha(u_1, u_2)}{\sigma_5(u_1, u_2)}$$

jsou pak čtyřperiodickými hypereliptickými funkcemi obdobnými Weierstrassově p-funkci. Charakteristika (5) vztahuje se k nevlastní charakteristice

$$\begin{bmatrix} 0, & 0 \\ 0, & 0 \end{bmatrix}.$$

[20]) M. Krause: „Die Transformation der hyperelliptischen Funktionen". Lipsko 1886. Str. 62. Pojednání: Acta mathematica 1883. Str. 283. Crellův journal 1883. Str. 256. Math. Annalen 1886. Str. 1. a 16.

[21]) Ve vytčené již knize (o pojednáních) Krauseho: str. 62., rovnice (1) a str. 54. (3).

Funkce tyto označuje Krause al_α, Brioschi pak označuje $p_r(u)$ resp. $p_{r,s}(u)$[22] a uvádí rovnici:

$$\vartheta_1^4 + \vartheta_{13}^4 + \vartheta_3^4 = \vartheta_{24}^4 + \vartheta_{40}^4 + \vartheta_{02}^4 \tag{45}$$

(označení Weierstrassovo: Baker 303, Krazer 343), které jest totožné s rovnicí (XIV) odst. 9. a poukazuje k souvislosti této rovnice s rovnicí mezi čtvrtými mocnostmi hypereliptických funkcí $p.(u)$.[23]

Od rovnice (XXXI) mohli bychom přejíti též k funkcím hypereliptickým za pomoci σ funkce a jejích kofunkcí $\sigma_{\varphi,\,\psi}$, jak je zavedl Klein.[24] Zavedeme-li ještě Bolzovy[25] funkce $\zeta_{\varphi,\,\psi}$ resp. $p_{\varphi,\,\psi}$ (srovnej Baker 333 a 517), nabudeme úplné analogie k užití funkcí Weierstrassových v odst. 1.—5. tohoto pojednání, než to přesahuje rámec těchto mých úvah. Zatím poukazuji jen k souvislosti funkcí theta se systémy funkcí Prymových.

¶20. Ke konci míním se zmíniti o rovnicích mezi čtverci funkcí theta pro větší počet proměnných, než-li dvě.

Pro $p = 3$[26] existuje celkem 64 různých charakteristik, z nich je 36 sudých a 28 lichých. Každý základní, fundamentální systém charakteristik *(F. S.)* sestává z 8 charakteristik a jest 2304 různých *F. S.* charakteristik. Ve *F. S.* jest buď 7 lichých a 1 sudá, nebo 3 liché a 5 sudých charakteristik. Poznamenáme-li:

$$[\omega_0],\ [\omega_1],\ [\omega_2],\ \ldots\ldots\ [\omega_7]$$

charakteristiky jednoho *F. S.* a $[n]$ součet lichých charakteristik téhož systému (je to všady charakteristika sudá), pak mezi šesti čtverci funkcí theta:

$$\vartheta^2[\varkappa, \omega_0](v);\ \ldots\ldots\ \vartheta^2[\varkappa, \omega_4](v);\ \vartheta^2[\varkappa, \omega_5, \omega_6, \omega_7](v)$$

bude existovati homogenní lineárná relace, jejíž koeficienty budou čtverce sudých funkcí theta a znaménka budou záviseti na znamení:

$$|\, n;\ n,\ \omega_\mu,\ \omega_5,\ \omega_6,\ \omega_7\, | = \pm 1 \tag{46}$$

$$\mu = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Jelikož $[\varkappa]$ je charakteristika libovolná, bude pro každý *F. S.* celkem

$$64 \times \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} = 4480$$

různých rovnic. To jest obdoba oněch 240 rovnic, o nichž pro $p = 2$ pojednáno v odst. 6. a následujících.

---

[22]) F. Brioschi: „Sulla teoria delle funzioni iperellitiche di primo ordine". Annali di mathematic XIV. 1887. Str. 333. a násl.

[23]) F. Brioschi: Tamže, str. 325. rovn. 11. Str. 249., rovn. 16.

[24]) Gött. Nachrichten 1887. Str. 515. Math. Ann. 32. Str. 351.

[25]) Gött. Nachrichten 1894. Str. 249.

[26]) Schottky: Abriss einer Theorie der Abelschen Functionen von drei Variabeln. Lipsko 1880.

Důležitý rozdíl jest však v relacích mezi konstantami (t. j. 36 hodnotami funkcí theta pro nulové hodnoty proměnných). Tu bude existovati trojí druh rovnic:

1. Mezi šesti čtvrtými mocnostmi konstant (obdoba rovnic (19) odst. 6).

2. Lin. relace mezi čtyřmi (ne pěti) součiny vždy dvou čtverců konstant.

3. Lin. relace mezi třemi součiny čtyř různých konstant (syzygetických).

Z rovnic mezi čtverci těchto funkcí theta nelze tedy sestaviti systémů z ortogonálních. Pro $p = 4$ jest 256 různých charakteristik, z nichž 136 jest sudých. Základní systém tvoří vždy 10 charakteristik.

Mezi 10ti čtverci funkcí theta každého F. S. existuje vždy homogenní lineární relace.

Mezi 136ti konstantami pak existují tyto vztahy (lin. homog.):

1. Mezi 10ti čtvrtými mocnostmi.

2. Mezi šesti (ne devíti) součiny dvou čtverců konstant.

3. Mezi čtyřmi součiny čtyř různých konstant jichž charakteristiky náležejí témuž syzygetickému systému.

Ani tu nelze z rovnic mezi čtverci funkcí theta nabýti systémů ortogonálních. — Ku přehledu číselných poměrů nechť slouží tato tabulka.

$p=$	$2^{2p}=$	$2^p=$	Počet charakteristik F. S.	Největší počet lin. nezávislých čtverců F. S.	Počet členů v rovnicích mezi konstantami:		
					c^4_i	$c_\alpha^2 c_\beta^2$	$c_\alpha c_\beta c_\gamma c_\delta$
1	4	2	4	2	3	—	—
2	16	4	6	3	4	3	—
3	64	8	8	5	6	4	3
4	256	16	10	9	10	6	4

Pro funkce theta s charakteristikou racionálnou r-tinovou není ani v jednoduchém případě $r = 3$, $p = 1$[27]) možno sestaviti z příslušných rovnic mezi třetími mocnostmi systém ortogonálný, zůstáváme tedy omezeni na funkce theta charakteristik polovičních a to jen jedné a dvou proměnných. — O geometrickém významu

---

Weber: Theorie der Abelschen Functionen vom Geschlecht 3 Berlin 1876. —
Noether: Münchner Abh. 17. I. 1888/9 str. 103.
[27]) Mé pojednání ve Věstníku Akademie II. tř. r. 1925 — Krazer: Lehrbuch der Thetafunctionen 390. —

relací mezi konstantami odkazuji pro případ $p = 3$ ku pracím Riemannovým[28]) a Weberovým, pro $p = 4$ ku pracím Noethesovým a Schottkyho.

*

Sur les systèmes orthogonaux d'équations dans la théorie des fonctions théta.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur fait voir qu'on peut arranger les équations liant les carrés des fonctions théta à une ou à deux variables et dont les caractéristiques ont le dénominateur deux, de sorte qu'elles forment des systèmes orthogonaux; il en résulte une équation liant les bicarrés (au nombre resp. de quatre ou de six) des fonctions théta, appartenant à un même système fondamental. Ainsi, pour une variable, du système orthogonal (II) suit la relation (III). Cette relation conduit à différentes conséquences pour les fonctions elliptiques, ce que montrent les équations (IV), (V), (VI), (VII), (VIII), (X).

Pour les fonctions théta à deux variables l'auteur désigne les caractéristiques impaires par les symboles

$$[\omega_1], \ldots, [\omega_6]$$

et par [0] la caractéristique nulle; par $[\omega_i, \omega_k]$, $[\omega_i, \omega_k, \omega_e]$, etc. des combinaisons des caractéristiques. Le symbole $[\varepsilon, \eta]$ a la valeur de 1 pour les caractéristiques syzygétiques et la valeur de -1 pour les caractéristiques azygétiques, de sorte que la relation (32) ait lieu. Les 16 systèmes fondamentaux de caractéristiques se présentent sous la forme d'une suite $[\varkappa, \omega_1], \ldots, [\varkappa, \omega_6]$, où $[\varkappa]$ signifie une quelconque des 16 caractéristiques différentes.

La formule générale de Riemann pour les fonctions théta à p variables donne les équations (XXV), (XXVI), (XXVII). Ces deux dernières, ainsi que dix autres équations, obtenues par l'échange des caractéristiques et par permutation cyclique des indices, constituent un système de douze équations qui fournissent les conditions nécessaires et suffisantes pour l'orthogonalité du système des trois équations (XXV). Ce système contient, d'ailleurs, 320 systèmes particuliers.

On peut distinguer quatre types différents de systèmes orthogonaux que voici:

---

[28]) Riemann: „Vorlesungen über die allgemeine Theorie der Integrale algebraisches Differentialen" G. m. W. 1902. — strana 97.
Weber: Journ. f. Math. 1880. — str. 82.
Schottky: Journ. f. Math. 1889 str. 269. Acta mathematica 1903, 235.
Cayley: J. f. Math. 1868, 1883.
Frobenius: J. f. Math. 1895
Wirtinger: Untersuchungen über Thetafunctionen Lipsko 1896.

i_4	$i_1,\ i_2,\ i_3;\ i_1$	$p_1,\ p_2,\ p_3;\ p_3$	$i_1,\ p_1,\ p_2;\ p_2$	$p_1,\ i_1,\ i_2$
i_5	$i_1,\ i_2,\ i_3;\ i_2$	$p_1,\ p_2,\ p_3;\ p_4$	$i_1,\ p_1,\ p_2;\ p_3$	$p_1,\ i_1,\ i_2$
i_6	$i_1,\ i_2,\ i_3;\ p_4$	$p_1,\ p_2,\ p_3;\ i_2$	$i_1,\ p_1,\ p_2;\ p_4$	$p_1,\ i_1,\ i_2$

(p . . . fonctions paire ; i . . . fonction impaire)

et il existe, respectivement, 20, 60, 180, 60 systèmes appartenant à ces différents types. De l'orthogonalité des systèmes (XXV) résulte l'existence de l'équation entre les six bicarrés des fonctions théta d'un même système fondamental, donnée par la formule (XXXI) qui contient 16 équations spéciales.

Pour $p > 2$ il n'existe plus de systèmes orthogonaux, analogues à ceux qui ont été trouvés pour $p = 1, 2$; l'auteur donne des exemples pour en faire voir la raison.